円環状き裂を有する傾斜機能圧電厚板の
非定常電気熱弾性応答*上 田 整^{*1}, 西 村 直 樹^{*2}Transient Thermoelectroelastic Response of a Functionally Graded
Piezoelectric Strip with an Annular CrackSei UEDA^{*3} and Naoki NISHIMURA^{*3} Department of Mechanical Engineering, Osaka Institute of Technology,
5-16-1 Omiya, Asahi-ku, Osaka-shi, Osaka, 535-8585 Japan

Transient response of an annular crack in a plate of a functionally graded piezoelectric material (FGPM) is studied under thermal shock loading conditions. It is assumed that the thermoelectroelastic properties of the strip vary continuously along the thickness of the strip, and that the crack faces are completely insulated. Some material properties are assumed to be exponentially dependent on the distance from the crack line parallel to the boundaries of the plate. By using both the Laplace and Hankel transforms, the thermal and electromechanical problems are reduced to a singular integral equation and a system of singular integral equations. The singular integral equations are solved numerically, and a numerical method is then employed to obtain the time dependent solutions by way of a Laplace inversion technique. The intensity factors versus time are presented for various values of dimensionless parameters representing the material nonhomogeneity and the crack position.

Key Words: Elasticity, Fracture Mechanics, Functionally Graded Materials, Piezoelectric Materials, Integral Transform, Annular Crack, Thermal Loading, Transient Response

1. 結 言

近年、センサー・アクチュエータ機能の高性能化・高機能化を目的とした傾斜機能圧電材料 (FGPM) が注目され⁽¹⁾, FGPM を対象とした電気破壊力学に関する理論的研究^{(2)~(5)}が精力的に進められている。また、温度変化に起因する熱変形などを適切に制御する知的材料システム⁽⁶⁾の開発には、熱的負荷を受ける FGPM を対象とした電気熱弾性破壊力学的挙動の解明が重要である。このため、2次元き裂^{(7),(8)}, 円板状き裂⁽⁹⁾ および円環状き裂⁽¹⁰⁾を有する FGPM を対象とした定常電気熱弾性問題に関する理論的研究成果が報告されている。一方、知的材料システムには急激な温度変化を伴う場合があるため、2次元き裂⁽¹¹⁾ および円板状き裂⁽¹²⁾を有する FGPM 厚板の非定常電気熱弾性問題が解析されており、非定常応答解明の重要性が指摘されている。

そこで本報では、前報^{(10),(12)}を拡張し、自由表面に

平行な円環状き裂を有する傾斜機能圧電厚板の上面温度が瞬間的に変化する場合を考え、き裂先端の非定常特異電気熱弾性場を理論解析した。解析には Laplace-Hankel 積分変換法および熱弾性変位ポテンシャル法を用い、問題の解を特異積分方程式の解に帰着して解く方法を採用した^{(13),(14)}。数値解析には Gauss-Jacobi の数値積分公式を用い⁽¹⁵⁾, Laplace 像空間における解を得た。さらに、数値 Laplace 逆変換法⁽¹⁶⁾を適用し、非定常応力・電束密度拡大係数に及ぼす材料不均質性および幾何学的形状の影響を明らかにした。

2. 問題の設定と基礎式

図 1 に示す円筒座標系 (r, θ, z) において、厚さ $h = h_1 + h_2$ の z 軸方向に傾斜組成された圧電厚板を考え、 z 軸の正の向きを分極方向とする。 $z = 0$ 面上に内半径が a , 外半径が b である幅 $2c (= b - a)$ の円環状き裂が自由表面に平行に存在するものとし、き裂面は電気的熱的に絶縁されているものとする^{(17),(18)}。初期温度 T_I の FGPM 厚板上面 ($z = h_1$ 面) 温度が時刻 $t = 0$ で T_I から $T_I + T_0$ に変化し、下面 ($z = -h_2$ 面) 温度は T_I に保持されている軸対称問題を設定する。解析

* 原稿受付 2008 年 7 月 18 日。

^{*1} 正員, 大阪工業大学工学部 (〒535-8585 大阪市旭区大宮 5-16-1)。^{*2} 准員, 大阪工業大学大学院工学研究科。
E-mail: ueda@med.oit.ac.jp

に際し、慣性効果は無視し、準静的問題を仮定した。以後、下添字 r, θ, z は座標軸方向を表し、 $i = 1, 2$ はそれぞれ $0 \leq z \leq h_1$, $-h_2 \leq z \leq 0$ の領域を示すものとする。

Fig.1 An annular crack in a functionally graded piezoelectric strip.

FGPM の材料特性変化が z 軸方向に指数関数的であると仮定すれば、材料特性は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} (c_{kl}, e_{kl}, \epsilon_{kk}) &= (c_{kl0}, e_{kl0}, \epsilon_{kk0}) \exp(\beta z) \\ (\lambda_{kk}, p_z) &= (\lambda_{kk0}, p_{z0}) \exp[(\beta + \omega)z] \\ \kappa_k &= \kappa_{k0} \exp(\delta z) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに、 $c_{kl}(z)$ は弾性定数、 $e_{kl}(z)$ は圧電定数、 $\epsilon_{kk}(z)$ は誘電定数、 $\lambda_{kk}(z)$ は熱弾性定数、 $p_z(z)$ は焦電定数、 $\kappa_k(z)$ は熱伝導率である。また、 β, ω および δ は材料の不均質性を表す正または負の定数であり、下添字 0 で $z = 0$ 面における各材料特性を示す。なお、FGPM の材料特性を指数関数的に変化させることにより、後述する支配方程式を線形にすることができる。

変位ベクトルの成分を $u_{\eta i} = u_{\eta i}(r, z)$ 、静電ポテンシャルを $\phi_i = \phi_i(r, z)$ 、材料温度を $T_i = T_i(r, z)$ とすると、応力テンソルの成分 $\sigma_{\eta\eta i} = \sigma_{\eta\eta i}(r, z)$ 、 $\sigma_{zri} = \sigma_{zri}(r, z)$ および電束密度ベクトルの成分 $D_{\eta i} = D_{\eta i}(r, z)$ ($\eta = r, \theta, z$, $i = 1, 2$) は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rri} &= c_{11} \frac{\partial u_{ri}}{\partial r} + c_{12} \frac{u_{ri}}{r} + c_{13} \frac{\partial u_{zi}}{\partial z} \\ &\quad + e_{31} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} - \lambda_{11} T_i \\ \sigma_{\theta\theta i} &= c_{12} \frac{\partial u_{ri}}{\partial r} + c_{11} \frac{u_{ri}}{r} + c_{13} \frac{\partial u_{zi}}{\partial z} \\ &\quad + e_{31} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} - \lambda_{11} T_i \\ \sigma_{zzi} &= c_{13} \frac{\partial u_{ri}}{\partial r} + c_{13} \frac{u_{ri}}{r} + c_{33} \frac{\partial u_{zi}}{\partial z} \\ &\quad + e_{33} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} - \lambda_{33} T_i \\ \sigma_{zri} &= c_{44} \left(\frac{\partial u_{zi}}{\partial r} + \frac{\partial u_{ri}}{\partial z} \right) + e_{15} \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \\ D_{ri} &= e_{15} \left(\frac{\partial u_{zi}}{\partial r} + \frac{\partial u_{ri}}{\partial z} \right) - \epsilon_{11} \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \\ D_{zi} &= e_{31} \frac{\partial u_{ri}}{\partial r} + e_{31} \frac{u_{ri}}{r} + e_{33} \frac{\partial u_{zi}}{\partial z} \\ &\quad - \epsilon_{33} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} + p_z T_i \end{aligned} \right\} (i = 1, 2) \quad (2)$$

不均質材料に対する非定常熱伝導方程式は次式となる。

$$\kappa^2 \left(\frac{\partial^2 T_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_i}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} + \delta \frac{\partial T_i}{\partial z} = \frac{1}{\lambda_0} \frac{\partial T_i}{\partial t} \quad (i = 1, 2) \quad (3)$$

ここに、 $\kappa^2 = \kappa_{10}/\kappa_{30}$ であり、温度伝導率 λ_0 は一般に大きく変化しないため、一定値とした。また、変位および静電ポテンシャルに関する場の支配方程式は

$$\left. \begin{aligned} &c_{110} \left(\frac{\partial^2 u_{ri}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{ri}}{\partial r} - \frac{u_{ri}}{r^2} \right) + c_{440} \frac{\partial^2 u_{ri}}{\partial z^2} \\ &+ (c_{130} + c_{440}) \frac{\partial^2 u_{zi}}{\partial r \partial z} + (e_{310} + e_{150}) \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial r \partial z} \\ &+ \beta \left[c_{440} \left(\frac{\partial u_{ri}}{\partial z} + \frac{\partial u_{zi}}{\partial r} \right) + e_{150} \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \right] \\ &= \lambda_{110} \exp(\omega z) \frac{\partial T_i}{\partial r} \\ &c_{440} \left(\frac{\partial^2 u_{zi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{zi}}{\partial r} \right) + c_{330} \frac{\partial^2 u_{zi}}{\partial z^2} \\ &+ (c_{130} + c_{440}) \left(\frac{\partial^2 u_{ri}}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{ri}}{\partial z} \right) \\ &+ e_{150} \left(\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \right) + e_{330} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial z^2} \\ &+ \beta \left[c_{130} \left(\frac{\partial u_{ri}}{\partial r} + \frac{u_{ri}}{r} \right) + c_{330} \frac{\partial u_{zi}}{\partial z} + e_{330} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right] \\ &= \lambda_{330} \exp(\omega z) \left[\frac{\partial T_i}{\partial z} + (\beta + \omega) T_i \right] \\ &e_{150} \left(\frac{\partial^2 u_{zi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{zi}}{\partial r} \right) + e_{330} \frac{\partial^2 u_{zi}}{\partial z^2} \\ &+ (e_{150} + e_{310}) \left(\frac{\partial^2 u_{ri}}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{ri}}{\partial z} \right) \\ &- \epsilon_{110} \left(\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \right) - \epsilon_{330} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial z^2} \\ &+ \beta \left[e_{310} \left(\frac{\partial u_{ri}}{\partial r} + \frac{u_{ri}}{r} \right) + e_{330} \frac{\partial u_{zi}}{\partial z} - \epsilon_{330} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right] \\ &= -p_{z0} \exp(\omega z) \left[\frac{\partial T_i}{\partial z} + (\beta + \omega) T_i \right] \end{aligned} \right\} (i = 1, 2) \quad (4)$$

本問題の温度場に関する初期・境界条件式は

$$T_i(r, z, 0) = T_I \quad (i = 1, 2) \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} T_1(r, 0, t) &= 0 \quad (a < r < b) \\ T_1(r, 0, t) &= T_2(r, 0, t) \quad (0 \leq r \leq a, b \leq r < \infty) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} T_1(r, 0, t) &= \frac{\partial}{\partial z} T_2(r, 0, t) \\ T_1(r, h_1, t) &= T_I + T_0 H(t) \\ T_2(r, -h_2, t) &= T_I \end{aligned} \right\} (0 \leq r < \infty) \quad (7)$$

ここに、 $H(t)$ は Heaviside の単位階段関数である。また、通常のき裂はスリット状で非透過型の境界条件を

採用すると⁽¹⁷⁾, 電気弾性場に関する境界条件式は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zz1}(r, 0, t) &= 0 & (a < r < b) \\ u_{z1}(r, 0, t) &= u_{z2}(r, 0, t) & (0 \leq r \leq a, b \leq r < \infty) \end{aligned} \right\} (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zr1}(r, 0, t) &= 0 & (a < r < b) \\ u_{r1}(r, 0, t) &= u_{r2}(r, 0, t) & (0 \leq r \leq a, b \leq r < \infty) \end{aligned} \right\} (9)$$

$$\left. \begin{aligned} D_{z1}(r, 0, t) &= 0 & (a < r < b) \\ \phi_1(r, 0, t) &= \phi_2(r, 0, t) & (0 \leq r \leq a, b \leq r < \infty) \end{aligned} \right\} (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zz1}(r, 0, t) &= \sigma_{zz2}(r, 0, t), & \sigma_{zz1}(r, h_1, t) &= 0, \\ \sigma_{zr1}(r, 0, t) &= \sigma_{zr2}(r, 0, t), & \sigma_{zr1}(r, h_1, t) &= 0, \\ D_{z1}(r, 0, t) &= D_{z2}(r, 0, t), & D_{z1}(r, h_1, t) &= 0, \\ \sigma_{zz2}(r, -h_2, t) &= 0, & \sigma_{zr2}(r, -h_2, t) &= 0, \\ D_{z2}(r, -h_2, t) &= 0 & & \end{aligned} \right\} (0 \leq r < \infty) \quad (11)$$

境界条件式(10)は, き裂面における電氣的絶縁の条件, すなわち非透過型の条件を表したもので, この非透過の仮定は安全側の評価を与えることが示されている⁽¹⁸⁾.

3. 温度場解析

温度場 $T_i = T_i(r, z, t)$ ($i = 1, 2$) を次のように置く.

$$T_i = T_I + T^{(1)} + T_i^{(2)} \quad (i = 1, 2) \quad (12)$$

ここに, $T^{(1)} = T^{(1)}(z, t)$ は非擾乱温度場であり, 支配方程式および初期・境界条件式は

$$\frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial z^2} + \delta \frac{\partial T^{(1)}}{\partial z} = \frac{1}{\lambda_0} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial t} \quad (13)$$

$$T^{(1)}(z, 0) = 0 \quad (14)$$

$$T^{(1)}(h_1, t) = T_0 H(t), \quad T^{(1)}(-h_2, t) = 0 \quad (15)$$

また, $T_i^{(2)} = T_i^{(2)}(r, z, t)$ ($i = 1, 2$) は擾乱温度場であり, 支配方程式および初期・境界条件式は

$$\begin{aligned} \kappa^2 \left(\frac{\partial^2 T_i^{(2)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_i^{(2)}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T_i^{(2)}}{\partial z^2} + \delta \frac{\partial T_i^{(2)}}{\partial z} \\ = \frac{1}{\lambda_0} \frac{\partial T_i^{(2)}}{\partial t} \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \quad (16)$$

$$T_i^{(2)}(r, z, 0) = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} T_1^{(2)}(r, 0, t) &= -\frac{\partial}{\partial z} T^{(1)}(0, t) & (a < r < b) \\ T_1^{(2)}(r, 0, t) &= T_2^{(2)}(r, 0, t) & (0 \leq r \leq a, b \leq r < \infty) \end{aligned} \right\} (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} T_1^{(2)}(r, 0, t) &= \frac{\partial}{\partial z} T_2^{(2)}(r, 0, t) \\ T_1^{(2)}(r, h_1, t) &= 0 \\ T_2^{(2)}(r, -h_2, t) &= 0 \end{aligned} \right\} (0 \leq r < \infty) \quad (19)$$

Laplace 変換およびその逆変換を次式で定義する.

$$\left. \begin{aligned} f^*(p) &= \int_0^\infty f(t) \exp(-pt) dt \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} f^*(p) \exp(pt) dp \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

ここに, Br は Bromwich の積分路である. 式(13) ~ (15) の Laplace 変換法を適用すると, Laplace 像空間における非擾乱温度場 $T^{(1)*} = T^{(1)*}(z, p)$ は次のように求まる.

$$T^{(1)*} = \frac{T_0}{p[1 - \exp(-2\mu_0 h)]} \left\{ \exp[\mu_2(h_1 - z)] - \exp[-2\mu_0 h + \mu_1(h_1 - z)] \right\} \quad (21)$$

上式中, μ_n ($n = 0, 1, 2$) は文献⁽¹²⁾に示されたものと同様である.

一方, 式(16)に Laplace-Hankel 積分変換法を適用し, Laplace 像空間における擾乱温度場 $T_i^{(2)*} = T_i^{(2)*}(r, z, p)$ ($i = 1, 2$) の一般解を求めると⁽¹³⁾

$$T_i^{(2)*} = \sum_{j=1}^2 \int_0^\infty D_{ij} J_0(sr) \exp(s\tau_{ij}z) ds \quad (i = 1, 2) \quad (22)$$

ここに, $D_{ij} = D_{ij}(s, p)$ ($i, j = 1, 2$) は境界条件式より決定される未知関数であり, J_n は n 次の第一種 Bessel 関数, $\tau_{ij} = \tau_{ij}(s, p)$ ($i, j = 1, 2$) は文献⁽¹²⁾に示されたものと同様である.

Laplace 変換された混合境界条件式(18)の第2式を考慮して, 新しい未知関数 $G_0(r, p)$ を次のように導入する⁽¹⁴⁾.

$$G_0(r, p) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial r} [T_1^{(2)*}(r, 0, p) - T_2^{(2)*}(r, 0, p)] & (a < r < b) \\ 0 & (0 \leq r \leq a, b \leq r < \infty) \end{cases} \quad (23)$$

さらに, Laplace 変換された境界条件式(19)を考慮し, 混合境界条件式(18)の第1式を用いると, 未知関数 $G_0(\xi, p)$ に関する次の特異積分方程式が得られる.

$$\int_a^b \xi [M_0^{(1)} + M_0^{(2)}] G_0(\xi, p) d\xi = -\frac{2}{\kappa} \frac{\partial}{\partial z} T^{(1)*}(0, p) \quad (a < r < b) \quad (24)$$

上式中, $M_0^{(1)} = M_0^{(1)}(\xi, r)$, $M_0^{(2)} = M_0^{(2)}(\xi, r, p)$ は, 文献⁽¹²⁾に示されたものと同様である. また, Laplace

変換された混合境界条件式 (18) の第 2 式より, 次の補足の条件式が得られる.

$$\int_a^b G_0(\xi, p) d\xi = 0 \quad (25)$$

特異積分方程式 (24) および補足の条件式 (25) を Gauss-Jacobi の数値積分公式⁽¹⁵⁾ を用いて数値解析することにより, $G_0(\xi, p)$ が求まり, 得られた $G_0(\xi, p)$ を用いて Laplace 像空間における擾乱温度場 $T_i^{(2)*}$ ($i = 1, 2$) が次のように得られる.

$$T_i^{(2)*} = \sum_{j=1}^2 \int_0^\infty R_{ij} R_0 J_0(sr) \exp(s\tau_{ij}z) ds \quad (i = 1, 2) \quad (26)$$

上式中, $R_{ij} = R_{ij}(s, p)$ ($i, j = 1, 2$) は文献⁽¹²⁾ に示されており, $R_0 = R_0(s, p)$, は次式で与えられる.

$$R_0 = \int_a^b \xi G_0(\xi, p) J_1(s\xi) d\xi \quad (27)$$

また, 非擾乱温度場 $T^{(1)}$ および擾乱温度場 $T_i^{(2)}$ ($i = 1, 2$) は式 (21), (26) に数値 Laplace 逆変換法⁽¹⁶⁾ を適用することにより求まる.

4. 電気熱弾性場解析

非擾乱温度場 $T^{(1)*}$ は, 特異電気弾性場を誘起しないため, 擾乱温度場 $T_i^{(2)*}$ ($i = 1, 2$) に起因する電気熱弾性場に注目する. Laplace 像空間における変位ベクトルの成分 $u_{\eta i}^* = u_{\eta i}^*(r, z, p)$ および静電ポテンシャル $\phi_i^* = \phi_i^*(r, z, p)$ ($\eta = r, z, i = 1, 2$) を次式で表す.

$$\left. \begin{aligned} u_{zi}^* &= u_{zi}^{(1)*} + u_{zi}^{(2)*} \\ u_{ri}^* &= u_{ri}^{(1)*} + u_{ri}^{(2)*} \\ \phi_i^* &= \phi_i^{(1)*} + \phi_i^{(2)*} \end{aligned} \right\} (i = 1, 2) \quad (28)$$

ここに, $u_{\eta i}^{(1)*} = u_{\eta i}^{(1)*}(r, z, p)$, $\phi_i^{(1)*} = \phi_i^{(1)*}(r, z, p)$ は Laplace 変換された式 (4) の T_i^* を $T_i^{(2)*}$ とした場合の特解, $u_{\eta i}^{(2)*} = u_{\eta i}^{(2)*}(r, z, p)$, $\phi_i^{(2)*} = \phi_i^{(2)*}(r, z, p)$ は式 (4) の T_i^* ($\eta = r, z, i = 1, 2$) を零とした場合の一般解であり, 上添字 (1), (2) はそれぞれ特解, 一般解を示す.

熱弾性変位ポテンシャルを用いると, 特解が次のように求まる.

$$\left. \begin{aligned} u_{zi}^{(1)*} &= \sum_{j=1}^2 \int_0^\infty \frac{p_{4ij}^{(1)}}{s} R_{ij} R_0 J_0(sr) \exp(s f_{ij} z) ds \\ u_{ri}^{(1)*} &= \sum_{j=1}^2 \int_0^\infty \frac{p_{5ij}^{(1)}}{s} R_{ij} R_0 J_1(sr) \exp(s f_{ij} z) ds \\ \phi_i^{(1)*} &= - \sum_{j=1}^2 \int_0^\infty \frac{p_{6ij}^{(1)}}{s} R_{ij} R_0 J_0(sr) \exp(s f_{ij} z) ds \end{aligned} \right\} (i = 1, 2) \quad (29)$$

また, Hankel 変換法を適用することにより, 一般解は次のように求まる⁽¹³⁾.

$$\left. \begin{aligned} u_{zi}^{(2)*} &= \sum_{j=1}^6 \int_0^\infty p_{4ij}^{(2)} A_{ij} J_0(sr) \exp(s \gamma_{ij} z) ds \\ u_{ri}^{(2)*} &= \sum_{j=1}^6 \int_0^\infty p_{5ij}^{(2)} A_{ij} J_1(sr) \exp(s \gamma_{ij} z) ds \\ \phi_i^{(2)*} &= - \sum_{j=1}^6 \int_0^\infty p_{6ij}^{(2)} A_{ij} J_0(sr) \exp(s \gamma_{ij} z) ds \end{aligned} \right\} (i = 1, 2) \quad (30)$$

上式中, $f_{ij} = f_{ij}(s, p)$, $p_{kij}^{(1)} = p_{kij}^{(1)}(s, p)$ ($i, j = 1, 2, k = 1, 2, \dots, 6$) は文献⁽¹²⁾, $p_{kij}^{(2)} = p_{kij}^{(2)}(s)$, $\gamma_{ij} = \gamma_{ij}(s)$ ($k = 1, 2, \dots, 6, i = 1, 2, j = 1, 2, \dots, 6$) は文献⁽⁵⁾ に示されており, $A_{ij} = A_{ij}(s, p)$ ($i = 1, 2, j = 1, 2, \dots, 6$) は境界条件より決定される未知関数である.

温度場解析と同様, Laplace 変換された混合境界条件式 (8) ~ (10) の第 2 式を考慮し, 新しい未知関数 $G_l(r, p)$ ($l = 1, 2, 3$) を次のように導入する⁽¹⁴⁾.

$$G_1(r, p) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial r} [u_{z1}^{(2)*}(r, 0, p) - u_{z2}^{(2)*}(r, 0, p)] & (a < r < b) \\ 0 & (0 \leq r \leq a, b \leq r < \infty) \end{cases} \quad (31)$$

$$G_2(r, p) = \begin{cases} r \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} [u_{r1}^{(2)*}(r, 0, p) - u_{r2}^{(2)*}(r, 0, p)] \right\} & (a < r < b) \\ 0 & (0 \leq r \leq a, b \leq r < \infty) \end{cases} \quad (32)$$

$$G_3(r, p) = \begin{cases} - \frac{\partial}{\partial r} [\phi_1^{(2)*}(r, 0, p) - \phi_2^{(2)*}(r, 0, p)] & (a < r < b) \\ 0 & (0 \leq r \leq a, b \leq r < \infty) \end{cases} \quad (33)$$

Laplace 変換された境界条件式 (11) を考慮し, 混合境界条件式 (8) ~ (10) の第 1 式を用いると, 未知関数 $G_l(\xi, p)$ ($l = 1, 2, 3$) に関する次の連立特異積分方程式が得られる.

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b \xi \{ [Z_{11}^\infty M_0^{(1)} + M_{11}] G_1(\xi, p) + M_{12} G_2(\xi, p) + [Z_{13}^\infty M_0^{(1)} + M_{13}] G_3(\xi, p) \} dt &= \sigma_{zz0}^* \\ \int_a^b \xi \{ M_{21} G_1(\xi, p) + [Z_{22}^\infty M_1^{(1)} + M_{22}] G_2(\xi, p) + M_{23} G_3(\xi, p) \} dt &= \sigma_{zr0}^* \\ \int_a^b \xi \{ [Z_{31}^\infty M_0^{(1)} + M_{31}] G_1(\xi, p) + M_{32} G_2(\xi, p) + [Z_{33}^\infty M_0^{(1)} + M_{33}] G_3(\xi, p) \} dt &= D_{z0}^* \end{aligned} \right\} (0 \leq r < c) \quad (34)$$

ここに、積分核 $M_1^{(1)} = M_1^{(1)}(\xi, r)$, $M_{kl} = M_{kl}(\xi, r)$ および既知定数 Z_{kl}^∞ ($k, l = 1, 2, 3$) は文献⁽⁹⁾と同様であり、 $\sigma_{zz0}^* = \sigma_{zz0}^*(r, p)$, $\sigma_{zr0}^* = \sigma_{zr0}^*(r, p)$, $D_{z0}^* = D_{z0}^*(r, p)$ は擾乱温度場に起因するき裂の無い FGPM 中の $z = 0$ 面における応力・電束密度成分であり、次式のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zz0}^* &= \int_0^\infty R_0 \left[\sum_{j=1}^6 p_{11j}^{(2)} d_{1j}^T + \sum_{j=1}^2 p_{11j}^{(1)} R_{1j} \right] J_0(sr) ds \\ \sigma_{zr0}^* &= \int_0^\infty R_0 \left[\sum_{j=1}^6 p_{21j}^{(2)} d_{1j}^T + \sum_{j=1}^2 p_{21j}^{(1)} R_{1j} \right] J_1(sr) ds \\ D_{z0}^* &= \int_0^\infty R_0 \left[\sum_{j=1}^6 p_{31j}^{(2)} d_{1j}^T - \sum_{j=1}^2 p_{31j}^{(1)} R_{1j} \right] J_0(sr) ds \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

ここに、 $d_{1j}^T = d_{1j}^T(s, p)$ ($j = 1, 2, \dots, 6$) は文献⁽¹²⁾の付録 3 と同様である。また、Laplace 変換された混合境界条件式 (8) ~ (10) の第 2 式より、次の補足の条件式が得られる。

$$\int_a^b G_l(\xi, p) d\xi = 0 \quad (l = 1, 2, 3) \quad (36)$$

特異積分方程式 (24), (34) および補足の条件式 (25), (36) を Gauss-Jacobi の数値積分公式⁽¹⁵⁾を用いて数値解析するために、解の特異性を考慮し、 $G_l(\xi, p)$ をなめらかな関数 $\Phi_l(\xi, p)$ ($l = 0, 1, 2, 3$) を用いて次のように置く。

$$G_l(\xi, p) = \frac{c\Phi_l(\xi, p)}{[(\xi - a)(b - \xi)]^{1/2}} \quad (l = 0, 1, 2, 3) \quad (37)$$

従って、き裂先端 $r = a, b$ での非定常応力拡大係数 $K_{I\eta}(t)$, $K_{II\eta}(t)$ および非定常電束密度拡大係数 $K_{D\eta}(t)$ ($\eta = a, b$) が次のように求まる。ここに、下添字 $\eta = a, b$ は $r = a, b$ のき裂先端を示す。

$$\left. \begin{aligned} K_{I\eta}(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} K_{I\eta}^*(p) \exp(pt) dp \\ K_{II\eta}(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} K_{II\eta}^*(p) \exp(pt) dp \\ K_{D\eta}(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} K_{D\eta}^*(p) \exp(pt) dp \end{aligned} \right\} (\eta = a, b) \quad (38)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} K_{Ia}^*(p) &= -(\pi c)^{1/2} [Z_{11}^\infty \Phi_1(a, p) + Z_{13}^\infty \Phi_3(a, p)] \\ K_{Ib}^*(p) &= (\pi c)^{1/2} [Z_{11}^\infty \Phi_1(b, p) + Z_{13}^\infty \Phi_3(b, p)] \\ K_{IIa}^*(p) &= -(\pi c)^{1/2} Z_{22}^\infty \Phi_2(a, p) \\ K_{IIb}^*(p) &= (\pi c)^{1/2} Z_{22}^\infty \Phi_2(b, p) \\ K_{Da}^*(p) &= -(\pi c)^{1/2} [Z_{31}^\infty \Phi_1(a, p) + Z_{33}^\infty \Phi_3(a, p)] \\ K_{Db}^*(p) &= (\pi c)^{1/2} [Z_{31}^\infty \Phi_1(b, p) + Z_{33}^\infty \Phi_3(b, p)] \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

5. 数値結果および考察

式 (38) に数値 Laplace 逆変換法⁽¹⁶⁾を適用し、き裂幅 $c/h = 0.5$, き裂中心半径 $(a + b)/2h = 1.0$ とした場合の無次元化された非定常応力拡大係数 $[K_{I\eta}(t), K_{II\eta}(t)]/\lambda_{330}T_0(\pi c)^{1/2}$, 非定常電束密度拡大係数 $K_{D\eta}(t)/p_{z0}T_0(\pi c)^{1/2}$ ($\eta = a, b$) の時間的挙動に及ぼす材料不均質性 βh , ωh , δh およびき裂位置 h_1/h の影響を解明する。 $z = 0$ 面における FGPM の材料定数は、 $c_{110} = 7.41 \times 10^{10}[\text{N/m}^2]$, $c_{330} = 8.36 \times 10^{10}[\text{N/m}^2]$, $c_{440} = 1.32 \times 10^{10}[\text{N/m}^2]$, $c_{120} = 4.52 \times 10^{10}[\text{N/m}^2]$, $c_{130} = 3.93 \times 10^{10}[\text{N/m}^2]$, $e_{310} = -0.16[\text{C/m}^2]$, $e_{330} = 0.347[\text{C/m}^2]$, $e_{150} = -0.138[\text{C/m}^2]$, $\epsilon_{110} = 0.825 \times 10^{-10}[\text{C/Vm}]$, $\epsilon_{330} = 0.903 \times 10^{-10}[\text{C/Vm}]$, $\lambda_{110} = 0.621 \times 10^6[\text{N/Km}^2]$, $\lambda_{330} = 0.551 \times 10^6[\text{N/Km}^2]$, $p_{z0} = -2.94 \times 10^{-6}[\text{CK}^{-1}\text{m}^{-2}]$ (セレン化カドミウム)⁽⁶⁾を用いた。また、熱伝導率に関しては $\kappa^2 = \kappa_{10}/\kappa_{30} = 1/1.5$ と仮定し、材料不均質性パラメータは一例として $\beta h = \omega h = \delta h$ とした。なお、Gauss-Jacobi の数値積分公式の分点は 40 点とし、積分核中の半無限区間積分に関する数値的評価は、 $0.2 \leq (h_1, h_2)/h$, $c/h = 0.5$ および $(a + b)/2h = 1.0$ のパラメータ範囲において十分な精度が得られていることを確認している。

まず、温度場および電気熱弾性場について検討する。図 2 は $\beta h = 1.0$, $h_1/h = 0.2$ とした場合のき裂面 ($z \rightarrow 0^\pm$) およびき裂面延長線上における無次元化された温度分布 $(T_i - T_I)/T_0$ ($i = 1, 2$) を示したグラフであり、 $F = t\lambda_0/c^2$ は Fourier 数である。温度は F の増大に伴い増大するが、き裂上下面の温度差およびき裂先端近傍の温度勾配は $F \approx 0.05$ 近傍で最も大となる。

Fig.2 The temperature on the crack faces and the crack extended line for $\beta h = 1.0$, $c/h = 0.5$, $h_1/h = 0.2$ and $(a + b)/2h = 1.0$.

図 3 は、図 2 の温度場に起因するき裂の無い FGPM

中の無次元化された熱応力成分 $\sigma_{zr0}/\lambda_{330}T_0$ を示したグラフであり、式 (35) で与えられる σ_{zr0}^* を Laplace 逆変換したものである。 $F = 0.05$ の値は、 $F \rightarrow \infty$ の静的値に対し、著しく大きな値となる。なお、式 (35) の応力・電束密度成分は物理的な意味を有さないが、重ね合わせを用いて解析する場合のき裂面負荷に相当するものである。

Fig.3 The stress component σ_{zr0} due to the temperature shown in Fig2.

次に、応力拡大係数および電束密度拡大係数の時間的挙動に及ぼす材料不均質性、幾何学的形状について検討する。図 4(a),(b),(c) は $h_1/h = 0.2$ とした場合の無次元化された応力・電束密度拡大係数の時間的挙動を βh をパラメータとして示したグラフである。破線が $\beta h = 1.0$ 、実線が $\beta h = 0.0$ 、点線が $\beta h = -1.0$ である。 $t \rightarrow \infty$ の静的値 $K_{\xi\eta}(\infty)$ ($\xi = I, II, D, \eta = a, b$) は前報⁽¹⁰⁾の結果に一致する。応力・電束密度拡大係数は、 F の増大に伴い増大し、それらの最大値 $K_{\xi\eta}^{max}$ に達した後減少し、静的値に漸近する。また、表 1 は応力・電束密度拡大係数の静的値に対する最大値の割合 $\Delta_{\xi\eta} = [|K_{\xi\eta}^{max}| - |K_{\xi\eta}(\infty)|]/|K_{\xi\eta}(\infty)|$ ($\xi = I, II, D, \eta = a, b$) を示したものである。 βh の増大に伴い、応力・電束密度拡大係数は減少するが、静的値に対する最大値の割合は増大する。

(a) $K_{Ia}(t)$ and $K_{Ib}(t)$

(b) $K_{IIa}(t)$ and $K_{IIb}(t)$

(c) $K_{Da}(t)$ and $K_{Db}(t)$

Fig.4 The effect of βh on the stress and electric displacement intensity factors .

Table 1 The values of $\Delta_{\xi\eta}$ and $\Delta_{\xi\eta}$ ($\xi = I, II, D, \eta = a, b$) in Fig.4.

Fig.	βh	Δ_{Ia}	Δ_{Ib}
4(a)	1.0	0.421	0.413
	0.0	0.220	0.192
	-1.0	0.115	0.081
4(b)	βh	Δ_{IIa}	Δ_{IIb}
	1.0	0.986	0.510
	0.0	0.662	0.246
4(c)	-1.0	0.440	0.105
	βh	Δ_{Da}	Δ_{Db}
	1.0	0.323	0.396
	0.0	0.151	0.188
	-1.0	0.059	0.079

図 5(a),(b),(c) は $\beta h = 1.0$ とした場合の無次元化された応力・電束密度拡大係数の時間的挙動を h_1/h をパラメータとして示したグラフである。破線が $K_{\xi\eta}(t)$ 、実線が $K_{\xi\eta}(t)$ ($\xi = I, II, D, \eta = a, b$) である。 $\beta h = 0.0, h_1/h = 0.5$ の場合、 $K_{I\eta}(t), K_{D\eta}(t)$ はき裂上下面の領域が反対称となるため零となる。しかし、 $\beta h = 1.0$ の場合、材料不均質性に起因する反対称の喪失のため、両者は零とならない。 $h_1/h = 0.7$ の場合、 $K_{I\eta}(t)$ が負となり、き裂は閉口するため物理的な意味を失うが、正の $K_{I\eta}$ を誘起する機械的電氣的

負荷が同時に作用する場合などの破壊挙動の解明には適用可能である。また、応力・電束密度拡大係数の絶対値は、 F の増大に伴い単調に増大しており、静的値が最大値となる。

(a) $K_{Ia}(t)$ and $K_{Ib}(t)$

(b) $K_{IIa}(t)$ and $K_{IIb}(t)$

(c) $K_{Da}(t)$ and $K_{Db}(t)$

Fig.5 The effect of h_1/h on the stress and electric displacement intensity factors.

6. 結 言

本報は、厚板に平行に存在する円環状き裂を有する傾斜機能圧電厚板の非定常特異電気熱弾性場を理論解析したものである。数値計算を行い、非定常応力・電束密度拡大係数の時間的挙動に及ぼす材料不均質性および幾何学的形状の影響を定量的に明らかにした。非

定常応力・電束密度拡大係数はこれらのパラメータに依存して大きく変化する。特に、き裂が温度変化を伴う面に近接する場合 ($h_1/h = 0.2$) には、非定常応力・電束密度拡大係数が静的値より 30~90 % 程度大きな最大値を示す。一方、 βh の増大は、これらの最大値を低下させるため有効であるが、静的値に対する最大値の割合が増大するため注意が必要であることなどを明らかにした。

文 献

- (1) Wu, C.M. et al., Piezoelectric Ceramics with Functional Gradients: A New Application in Material Design, *Journal of American Ceramics Society*, Vol.79 No.3(1996), pp.809-812.
- (2) Li, Chunyu., Weng, G.J., Antiplane Crack Problem in Functionally Graded Piezoelectric Materials, *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol.69 (2002), pp.481-488.
- (3) Ueda, S. et al., The Antiplane Vertical Crack Problem for a Functionally Graded Piezoelectric Strip with Surface Layers under Electromechanical Loading, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.70, No.692 (2004), pp.567-572. (in Japanese)
- (4) Ueda, S. et al., The Surface Crack Problem for a Piezoelectric Slab with Functionally Graded Properties, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.70, No.694 (2004), pp.865-871. (in Japanese)
- (5) Ueda, S. et al., Electroelastic Response of a Parallel Crack in a Functionally Graded Piezoelectric Strip, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.72, No.716 (2006), pp.520-526. (in Japanese)
- (6) Ashida, F., Tauchert, T.R., Transient Response of a Piezothermoelastic Circular Disk Under Axisymmetric Heating, *Acta Mechanica*, Vol.128 (1998), pp.1-14.
- (7) Ueda, S., Kondo, H., Thermoelastoelectric Response of a Parallel Crack in a Functionally Graded Piezoelectric Strip, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.72, No.722 (2006), pp.1503-1510. (in Japanese)
- (8) Ueda, S., Takaki, T., Thermoelastoelectric Response of a Symmetric Functionally Graded Piezoelectric Slab with a Crack Parallel to the Boundaries, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.72, No.720 (2006), pp.1177-1184. (in Japanese)
- (9) Ueda, S. et al., Thermoelastomechanical Response of a Penny-Shaped Crack in a Functionally Graded Piezoelectric Strip, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.73, No.728 (2007), pp.506-513. (in Japanese)
- (10) Ueda, S., Nishimura, N., A Functionally Graded Piezoelectric Strip with an Annular Crack under Thermoelastoelectric Loadings, *Transactions of the*

- Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.74, No.744 (2008), pp1142-1149. (in Japanese)
- (11) Ueda, S., Kondo, H., Thermoelectroelastic Response of a Functionally Graded Piezoelectric Strip Containing a Crack Parallel to the Free Boundaries, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.72, No.722 (2006), pp1503-1510. (in Japanese)
- (12) Ueda, S., et al., Transient Thermoelectroelastic Response of a Functionally Graded Piezoelectric Strip with a Penny-Shaped Crack, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.73, No.733 (2007), pp.1013-1020. (in Japanese)
- (13) Sneddon, I.N., Lowengrub, M., *Crack Problems in the Classical Theory of Elasticity*, (1969), John Wiley & Sons, Inc., New York.
- (14) Erdogan, F., Wu, B.H., Crack problems in FGM Layers under Thermal Stresses, *Journal of Thermal Stresses*, Vol.19 (1996), pp.237-265.
- (15) Erdogan, F. et al., *Methods of Analysis and Solution of Crack Problems*, (Edited by Sih, G.C) (1972), Noordhoff, Leyden.
- (16) Miller, M.K., Guy, W.T., Numerical Inversion of the Laplace Transform by Use of Jacobi Polynomials, *SIAM Journal of Numerical Analysis*, Vol.3, No.4 (1996), pp.624-635.
- (17) Wang, B.L., Mai, Y.W., Impermeable Crack and Permeable Crack Assumptions, Which One Is More Realistic? *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol.71 (2004), pp.575-578.
- (18) Ueda, S. et al., Effects of Crack Surface Conductance on Intensity Factors for a Functionally Graded Piezoelectric Material under Thermal Load, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.72, No.724 (2006), pp2066-2073. (in Japanese)