ひずみ応答を用いたモード形状計測に基づく
はり構造の損傷位置推定*荒 川 亮^{*1}, 渋谷 嗣^{*2}Prediction of Damage Position in Beam Structures Based on
Measurement of the Mode Shape from Strain ResponseRyo ARAKAWA^{*3} and Yotsugi SHIBUYA^{*3} Department of Mechanical Engineering, Akita University,
1-1 Tegata Gakuen-machi, Akita-shi, Akita, 010-8502 Japan

To detect damage at possible stage is important in aerospace and other mechanical engineering industries. Damages in a structure change its dynamic behavior such as natural frequencies, damping and mode shapes. Vibration analysis of a beam is made to estimate the mode shape from measuring strain response under impulse loads. The analysis is illustrative of the validity of the mode shape from experimental strain response of a beam. As an experimental validation, cantilever beams with damage are tested. The damage is modeled as a notch. Continuous wavelet transform is applied to the mode shape which is estimated by strain response under impulse loads. Position of the damage is shown as a negative peak of the wavelet transform. The identified positions of damage are very close to the actual positions of damage except for existing damage near free edge of the beam.

Key Words: Nondestructive Inspection, Smart Structure, Damage Evaluation, Bending, Transient Response, Mode Shape, Wavelet Transform

1. 結 言

航空機や機械構造物において、損傷を早期に検出するためのヘルスマモニタリングが重要である。これまで、スマート構造として光ファイバセンサ⁽¹⁾、圧電センサ⁽²⁾、赤外線温度センサ⁽³⁾などを用いた監視システムが提案されている。

構造の広い領域を対象とする場合、振動応答によるヘルスマモニタリングが有効であり、そのレビューも示されている⁽⁴⁾。振動応答によるヘルスマモニタリング手法には衝撃応答⁽⁵⁾によるものや固有モード振動特性⁽⁶⁾から損傷を検出するものがある。また、振動応答から損傷の特徴を抽出するために、ニューラルネットワーク⁽⁷⁾、ファジィパターン認識⁽⁸⁾、ウェーブレット解析⁽⁹⁾やそれらを組み合わせた解析⁽¹⁰⁾が試みられている。

多くの場合、加速度センサが用いられ⁽⁷⁾⁽¹¹⁾、小さな振動応答を検出するためにはセンサの質量や外乱

の影響が無視できないと考えられる。

本研究では、振動モード形状が構造固有の特性であることや、ひずみ計測にセンサの質量が小さいひずみゲージなどが利用可能であることに着目し、はり構造を対象として構造中の1つのセンサを用いて得られるひずみ応答からモード形状を推定することによって、損傷の位置を同定する手法について検討を行った。ひずみ応答から推定されるモード形状の妥当性を確認するために、はりの振動に関するひずみ応答を解析し、フーリエ変換の一次ピーク値から推定したモード形状と固有値問題の一次モード関数が対応することを示した。

損傷を模擬した切欠を有する片持はりの実験において、一連の衝撃ひずみ応答のフーリエ変換に関する一次モードピーク値を用いてはりのモード形状の計測を行った。はりのモード形状におよぼす損傷位

Fig. 1 A uniform beam subjected to distributed load $p(x, t)$

* 原稿受付 2008 年 7 月 25 日.

^{*1} 正員, 秋田大学大学院工学資源学研究科(〒010-8502 秋田市手形学園町 1-1).

^{*2} 正員, 秋田大学工学資源学部.

E-mail: d9508005@wm.akita-u.ac.jp

置の影響を明らかにするために、計測されたモード形状に対して連続ウェーブレット変換を適用した。その結果、はりの損傷位置とウェーブレット変換のピークとの対応から損傷位置の同定が可能であることを明らかにした。

2. はりの振動応答解析

2・1 はりの運動方程式

はりの衝撃ひずみ応答からモード形状を求めるために、図1のような厚さ h の一様なはりのモデルを考える。解析には、中立軸を x とする x - z 座標系を用いる。分布荷重 $p(x, t)$ が作用しているとき、はりの運動方程式は次のように表すことができる⁽¹²⁾。

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + d_i \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} + d_e \frac{\partial w}{\partial t} = p(x, t) \quad (1)$$

ただし、 E は縦弾性係数、 I は断面二次モーメント、 ρ は質量密度、 A は断面積、 w は z 方向のたわみである。また、 d_i は内部減衰係数、 d_e は外部減衰係数である。

関数 $f(x)$ のフーリエ変換を以下のように定義する。

$$f^*(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2)$$

式(1)をフーリエ変換すると次のようになる。

$$(1+i\alpha_i\omega) \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^4} - (\beta^2 \omega^2 - i\alpha_e \omega) w^* = q^*(x, \omega) \quad (3)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i &= \frac{d_i}{EI}, & \alpha_e &= \frac{d_e}{EI} \\ \beta^2 &= \frac{\rho A}{EI}, & q^*(x, \omega) &= \frac{p^*(x, \omega)}{EI} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式(3)の同次方程式を次のように表す。

$$(1+i\alpha_i\omega) \frac{\partial^4 w_1^*}{\partial x^4} - (\beta^2 \omega^2 - i\alpha_e \omega) w_1^* = 0 \quad (5)$$

同次方程式の解 w_1^* は、次のように書くことができる。

$$w_1^* = c_1 e^{\gamma_1 x} + c_2 e^{\gamma_2 x} + c_3 e^{\gamma_3 x} + c_4 e^{\gamma_4 x} \quad (6)$$

ただし、 $c_i (i=1 \sim 4)$ は未知定数である。また、 $\gamma_i (i=1 \sim 4)$ は次式の4つの複素根である。

$$\gamma^4 = \frac{\beta^2 \omega^2 - i\alpha_e \omega}{1+i\alpha_i \omega} \quad (7)$$

次に、長さ l の片持はりについて考える。片持りは原点 $x=0$ において固定され、位置 x_i に瞬間集中荷重が作用するものとする。集中荷重を式で表すと次のようになる。

$$p(x, t) = p_0 \delta(t) \delta(x - x_i) \quad (8)$$

ただし、 p_0 は集中荷重の強さ、 $\delta(\cdot)$ はDiracのデルタ関数である。集中荷重に対し、時間に関してフーリエ変換を適用し、座標 x に関してフーリエ級数展開すると、次のように示すことができる。

$$p^*(x, \omega) = 2p_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x_i}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (9)$$

式(4)を考慮して、式(3)に上式を代入すると以下のようになる。

$$\begin{aligned} (1+i\alpha_i\omega) \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^4} - (\beta^2 \omega^2 - i\alpha_e \omega) w^* \\ = 2q_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{n\pi x_i}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \end{aligned} \quad (10)$$

ただし、

$$q_0 = \frac{p_0}{EI} \quad (11)$$

式(10)の特解 w_2^* は次のように求めることができる。

$$w_2^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2q_0 \sin \frac{n\pi x_i}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}}{(1+i\alpha_i\omega) \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 - (\beta^2 \omega^2 - i\alpha_e \omega)} \quad (12)$$

式(10)の一般解は式(6)と上式の和として、以下のように書くことができる。

$$\begin{aligned} w^* &= c_1 e^{\gamma_1 x} + c_2 e^{\gamma_2 x} + c_3 e^{\gamma_3 x} + c_4 e^{\gamma_4 x} \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2q_0 \sin \frac{n\pi}{l} x_i \sin \frac{n\pi}{l} x}{(1+i\alpha_i\omega) \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 - (\beta^2 \omega^2 - i\alpha_e \omega)} \end{aligned} \quad (13)$$

2・2 モード形状

片持はりのモード形状を得るために、以下の境界条件のもとで未知定数 $c_i (i=1 \sim 4)$ を決定する。

$$\left. \begin{aligned} w|_{x=0} &= 0, & \frac{dw}{dx}|_{x=0} &= 0 \\ \frac{d^2 w}{dx^2}|_{x=l} &= 0, & \frac{d^3 w}{dx^3}|_{x=l} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式(13)を境界条件に代入すると、未知定数 $c_i (i=1 \sim 4)$ に関する次の連立方程式を導くことができる。

$$Kc = p \quad (15)$$

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ \gamma_1^2 e^{\gamma_1 l} & \gamma_2^2 e^{\gamma_2 l} & \gamma_3^2 e^{\gamma_3 l} & \gamma_4^2 e^{\gamma_4 l} \\ \gamma_1^3 e^{\gamma_1 l} & \gamma_2^3 e^{\gamma_2 l} & \gamma_3^3 e^{\gamma_3 l} & \gamma_4^3 e^{\gamma_4 l} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$c = \{c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4\}^T \quad (17)$$

$$p = \{0 \quad \bar{p}_2 \quad 0 \quad \bar{p}_4\}^T \quad (18)$$

ここで、

$$\bar{p}_2 = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2q_0 \left(\frac{n\pi}{l} \right) \sin \frac{n\pi x_i}{l}}{(1+i\alpha_i\omega) \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 - (\beta^2 \omega^2 - i\alpha_e \omega)} \quad (19)$$

Fig. 2 Comparison between mode shape estimated from strain response and mode function

$$\bar{p}_4 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2q_0 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^3 \sin \frac{n\pi x_i}{l} \cos n\pi}{(1 + i\alpha_i \omega) \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 - (\beta^2 \omega^2 - i\alpha_e \omega)} \quad (20)$$

はりのたわみ振動におけるひずみ応答からモード形状を求めるために、はり表面におけるひずみ応答について検討する。はり表面 $z = -h/2$ における垂直ひずみ ε_x のフーリエ変換を次のように表す。

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^*(x, \omega) &= \frac{h}{2} \frac{d^2 w^*}{dx^2} \\ &= \frac{h}{2} [(\gamma_1^2 c_1 e^{\gamma_1 x} + \gamma_2^2 c_2 e^{\gamma_2 x} + \gamma_3^2 c_3 e^{\gamma_3 x} + \gamma_4^2 c_4 e^{\gamma_4 x}) \\ &\quad - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2q_0 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{n\pi x_i}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}}{(1 + i\alpha_i \omega) \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 - (\beta^2 \omega^2 - i\alpha_e \omega)}] \quad (21) \end{aligned}$$

上式は、 x_i の位置に衝撃荷重を与えたときのはりの位置 x におけるひずみ応答に関する角振動数 ω の成分を表している。ここで、角振動数を変えてフーリエ変換のピークを調べることで、はりの固有角振動数を求めることができる。ひずみセンサを取り付けることで、はりの応答を求めることができるので、ひずみセンサの位置を x_g とする。センサ位置におけるひずみ応答の固有振動成分は式(21)において $x = x_g$ として、固有角振動数を与えることで評価することができる。衝撃荷重を与える位置を変えてひずみ応答を得ることによって、はりのモード形状推定法を検証する。

推定したモード形状を確認するために、固有値問題の解と比較する。片持はりの i 次モードの固有角振動数 ω_i とモード関数 W_i は次のように与えられている⁽¹³⁾。

$$\left. \begin{aligned} \omega_i &= \left(\frac{a_i}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \\ W_i &= \frac{\cosh a_i x - \cos a_i x}{\cosh a_i l + \cos a_i l} - \frac{\sinh a_i x - \sin a_i x}{\sinh a_i l + \sin a_i l} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

ただし、 a_i は片持はりの場合には各モードに対して $a_i =$

Fig. 3 Effect of position of strain measurement on the mode shape

1.875, $a_2 = 4.694$, $a_3 = 7.855 \dots$ をとる。

ひずみ応答からモード形状を推定した結果を次に示す。一次固有角振動数における式(21)のひずみ応答のフーリエ変換の値を衝撃荷重位置を変えて図2に□印で示している。また、実線は式(22)に示した一次モードのモード関数である。また、ひずみ応答を得た位置は、正規化した座標において $x/l = x_g/l = 0.13$ である。図に示した結果ははりの中央 $x/l = 0.5$ における値 ε_{xc}^* と W_{1c} を用いて縦軸をそれぞれ正規化して示している。計算に用いた減衰係数は実験と合うように定め、 $\alpha_i = 4.2 \times 10^{-2} s$, $\alpha_e l^4 = 1.8 \times 10^{-3} s$ とした。ひずみ応答から得られる形状は一次モードのモード関数とよく一致し、はりのひずみ応答から実験的にモード形状の計測が可能であることを推察することができる。

次に、センサ位置のモード形状に対する影響について検討を行う。図3は図2と同様にフーリエ変換されたひずみ応答について、調べるひずみ応答の位置を変えて示している。図で実線は $x_g/l = 0.78$ 、破線は $x_g/l = 0.50$ 、一点鎖線は $x_g/l = 0.13$ の場合である。正規化していることもあり、位置 x_g/l が 0.50, 0.78 のものは 0.50 から自由端に向かって 0.13 の場合と異なっている。特に 0.78 では、センサ位置付近から違いが現れていることがわかる。これらのことから、ひずみセンサを設置する場合には大きなひずみ応答を取得しやすい固定端に近い方が有利である。

3. モード形状計測

3・1 実験方法 実験は微小な鋼球で片持はりに衝撃を加え自由振動を発生させた。片持はりの寸法は、長さ $l = 179 \text{ mm}$ 、幅 $b = 30 \text{ mm}$ 、厚さ $h = 3 \text{ mm}$ である。損傷を模擬して、試料に幅 $a = 8 \text{ mm}$ 、深さ $d = 1.5 \text{ mm}$ の溝を作成した。試料の材質はアクリル樹脂とした。図4は損傷の位置 x_d/l が 0.39、衝撃位置 x_i/l が 0.61 の場合について、ひずみセンサの位置 x_g/l が 0.13 における衝撃ひず

Fig. 4 Fourier transform of the uniform cantilever beam

み応答のフーリエ変換を一次モードのピーク値で正規化して示している。一次振動数、二次振動数におけるピークはそれぞれ29Hz、188Hzに現れている。

3・2 モード形状の推定 衝撃ひずみ応答の計測から、はりのモード形状の計測を行う。図5に損傷がないはりについて、図2と同様な方法で実験から得たひずみ応答と一次のモード関数を比較して示している。□印はひずみ応答であり、横軸は衝撃位置、縦軸がフーリエ変換の一次ピークの値に対応している。また、○印は片持はりにおける固定端を示している。破線は一次モードのモード関数であり、実験結果と比較するために参考として示している。実線は実験結果を三次スプライン関数で補間し、自由端側を滑らかに直線で外挿したものである。この実験結果は自由端付近でばらつく傾向があるが、一次モードのモード関数とよく一致していることから、実験的にも、ひずみ応答からはりのモード形状計測が可能であると考えられる。

なお、実験結果の補間については、データのばらつきがある自由端側の2つのデータを除いて、□印のデータに固定端の○印を加えて行った。補間の点数を N として、図においては $N=30$ のデータを扱った。

図6は損傷が $x_d/l=0.39$ の位置にある場合について、モード形状の計測結果とその補間曲線を図5と同様の方法で示したものである。この図からモード形状に対して、損傷に対応するモード形状の変化を見ることができる。

4. 損傷同定

4・1 連続ウェーブレット解析 構造に損傷がある場合、損傷位置では剛性が低下し、モード形状は損傷の位置で変化が生じる。連続ウェーブレット変換によって、損傷により生じたモード形状の変化を抽出し、損傷を同定する。関数 $f(x)$ の連続ウェーブレット変換 $W_f(b,s)$ を以下のように定義する。

$$W_f(b,s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \psi\left(\frac{x-b}{s}\right) dx \quad (23)$$

Fig. 5 Comparison between experimental mode shape and mode function of the uniform beam

Fig. 6 Measured first mode shape of the beam with damage at $x_d/l=0.39$

ここで、 $\psi(x)$ はマザー・ウェーブレット、 s はスケールパラメータ、 b はシフトパラメータである。

連続ウェーブレット変換におけるマザー・ウェーブレットはいくつか提案されているが、モード形状から損傷の影響による高次の成分を抽出するために4次のGaussian マザー・ウェーブレットを採用する⁽¹¹⁾。そのマザー・ウェーブレットは次のように表される。

$$\psi(x) = (-1)^4 (3 - 12x^2 + 4x^4) e^{-x^2} \frac{4\sqrt{2/\pi}}{\sqrt{105}} \quad (24)$$

このマザー・ウェーブレットは $x=0$ に対して対称となる関数である。また、次の関係式を満たしている。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \psi(x) dx = 0 \quad (k=0,1,2,3) \quad (25)$$

マザー・ウェーブレットの対称性と上式から、この連続ウェーブレット変換は反対称成分と低次の成分を除去する性質を有することが分かる。

4・2 損傷同定 はりのモード形状を連続ウェーブレット変換して、損傷位置の抽出を行った。連続ウェーブレット変換において端の影響を避けるために、両端から外側に関してはモード形状を滑らかに直線で外挿した。図7は図2に実線で示した一次モードのモード関数を連続ウェーブレット変換したも

Fig. 7 Wavelet transform of first mode function from eigen problem

Fig. 8 Wavelet transform of experimental first mode shape of the uniform beam

Fig. 9 Wavelet transform of experimental first mode shape of the beam with damage at $x_d/l = 0.39$

のである。図より $x/l = 0.11$ の位置で下に凸のピークがあるが、全体的にはほぼ平坦な結果である。図8は図5に実線で示した一次モード形状の補間曲線を連続ウェーブレット変換したものである。モード形状の補間に用いるデータ数 N は30とした。実験と解析の結果を比較すると、実験の方が多少のうねりが生じている。これは実験の測定誤差によるものと考えられるが、実験結果と解析結果の特性はほぼ同様の傾向を示している。

はりの損傷がモード形状の連続ウェーブレット変換に及ぼす影響について検討する。図9は損傷位置 x_d/l が0.39の場合のモード形状に関するウェーブレット変換を示したものである。これは、図6に示した実験から得ら

Fig. 10 Effect of number of interpolation points on the wavelet transform of experimental mode shape

れたモード形状に関して $N = 30$ とした補間曲線を連続ウェーブレット変換したものである。結果は上下に凸のピークが現れているが、この中で、損傷位置の近くに下に凸の大きなピークが現れている。そのピークの位置は $x/l = 0.39$ であり、損傷位置とほぼ同じである。その他の大きなピークは、ほとんど上に凸として現れている。

次に、モード形状の補間に用いるデータ数 N について検討を行う。図10は図6に示したモード形状について、補間のデータ数 N を変えてウェーブレット変換結果 W_f を示している。ここで、損傷位置 x_d/l は図9と同じ0.39である。図で実線は $N = 30$ 、破線は $N = 15$ 、一点鎖線は $N = 8$ 、二点鎖線は $N = 4$ の場合である。ただし、正規化したシフトパラメータ s/l は0.2とした。この図より、 $N = 4$ では実際の損傷の位置と異なる場所に下に凸のピークが現れているが、 $N = 8$ から30では N の値を変えても下に凸のピークがいずれも損傷に近い位置で現れていることが分かる。このことから、一次モード形状の補間曲線を求める場合において補間は少ないデータ数を用いても影響が小さいことがわかった。

損傷の位置を変えた場合について示す。図11は $x_d/l = 0.27, 0.39, 0.50, 0.78$ の位置にそれぞれ損傷を有するはりの連続ウェーブレット変換の結果を示している。下に凸のピークは損傷に対応する位置に現れている。いずれのピークも損傷の位置に近いことから、これらの下に凸のピークが損傷を反映したものと考えられる。

ウェーブレット変換が下に凸になるということは、シフトパラメータ b の変化に対して負の極値を持つことを意味している。4次のGaussianマザー・ウェーブレットを使うと、式(25)に示すように3次までのモーメントは0となる。また、マザー・ウェーブレットが偶関数なので、奇数次の高次オーダーも0となる。したがって、モード形状をシフトパラメータ b の近傍でテーラー展開すると、4次以上の偶数次項のみが意味を持つ。したがって、寄与が大きい4次の項の係数がモード形状の変化によって損傷位置において負の極値を持つことに対応している。

Fig. 11 Relation between damage position and wavelet transform for the scale parameter $s/l=0.2$

これより、損傷によるモード形状の変化が下に凸のピークとして損傷位置推定を可能にすると考えられる。

連続ウェーブレット変換において下に凸のピーク位置から損傷を同定した結果について図 12 に示している。ここで、図は縦軸に同定した損傷の位置 d_e を、横軸に実際の損傷位置 x_d をはりの長さ l でそれぞれ正規化している。また、図中の口印は損傷位置の同定結果を示しており、実線は理想的な場合であり、実線からのずれが誤差に対応している。この図より、実験で得られた損傷位置の同定結果と実際の損傷の位置が $x_d/l=0.27$ から 0.83 の範囲で、ほぼ一致していることがわかる。しかしながら、それより自由端側の損傷では、推定結果と実際の損傷位置との差が生じている。これは自由端側の衝撃において、モード形状の実験結果にもばらつきがあることから推測できる。

5. 結 言

ひずみ応答を用いたモード形状計測に基づくはり構造の損傷推定を行った。得られた主要な結果をまとめると次のようになる。

1. ひずみ応答から得られる一次モードのモード形状はモード関数とよく一致し、はりのひずみ応答から実験的にモード形状の計測が可能であることを示した。
2. 損傷を有するはりのモード形状には、損傷に対応する変化を確認することができる。また、モード形状の連続ウェーブレット変換には損傷位置の近傍に下に凸のピークが現れる。
3. 片持はりの実験において損傷の同定結果と実際の損傷の位置がはりの端付近を除いて、ほぼ一致する結果を得た。

文 献

- (1) Kuang, K.S.C. and Cantwell, W.J., Use of Conventional Optical Fibers and Fiber Bragg Gratings for Damage

Fig. 12 Comparison between identified damage position d_e and actual damage position x_d

Detection in Advanced Composite Structures: A Review, *Applied Mechanics Reviews*, Vol.56 (2007), pp.493-512.

- (2) Bhalla, S. et al., Wave Propagation Approach for NDE Using Surface Bonded Piezoceramics, *NDT&E International*, Vol.38 (2005), pp.143-150.
- (3) Shiratori, M. et al., Application of Infrared Thermography to Detection of Flaws in Honeycomb Sandwich Constructions, *JSME International Journal, Series. A*, Vol.37 (1994), pp.396-402.
- (4) Zou, Y. et al., Vibration-Based Model-Dependent Damage (Delamination) Identification and Health Monitoring for Composite Structures – A Review, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.230 (2000), pp.357-378.
- (5) Sophia, H. and Karolos, G., Damage Detection Using Impulse Response, *Nonlinear Analysis*, Vol.30 (1997), pp.4757-4764.
- (6) Valdes, S.H.D. and Soutis, C., Delamination Detection in Composite Laminates from Variations of Their Modal Characteristics, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.228 (1999), pp.1-9.
- (7) Agosto, J.F. et al., Neural Network Based Nondestructive Evaluation of Sandwich Composites, *Composites: Part B*, Vol.39 (2008), pp.217-225.
- (8) Taha, R.M.M. and Lucero, J., Damage Identification for Structural Health Monitoring Using Fuzzy Pattern Recognition, *Engineering Structures*, Vol.27 (2005), pp.1774-1783.
- (9) Yan, Y.J. and Yam, L.H., Detection of Delamination in Composite Plates Using Energy Spectrum of Structural Dynamic Responses Decomposed by Wavelet Analysis, *Computers and Structures*, Vol.82 (2004), pp.347-358.
- (10) Yam, L.H. et al., Vibration-Based Damage Detection for Composite Structures Using Wavelet Transform and Neural Network Identification, *Composite Structures*, Vol.60 (2003), pp.403-412.
- (11) Rucka, M. and Wilde, K., Application of Continuous Wavelet Transform in Vibration Based Damage Detection Method for Beams and Plates, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.297 (2006), pp.536-550.
- (12) Kang, B., Transfer Functions of One-Dimensional Distributed Parameter Systems by Wave Approach, *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol.129 (2007), pp.193-201.
- (13) Timoshenko, S. and Young, D.H., *Vibration Problems in Engineering*, 3rd Ed., (1955), pp.324-338, D. Van Nostrand Company.