2 個の平行な円板状あるいは円環状き裂を有する
傾斜機能圧電厚板の電気弾性応答*上田 整^{*1}, 五百川 達^{*2}, 西村 直樹^{*3}

Two Parallel Penny-Shaped or Annular Cracks in a Functionally Graded Piezoelectric Strip Under Electric Loading

Sei UEDA^{*4}, Tohru IOGAWA and Naoki NISHIMURA^{*4} Department of Mechanical Engineering, Osaka Institute of Technology,
5-16-1 Omiya, Asahi-ku, Osaka-shi, Osaka, 535-8585 Japan

In this paper, the mixed-mode fracture problem of two penny-shaped or annular cracks in a functionally graded piezoelectric material (FGPM) strip is considered. It is assumed that the electroelastic properties of the strip vary continuously along the thickness of the strip, and that the strip is under electric loading. The crack faces are supposed to be insulated electrically. The problem is formulated in terms of a system of singular integral equations, which are solved numerically. Numerical calculations are carried out, and the stress and electric displacement intensity factors are presented for various values of dimensionless parameters representing the crack size, the crack location, and the material nonhomogeneity. It can be found that the normalized intensity factors are under the great influence of the geometric parameters and the effect of the material nonhomogeneity on the intensity factors depends on the geometric parameters.

Key Words: Stress Intensity Factor, Electric Displacement Intensity Factor, Elasticity, Fracture Mechanics, Functionally Graded Piezoelectric Materials, Integral Transform, Annular Crack, Penny-Shaped Crack, Electric Loading

1. 緒 言

近年, 圧電材料に傾斜機能材料 (FGM) の概念を適用した傾斜機能圧電材料 (FGPM) が注目されており⁽¹⁾, それらの健全性評価を目的とした電気弾性破壊力学に関する理論的研究が精力的に進められている^{(2)~(10)}. 一方, 材料内には多数のき裂が存在し, それらの相互干渉により破壊にいたると考えられる. 従って, き裂間相互干渉の影響を解明することも重要であり, 平行き裂^{(11),(12)}, 共線等長き裂⁽¹³⁾を対象とした均質圧電材料に関する研究は報告されているが, FGPM を対象とした研究は無いのが現状である.

そこで本報では, 自由表面に平行な 2 個の円板状あるいは円環状き裂を有する傾斜機能圧電厚板を考え, 電氣的負荷が作用する場合の応力・電束密度拡大係数を理論解析した. 解析には Hankel 変換法⁽¹⁴⁾を用い, 問題の解の特異積分方程式の解に帰着して解く方法を

採用した⁽¹⁵⁾. 数値解析には Gauss-Jacobi の数値積分公式⁽¹⁶⁾を用い, 応力・電束密度拡大係数に及ぼす幾何学的形状および材料不均質性の影響を明らかにした.

2. 問題の設定と基礎式

Fig.1 Geometry of the crack problem in a functionally graded piezoelectric strip.

図 1 に示す円筒座標系 (r, θ, z) において, 厚さ $h = h_1 + h_2$ の z 軸方向に傾斜組成された圧電厚板を考え, z

* 原稿受付 2008 年 11 月 20 日.

^{*1} 正員, 大阪工業大学工学部 (〒535-8585 大阪市旭区大宮 5-16-1).

^{*2} 学正員, 大阪工業大学大学院工学研究科.

^{*3} 正員, アイシン精機(株) (〒448-8650 刈谷市朝日町 2-1).

E-mail: ueda@med.oit.ac.jp

軸の正の向きを分極方向とする。 $z = \pm h_0$ 面上に内半径が a_i 、外半径が b_i である幅 $2c_i = b_i - a_i$ ($i = 1, 2$) の 2 個の円環状き裂が自由表面に平行に存在するものとする。なお、 $a_i = 0$ ($i = 1, 2$) とした場合、円板状き裂となる。き裂面は、電気的に絶縁されているものとし^{(17),(18)}、 z 軸の正の向きに一様電束密度 D_0 が作用する軸対称問題を設定する。以後、下添字 r, θ, z は座標軸方向を表し、 $i = 0, 1, 2$ はそれぞれ $-h_0 \leq z \leq h_0$, $h_0 \leq z \leq h_1$, $-h_2 \leq z \leq -h_0$ の領域を示す。

FGPM の材料特性変化が z 軸方向に指数関数的であると仮定すれば、材料特性は次式で表される。

$$(c_{kl}, e_{kl}, \varepsilon_{kk}) = (c_{kl0}, e_{kl0}, \varepsilon_{kk0}) \exp(\beta z) \quad (-h_2 \leq z \leq h_1) \quad (1)$$

ここに、 $c_{kl}(z)$ は弾性定数、 $e_{kl}(z)$ は圧電定数、 $\varepsilon_{kk}(z)$ は誘電定数である。また、 β は材料の不均質性を表す正または負の定数であり、下添字 0 で $z = 0$ 面における各材料特性を示す。

変位ベクトルの成分を $u_{\eta i} = u_{\eta i}(r, z)$ 、静電ポテンシャルを $\phi_i = \phi_i(r, z)$ 、とすると、応力テンソルの成分 $\sigma_{\eta\eta i} = \sigma_{\eta\eta i}(r, z)$ 、 $\sigma_{zri} = \sigma_{zri}(r, z)$ および電束密度ベクトルの成分 $D_{\eta i} = D_{\eta i}(r, z)$ ($\eta = r, \theta, z$, $i = 0, 1, 2$) は、次のように与えられる⁽⁹⁾。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rri} &= c_{11} \frac{\partial u_{ri}}{\partial r} + c_{12} \frac{u_{ri}}{r} + c_{13} \frac{\partial u_{zi}}{\partial z} + e_{31} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \\ \sigma_{\theta\theta i} &= c_{12} \frac{\partial u_{ri}}{\partial r} + c_{11} \frac{u_{ri}}{r} + c_{13} \frac{\partial u_{zi}}{\partial z} + e_{31} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \\ \sigma_{zzi} &= c_{13} \frac{\partial u_{ri}}{\partial r} + c_{13} \frac{u_{ri}}{r} + c_{33} \frac{\partial u_{zi}}{\partial z} + e_{33} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \\ \sigma_{zri} &= c_{44} \left(\frac{\partial u_{zi}}{\partial r} + \frac{\partial u_{ri}}{\partial z} \right) + e_{15} \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \\ D_{ri} &= e_{15} \left(\frac{\partial u_{zi}}{\partial r} + \frac{\partial u_{ri}}{\partial z} \right) - \varepsilon_{11} \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \\ D_{zi} &= e_{31} \frac{\partial u_{ri}}{\partial r} + e_{31} \frac{u_{ri}}{r} + e_{33} \frac{\partial u_{zi}}{\partial z} - \varepsilon_{33} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (i = 0, 1, 2) \quad (2)$$

変位および静電ポテンシャルに関する場の平衡方程式は

$$\begin{aligned} &c_{440} \left(\frac{\partial^2 u_{zi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{zi}}{\partial r} \right) + c_{330} \frac{\partial^2 u_{zi}}{\partial z^2} + (c_{130} + c_{440}) \\ &\times \left(\frac{\partial^2 u_{ri}}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{ri}}{\partial z} \right) + e_{150} \left(\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \right) \\ &+ e_{330} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial z^2} + \beta \left[c_{130} \left(\frac{\partial u_{ri}}{\partial r} + \frac{u_{ri}}{r} \right) \right. \\ &\left. + c_{330} \frac{\partial u_{zi}}{\partial z} + e_{330} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right] = 0 \quad (i = 0, 1, 2) \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &c_{110} \left(\frac{\partial^2 u_{ri}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{ri}}{\partial r} - \frac{u_{ri}}{r^2} \right) + c_{440} \frac{\partial^2 u_{ri}}{\partial z^2} \\ &+ (c_{130} + c_{440}) \frac{\partial^2 u_{zi}}{\partial r \partial z} + (e_{310} + e_{150}) \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial r \partial z} \\ &+ \beta \left[c_{440} \left(\frac{\partial u_{ri}}{\partial z} + \frac{\partial u_{zi}}{\partial r} \right) + e_{150} \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \right] = 0 \quad (i = 0, 1, 2) \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &e_{150} \left(\frac{\partial^2 u_{zi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{zi}}{\partial r} \right) + e_{330} \frac{\partial^2 u_{zi}}{\partial z^2} + (e_{150} + e_{310}) \\ &\times \left(\frac{\partial^2 u_{ri}}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{ri}}{\partial z} \right) - \varepsilon_{110} \left(\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \right) \\ &- \varepsilon_{330} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial z^2} + \beta \left[e_{310} \left(\frac{\partial u_{ri}}{\partial r} + \frac{u_{ri}}{r} \right) \right. \\ &\left. + e_{330} \frac{\partial u_{zi}}{\partial z} - \varepsilon_{330} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right] = 0 \quad (i = 0, 1, 2) \quad (5) \end{aligned}$$

また、電気弾性場に関する境界条件式は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zz0}(r, \theta_{0i}) &= 0 \quad (a_i < r < b_i) \\ u_{z0}(r, \theta_{0i}) &= u_{zi}(r, \theta_{0i}) \quad (0 \leq r \leq a_i, b_i \leq r < \infty) \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2) \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zr0}(r, \theta_{0i}) &= 0 \quad (a_i < r < b_i) \\ u_{r0}(r, \theta_{0i}) &= u_{ri}(r, \theta_{0i}) \quad (0 \leq r \leq a_i, b_i \leq r < \infty) \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2) \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} D_{z0}(r, \theta_{0i}) &= -D_0 \quad (a_i < r < b_i) \\ \phi_0(r, \theta_{0i}) &= \phi_i(r, \theta_{0i}) \quad (0 \leq r \leq a_i, b_i \leq r < \infty) \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2) \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zz0}(r, \theta_{0i}) &= \sigma_{zzi}(r, \theta_{0i}) \\ \sigma_{zr0}(r, \theta_{0i}) &= \sigma_{zri}(r, \theta_{0i}) \\ D_{z0}(r, \theta_{0i}) &= D_{zi}(r, \theta_{0i}) \\ \sigma_{zzi}(r, \theta_{1i}) &= 0 \\ \sigma_{zri}(r, \theta_{1i}) &= 0 \\ D_{zi}(r, \theta_{1i}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq r < \infty, i = 1, 2) \quad (9)$$

ここに、

$$(\theta_{0i}, \theta_{1i}) = \begin{cases} (h_0, h_1) & (i = 1) \\ (-h_0, -h_2) & (i = 2) \end{cases} \quad (10)$$

3. 解 析

式 (3) ~ (5) に Hankel 変換法を適用することにより、変位場および静電ポテンシャルに関する一般解が

次のように求まる (14).

$$\left. \begin{aligned} u_{zi} &= \sum_{j=1}^6 \int_0^\infty p_{4ij} A_{ij} J_0(sr) \exp(s\gamma_{ij}z) ds \\ u_{ri} &= \sum_{j=1}^6 \int_0^\infty p_{5ij} A_{ij} J_1(sr) \exp(s\gamma_{ij}z) ds \\ \phi_i &= - \sum_{j=1}^6 \int_0^\infty p_{6ij} A_{ij} J_0(sr) \exp(s\gamma_{ij}z) ds \end{aligned} \right\} \quad (i = 0, 1, 2) \quad (11)$$

ここに, $A_{ij} = A_{ij}(s)$ ($i = 0, 1, 2, j = 1, 2, \dots, 6$) は境界条件より決定される未知関数であり, J_n は n 次の第 1 種 Bessel 関数, $\gamma_{ij} = \gamma_{ij}(s)$ および $p_{kij} = p_{kij}(s)$ ($i = 0, 1, 2, j = 1, 2, \dots, 6, k = 1, 2, \dots, 6$) は文献 (7), (8) と同様である. 応力・電束密度成分は, 式 (11) を式 (2) に代入することにより求まる.

新しい未知関数 $G_{km}(r)$ ($k = 1, 2, m = 1, 2, 3$) を次のように導入する (15).

$$G_{k1}(r) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial r} [u_{z0}(r, \theta_{0k}) - u_{zk}(r, \theta_{0k})] & (a_k < r < b_k) \\ 0 & (0 \leq r \leq a_k, b_k \leq r < \infty) \end{cases} \quad (k = 1, 2) \quad (12)$$

$$G_{k2}(r) = \begin{cases} r \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} [u_{r0}(r, \theta_{0k}) - u_{rk}(r, \theta_{0k})] \right\} & (a_k < r < b_k) \\ 0 & (0 \leq r \leq a_k, b_k \leq r < \infty) \end{cases} \quad (k = 1, 2) \quad (13)$$

$$G_{k3}(r) = \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial r} [\phi_0(r, \theta_{0k}) - \phi_k(r, \theta_{0k})] & (a_k < r < b_k) \\ 0 & (0 \leq r \leq a_k, b_k \leq r < \infty) \end{cases} \quad (k = 1, 2) \quad (14)$$

境界条件式 (9) を考慮し, 混合境界条件式 (6) ~ (8) の第 1 式を用いると, 未知関数 $G_{km}(t)$ ($k = 1, 2, m = 1, 2, 3$) に関する次の連立特異積分方程式が得られる.

$$\begin{aligned} \int_{a_1}^{b_1} t \{ [Z_{m11}^{(1)\infty} M_0^{(1)} + M_{m11}^{(1)}] G_{11}(t) + M_{m12}^{(1)} G_{12}(t) \\ + [Z_{m13}^{(1)\infty} M_0^{(1)} + M_{m13}^{(1)}] G_{13}(t) \} dt + \sum_{k=1}^3 \int_{a_2}^{b_2} t \\ \times M_{m2k}^{(1)} G_{2k}(t) dt = \begin{cases} 0 & (m = 1) \\ \exp(-\beta h_0) D_0 & (m = 3) \end{cases} \quad (a_1 < r < b_1) \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{a_1}^{b_1} t \{ M_{211}^{(1)} G_{11}(t) + [Z_{212}^{(1)\infty} M_1^{(1)} + M_{212}^{(1)}] G_{12}(t) \\ + M_{213}^{(1)} G_{13}(t) \} dt + \sum_{k=1}^3 \int_{a_2}^{b_2} t M_{22k}^{(1)} G_{2k}(t) dt = 0 \quad (a_1 < r < b_1) \quad (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{a_2}^{b_2} t \{ [Z_{m21}^{(2)\infty} M_0^{(1)} + M_{m21}^{(2)}] G_{21}(t) + M_{m22}^{(2)} G_{22}(t) \\ + [Z_{m23}^{(2)\infty} M_0^{(1)} + M_{m23}^{(2)}] G_{23}(t) \} dt + \sum_{k=1}^3 \int_{a_1}^{b_1} t \\ \times M_{m1k}^{(2)} G_{1k}(t) dt = \begin{cases} 0 & (m = 1) \\ \exp(\beta h_0) D_0 & (m = 3) \end{cases} \quad (a_2 < r < b_2) \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{a_2}^{b_2} t \{ M_{221}^{(2)} G_{21}(t) + [Z_{222}^{(2)\infty} M_1^{(1)} + M_{222}^{(2)}] G_{22}(t) \\ + M_{223}^{(2)} G_{23}(t) \} dt + \sum_{k=1}^3 \int_{a_1}^{b_1} t M_{21k}^{(2)} G_{1k}(t) dt = 0 \quad (a_2 < r < b_2) \quad (18) \end{aligned}$$

ここに, 積分核 $M_0^{(1)} = M_0^{(1)}(t, r)$, $M_1^{(1)} = M_1^{(1)}(t, r)$ は文献 (10) と同様であり, $M_{mik}^{(n)} = M_{mik}^{(n)}(t, r)$ および既知定数 $Z_{miki}^{(n)\infty}$ ($i, l, n = 1, 2, k, m = 1, 2, 3$) は付録 1 に示す. また, 混合境界条件式 (6) ~ (8) の第 2 式より, 次の補足の条件式が得られる.

$$\int_{a_k}^{b_k} G_{km}(t) dt = 0 \quad (k = 1, 2, m = 1, 2, 3) \quad (19)$$

6 本の特異積分方程式 (15) ~ (18) および補足の条件式 (19) を Gauss-Jacobi の数値積分公式 (16) を用いて数値解析するために, 解の特異性を考慮し, $G_{km}(t)$ をなめらかな関数 $\Phi_{km}(t)$ ($k = 1, 2, m = 1, 2, 3$) を用いて次のように置く.

$$G_{km}(t) = \begin{cases} \frac{c_k}{[(t - a_k)(b_k - t)]^{1/2}} \Phi_{km}(t) & (a_k > 0) \\ \left(\frac{t}{b_k - t} \right)^{1/2} \Phi_{km}(t) & (a_k = 0) \end{cases} \quad (k = 1, 2, m = 1, 2, 3) \quad (20)$$

さらに, き裂先端 a_i, b_i ($i = 1, 2$) での特異挙動を評価すると (19), 応力拡大係数 $K_{IAi}, K_{IBi}, K_{IIAi}, K_{IIBi}$ および電束密度拡大係数 K_{DAi}, K_{DBi} が次のように求まる.

$$K_{IAi} = \begin{cases} -\exp[(-1)^{(i-1)}\beta h_0] (\pi c_i)^{1/2} [Z_{1111}^{(i)\infty} \\ \times \Phi_{i1}(a_i) + Z_{1113}^{(i)\infty} \Phi_{i3}(a_i)] & (a_i > 0) \\ 0 & (a_i = 0) \end{cases} \quad (i = 1, 2) \quad (21)$$

$$K_{IIAi} = \begin{cases} -\exp[(-1)^{(i-1)}\beta h_0](\pi c_i)^{1/2} \\ \times Z_{2121}^{(i)\infty} \Phi_{i2}(a_i) & (a_i > 0) \\ 0 & (a_i = 0) \end{cases} \quad (i = 1, 2) \quad (22)$$

$$K_{DAi} = \begin{cases} -\exp[(-1)^{(i-1)}\beta h_0](\pi c_i)^{1/2} [Z_{3111}^{(i)\infty} \\ \times \Phi_{i1}(a_i) + Z_{3131}^{(i)\infty} \Phi_{i3}(a_i)] & (a_i > 0) \\ 0 & (a_i = 0) \end{cases} \quad (i = 1, 2) \quad (23)$$

$$K_{IBi} = \begin{cases} \exp[(-1)^{(i-1)}\beta h_0](\pi c_i)^{1/2} [Z_{1111}^{(i)\infty} \\ \times \Phi_{i1}(b_i) + Z_{1131}^{(i)\infty} \Phi_{i3}(b_i)] & (a_i > 0) \\ \exp[(-1)^{(i-1)}\beta h_0](2\pi b_i)^{1/2} [Z_{1111}^{(i)\infty} \\ \times \Phi_{i1}(b_i) + Z_{1131}^{(i)\infty} \Phi_{i3}(b_i)] & (a_i = 0) \end{cases} \quad (i = 1, 2) \quad (24)$$

$$K_{IIBi} = \begin{cases} \exp[(-1)^{(i-1)}\beta h_0](\pi c_i)^{1/2} \\ \times Z_{2121}^{(i)\infty} \Phi_{i2}(b_i) & (a_i > 0) \\ \exp[(-1)^{(i-1)}\beta h_0](2\pi b_i)^{1/2} \\ \times Z_{2121}^{(i)\infty} \Phi_{i2}(b_i) & (a_i = 0) \end{cases} \quad (i = 1, 2) \quad (25)$$

$$K_{DBi} = \begin{cases} \exp[(-1)^{(i-1)}\beta h_0](\pi c_i)^{1/2} [Z_{3111}^{(i)\infty} \\ \times \Phi_{i1}(b_i) + Z_{3131}^{(i)\infty} \Phi_{i3}(b_i)] & (a_i > 0) \\ \exp[(-1)^{(i-1)}\beta h_0](2\pi b_i)^{1/2} [Z_{3111}^{(i)\infty} \\ \times \Phi_{i1}(b_i) + Z_{3131}^{(i)\infty} \Phi_{i3}(b_i)] & (a_i = 0) \end{cases} \quad (i = 1, 2) \quad (26)$$

4. 数値結果および考察

数値計算を行い、標準化された応力・電束密度拡大係数に及ぼす下側き裂先端の位置 $(a_2, b_2)/h$ および材料不均質性パラメータ βh の影響を解明する。なお、き裂位置は $h_1/h = 0.5$ 、き裂間隔は $h_0/h = 0.25$ とした。 $z = 0$ 面における FGPM の材料定数は、 $c_{110} = 7.41 \times 10^{10} [\text{N/m}^2]$, $c_{330} = 8.36 \times 10^{10} [\text{N/m}^2]$, $c_{440} = 1.32 \times 10^{10} [\text{N/m}^2]$, $c_{120} = 4.52 \times 10^{10} [\text{N/m}^2]$, $c_{130} = 3.93 \times 10^{10} [\text{N/m}^2]$, $e_{310} = -0.16 [\text{C/m}^2]$, $e_{330} = 0.347 [\text{C/m}^2]$, $e_{150} = -0.138 [\text{C/m}^2]$, $\varepsilon_{110} = 0.825 \times 10^{-10} [\text{C/Vm}]$, $\varepsilon_{330} = 0.903 \times 10^{-10} [\text{C/Vm}]$, (セレン化カドミウム)⁽²⁰⁾ を用いた。

まず、2 個の円環状き裂の場合 ($a_i/h > 0.0, i = 1, 2$) について検討する。図 2(a)~(c) は $a_1/h = 0.5$, $b_1/h = 1.5$, $b_2/h = 1.5$ とした場合の標準化された応力拡大係数 $(K_{IAi}, K_{IBi}, K_{IIAi}, K_{IIBi})/\sigma_N(\pi c_i)^{1/2}$ および電

束密度拡大係数 $(K_{DAi}, K_{DBi})/D_0(\pi c_i)^{1/2} (i = 1, 2)$ に及ぼす a_2/h の影響を βh をパラメータとして示したグラフである。ここに、 $\sigma_N = -(e_{330}/\varepsilon_{330})D_0$ であり、実線は $\beta h = 1.0$ 、一点鎖線は $\beta h = 0.0$ 、点線は $\beta h = -1.0$ とした結果を示す。 $a_2/h = 0.5$ の場合、反対称性より $[K_{IA1}]_{\beta h=1.0,0.0,-1.0} = [K_{IA2}]_{\beta h=-1.0,0.0,1.0}$, $[K_{IIA1}]_{\beta h=1.0,0.0,-1.0} = -[K_{IIA2}]_{\beta h=-1.0,0.0,1.0}$, $[K_{DA1}]_{\beta h=1.0,0.0,-1.0} = [K_{DA2}]_{\beta h=-1.0,0.0,1.0}$ である。 $a_2/h \rightarrow 1.5$ の場合、 $c_2/h = (b_2 - a_2)/2h \rightarrow 0.0$ となり、上側き裂に対して下側き裂が十分に小となる。すなわち、上側き裂の拡大係数は 1 個の円環状き裂の解⁽⁹⁾ に漸近する。一方、幅 $2c_2$ を一定と考えて下側き裂に注目すると、 $h \rightarrow \infty$ となり、無限体中の単一

(a) K_{IAi}, K_{IBi}

(b) K_{IIAi}, K_{IIBi}

(c) K_{DAi}, K_{DBi}

Fig.2 The effect of a_2/h on the stress and electric displacement intensity factors of two annular cracks.

き裂となるとともに、き裂幅に対する相対的な曲率半径が $(b_2 + a_2)/2c_2 \rightarrow \infty$ で、2 次元き裂形状に準じると考えることで、 $K_{IA2} = K_{IB2}$, $K_{IIA2} = K_{IIB2}$, $K_{DA2} = K_{DB2}$ となる。

次に、2 個の円板状き裂の場合 ($a_i/h = 0.0, i = 1, 2$) について検討する。図 3(a)~(c) は $b_1/h = 0.5$ とした場合の標準化された応力拡大係数 (K_{IBi}, K_{IIBi})/ $\sigma_N(\pi b_i)^{1/2}$ および電束密度拡大係数 $K_{DBi}/D_0(\pi b_i)^{1/2}$ ($i = 1, 2$) に及ぼす b_2/h の影響を βh をパラメータとして示したグラフである。 $b_2/h < 0.2$ の場合、 K_{IB1}, K_{IIB2} および K_{DB1} への βh の影響は小である。一方、 $K_{IB2}, K_{IIB1}, K_{DB2}$ は、 βh に大きく

(a) K_{IBi}

(b) K_{IIBi}

(c) K_{DBi}

Fig.3 The effect of b_2/h on the stress and electric displacement intensity factors of two penny-shaped cracks.

依存して変化する。 $b_2/h \rightarrow 0.0$ の場合、下側き裂は上側き裂に比べて十分小となり、上側き裂の応力・電束密度拡大係数は 1 個の円板状き裂の解⁽⁸⁾ に漸近する。

最後に、円板 ($a_1/h = 0.0$) および円環 ($a_2/h > 0.0$) 状き裂の場合について検討する。図 4(a)~(c) は $b_1/h = b_2/h = 0.5$ とした場合の標準化された応力拡大係数 (K_{IB1}, K_{IIB1})/ $\sigma_N(\pi b_1)^{1/2}$, ($K_{IA2}, K_{IIA2}, K_{IB2}, K_{IIB2}$)/ $\sigma_N(\pi c_2)^{1/2}$ および電束密度拡大係数 $K_{DB1}/D_0(\pi b_1)^{1/2}$, (K_{DA2}, K_{DB2})/ $D_0(\pi c_2)^{1/2}$ に及ぼす a_2/h の影響を βh をパラメータとして示したグラフである。ここで、下添字 1 は円板状き裂、2 は円環状き裂の解を示す。 $a_2/h \rightarrow 0.5$ の場合、図 2

(a) $K_{IB1}, K_{IA2}, K_{IB2}$

(b) $K_{IIB1}, K_{IIA2}, K_{IIB2}$

(c) $K_{DB1}, K_{DA2}, K_{DB2}$

Fig.4 The effect of a_2/h on the stress and electric displacement intensity factors of an annular crack and a penny-shaped crack.

の説明と同様に上側の円板状き裂に対して下側の円環状き裂が十分に小となり、円板状き裂の拡大係数は1個の円板状き裂の解⁽⁸⁾に漸近する。また、下側の円環状き裂は、2次元き裂形状に準じると考えることができ、 $K_{IA2} = K_{IB2}$, $K_{IIA2} = K_{IIB2}$, $K_{DA2} = K_{DB2}$ となる。さらに、円環状き裂の内側先端における応力・電束密度拡大係数は a_2/h に大きく依存する。

5. 結 言

本報は、自由表面に平行な2個の円板状または円環状き裂を有する傾斜機能圧電厚板の応力・電束密度拡大係数を理論解析したものである。数値計算により次の点などが明らかとなった。(1) 応力・電束密度拡大係数は幾何学的形状に大きく依存する。(2) 円板および円環状き裂の場合、 $a_2/h \rightarrow 0.0$ に伴い円環状き裂の内側先端における拡大係数は著しく大きな値を示す。(3) 拡大係数に及ぼす不均質性の影響はき裂先端位置に依存する。

付 録 1

積分核 $M_{mik}^{(n)} = M_{mik}^{(n)}(t, r)$ および既知定数 $Z_{mkl}^{(n)\infty}$ ($i, l, n = 1, 2$, $k, m = 1, 2, 3$) は次式となる。

$$M_{mik}^{(n)} = \left\{ \begin{array}{l} \int_0^\infty s [Z_{mik1}^{(n)}(s) - Z_{mik1}^{(n)\infty} + Z_{mik2}^{(n)}(s)] J_0(sr) J_1(st) ds \quad (k = 1, 3, m = 1, 3) \\ \int_0^\infty s [Z_{mik1}^{(n)}(s) - Z_{mik1}^{(n)\infty} + Z_{mik2}^{(n)}(s)] J_0(sr) J_2(st) ds \quad (k = 2, m = 1, 3) \\ \int_0^\infty s [Z_{mik1}^{(n)}(s) - Z_{mik1}^{(n)\infty} + Z_{mik2}^{(n)}(s)] J_1(sr) J_1(st) ds \quad (k = 1, 3, m = 2) \\ \int_0^\infty s [Z_{mik1}^{(n)}(s) - Z_{mik1}^{(n)\infty} + Z_{mik2}^{(n)}(s)] J_1(sr) J_2(st) ds \quad (k = 2, m = 2) \end{array} \right\} \quad (i, n = 1, 2) \quad (27)$$

$$\left. \begin{array}{l} Z_{mik1}^{(1)}(s) = \sum_{j=4}^6 p_{m0j}(s) d_{0jik}(s) \\ Z_{mik2}^{(1)}(s) = \sum_{j=1}^3 p_{m0j}(s) d_{0jik}(s) \exp(2s\gamma_{0j}h_0) \\ Z_{mik1}^{(2)}(s) = \sum_{j=1}^3 p_{m0j}(s) d_{0jik}(s) \\ Z_{mik2}^{(2)}(s) = \sum_{j=4}^6 p_{m0j}(s) d_{0jik}(s) \exp(-2s\gamma_{0j}h_0) \\ Z_{mik1}^{(n)\infty}(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} Z_{mik1}^{(n)\infty}(s) \quad (n = 1, 2) \end{array} \right\} \quad (i = 1, 2, k, m = 1, 2, 3) \quad (28)$$

式(28)における $d_{0jik}(s)$ ($i = 1, 2$, $j = 1, 2, \dots, 6$, $k = 1, 2, 3$) は

$$\left. \begin{array}{l} d_{0j1k}(s) = q_{j,k+9}(s) \\ d_{0j2k}(s) = q_{j,k+12}(s) \end{array} \right\} \quad (k = 1, 2, 3, j = 1, 2, \dots, 6) \quad (29)$$

ここに、関数 $q_{n,m}(s)$ ($n, m = 1, 2, \dots, 18$) はマトリクス $Q = \Delta^{-1}$ の要素であり、マトリクス Δ の要素 $\delta_{n,m}(s)$ ($n, m = 1, 2, \dots, 18$) は次式で与えられる。

$$\left. \begin{array}{l} \delta_{n,m+6}(s) = p_{n1m}(s) \exp(s\gamma_{1m}h_1) \\ \delta_{n+3,m+12}(s) = p_{n2m}(s) \exp(-s\gamma_{2m}h_2) \end{array} \right\} \quad (n = 1, 2, 3, m = 1, 2, \dots, 6) \quad (30)$$

$$\left. \begin{array}{l} \delta_{n+6,m}(s) = p_{n0m}(s) \exp(s\gamma_{0m}h_0) \\ \delta_{n+6,m+6}(s) = -p_{n1m}(s) \exp(s\gamma_{1m}h_0) \\ \delta_{n+12,m}(s) = p_{n0m}(s) \exp(-s\gamma_{0m}h_0) \\ \delta_{n+12,m+12}(s) = -p_{n2m}(s) \exp(-s\gamma_{2m}h_0) \end{array} \right\} \quad (m, n = 1, 2, \dots, 6) \quad (31)$$

文 献

- (1) Wu, C.M., Kahu, M., and Moy, W., Piezoelectric Ceramics with Functional Gradients: A New Application in Material Design, *Journal of American Ceramics Society*, Vol.79 No.3(1996), pp.809-812.
- (2) Li, Chunyu., Weng, G.J., Antiplane Crack Problem in Functionally Graded Piezoelectric Materials, *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol.69 (2002), pp.481-488.
- (3) Ueda, S., Kanki, H., and Kanada, Y., The Antiplane Vertical Crack Problem for a Functionally Graded Piezoelectric Strip with Surface Layers under Electro-mechanical Loading, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.70, No.692 (2004), pp.567-572. (in Japanese)
- (4) Ueda, S., Hatagaki, A., and Kandani, Y., The Surface Crack Problem for a Piezoelectric Slab with Functionally Graded Properties, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.70, No.694 (2004), pp.865-871. (in Japanese)
- (5) Ueda, S., Hatagaki, A., Impact Response of a Cracked Functionally Graded Piezoelectric Slab, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.71, No.705 (2005), pp.732-739. (in Japanese)
- (6) Ueda, S., Takaki, T., Hatagaki, A., and Yoshimoto, M., Electroelastic Interaction of a Symmetric Functionally Graded Piezoelectric Slab with a Crack Parallel to the Boundaries, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.71, No.711 (2005), pp.1517-1522. (in Japanese)

- (7) Ueda, S., Kondo, H., and Hatagaki, A., Electric Response of a Parallel Crack in a Functionally Graded Piezoelectric Strip, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.72, No.716 (2006), pp.520-526. (in Japanese)
- (8) Ueda, S., Nishimura, N., Thermoelectromechanical Response of a Penny-Shaped Crack in a Functionally Graded Piezoelectric Strip, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.73, No.728 (2007), pp.506-513. (in Japanese)
- (9) Ueda, S., Nishimura, N., A Functionally Graded Piezoelectric Strip with an Annular Crack under Thermoelectric Loadings, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.74, No.744 (2008), pp.1142-1149. (in Japanese)
- (10) Ueda, S., Ashida, F., Transient response of a functionally graded piezoelectric strip with a penny-shaped crack under electric time-dependent loading, *Acta Mechanica*, Vol.194 (2007), pp.175-190.
- (11) Ueda, S., Ikawa, K., Thermoelectromechanical Interaction between Two Parallel Cracks in a Piezoelectric Strip, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.74, No.738 (2008), pp.216-223. (in Japanese)
- (12) Ueda, S., Ishii, A., Thermoelectromechanical Response of a Piezoelectric Strip with Two Parallel Cracks of Different Lengths, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.74, No.744 (2008), pp.1134-1141. (in Japanese)
- (13) Ueda, S., Tani, Y., Thermal Stress Intensity Factors for Two Coplanar Cracks in a Piezoelectric Strip, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.73, No.736 (2007), pp.1410-1416. (in Japanese)
- (14) Sneddon, I.N., Lowengrub, M., *Crack Problems in the Classical Theory of Elasticity*, (1969), John Wiley & Sons, Inc., New York.
- (15) Erdogan, F., Wu, B.H., Crack problems in FGM Layers under Thermal Stresses, *Journal of Thermal Stresses*, Vol.19 (1996), pp.237-265.
- (16) Erdogan, F., Gupta, G.D., and Cook, T.S., *Methods of Analysis and Solution of Crack Problems*, (Edited by Sih, G.C) (1972), p.368, Noordhoff, Leyden.
- (17) Wang, B.L., Mai, Y.W., Impermeable Crack and Permeable Crack Assumptions, Which One is More Realistic?, *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol.71 (2004), pp.575-578.
- (18) Ueda, S., Nishimura, N., and Kondo, H., Effects of Crack Surface Conductance on Intensity Factors for a Functionally Graded Piezoelectric Material under Thermal Load, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.72, No.724 (2006), pp.2066-2073. (in Japanese)
- (19) Watanabe, K., Ashida, F., and Ueda, S., *Mathematical Analyses in Elasticity for New Applications*, (2007), pp.163-179, Yokendo.
- (20) Ashida, F., Tauchert, T.R., Transient Response of a Piezothermoelastic Circular Disk Under Axisymmetric Heating, *Acta Mechanica*, Vol.128 (1998), pp.1-14.