陽的な大変形解析に適した非構造中点連結多面体セルの開発*

伊 東 雅 晴^{*1}, 廣 江 哲 幸^{*2}Development of an Arbitrary Median-Meshed
Polyhedral Cell for Explicit Large Deformation AnalysesMasaharu ITOH^{*3} and Tetsuyuki HIROE^{*3} Structural Engineering Systems Department, ITOCHU Techno-Solutions Corp.,
3-2-5 Kasumigaseki, Chiyoda-ku, Tokyo, 100-6080 Japan

This paper describes a numerical algorithm to improve the poor performance of a four-node linear tetrahedral element. For this purpose a novel finite volume method utilizing an arbitrary median-meshed polyhedral (AMP) cell is developed. The AMP cells are constructed uniquely by connecting the median points of unstructured tetrahedra: the edge mid-points; the face centers; the volume centroids. These cells are used as control volumes to discretize the equations of the conservation laws by the finite volume method and to solve constitutive equations. The derivation of the equation of motion to accelerate computational nodes is detailed. The present method is implemented in a general-purpose explicit Lagrangian program, which is applied to solve Taylor impact problems in order to evaluate the performance of the AMP cells. Test cases of the three different materials as Aluminum, Copper and Steel are selected. The deformed shapes of the test pieces obtained by the analyses show good agreements with the ones by the experiments even if the computational nodes are distributed nonuniformly. Computational results are also compared about plastic strains obtained by the eight-node hexahedral elements of the same computer program.

Key Words: Computational Mechanics, Numerical Analysis, Finite Volume Method, Polyhedral Cells, Tetrahedral Elements, Locking Phenomena, Taylor Test

1. 結 言

物体の動的な変形現象を数値的にシミュレーションするには, SPH 法などの粒子法やメッシュフリー法を除き, 有限要素法と有限差分法いずれの離散化手法を用いるとしても計算メッシュを必要とする. この計算メッシュは精度の観点から六面体要素であることが望ましいが, 複雑な 3 次元形状の物体を六面体要素だけを用いてメッシュ分割することは, 汎用の要素分割ソフトウェアでも困難な課題である. 一方, 四面体要素の使用を許せば, デローニ法などによる自動要素分割手法を適用できて, メッシュ作成に要する作業量を大幅に軽減することが可能となる.

しかしラグランジュ表示を採用した四面体の一次要素は非圧縮性の変形やせん断変形に対して一般に体積ロッキングやせん断ロッキングと呼ばれるロッキング現象⁽¹⁾を示し, 固体の変形を精度良く模擬することが

できないという欠点を有する. 時間積分に陽解法を用い, 体積ロッキングを緩和する既往の研究には Average Nodal Pressure 法⁽²⁾があり, 体積ロッキングとともにせん断ロッキングも回避することを企図した研究にはそれを発展させた Averaged Nodal Deformation Gradient 法⁽³⁾がある. これらの手法の特徴は, 四面体要素の圧力や変形勾配テンソルを計算したのち, これら変数の節点値をその節点を共有する四面体要素の平均値として計算することにより, 四面体一次要素の欠点である極端に剛な変形特性の緩和を図る点にある.

それに対して本研究で提案する非構造中点連結多面体(Arbitrary Median-meshed Polyhedral; AMP)セルでは, 速度だけでなく応力や内部エネルギーなどの熱力学変数もすべて節点位置で定義するので, 節点と要素間の変数の平均化操作を必要としない. この新しい要素は, 節点を中心にその節点を共有する四面体要素の集合体として定義される. 節点数と要素(セル)数が等しいので体積変形に関する拘束比⁽⁴⁾が最適になりロッキングが発生しにくいという特徴をもつ.

なお, 節点において速度や応力を定義する既往の研究には, 節点積分有限要素法(Nodal-Integration FEM; NI-FEM)⁽⁴⁾⁽⁵⁾があるが, 本論文の AMP セル

* 原稿受付 2008 年 9 月 17 日. 改訂原稿受付日 2009 年 4 月 10 日.

^{*1} 正員, 伊藤忠テクノソリューションズ(株) (〒100-6080 東京都千代田区霞が関 3-2-5).

^{*2} 正員, フェロー, 熊本大学工学部 (〒860-8555 熊本市黒髪 2-39-1).

E-mail: masaharu.ito@ctc-g.co.jp

は、節点力についてはこれらとは異なる計算方法を採用している。

計算例として金属棒の高速衝突問題を取りあげ、実験結果および汎用衝撃コードを用いた計算結果との比較検討を通して本手法の有効性を確認する。

なお以下では混乱を避けるため四面体は要素、多面体はセルとして表記する。

2. 非構造中点連結多面体(AMP)セルの開発

2・1 保存則 三次元空間内で質量 m をもつ閉領域 Ω に対する保存則は、体積力と熱の影響を無視できるときデカルト座標系 $x_i (i=1, 2, 3)$ を用いて次式⁽⁶⁾⁽⁷⁾により表される。

$$\frac{Dm}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho d\Omega = 0 \quad (1)$$

$$\int_{\Omega} \rho \frac{Du_i}{Dt} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} d\Omega \quad (2)$$

$$\int_{\Omega} \rho \frac{De}{Dt} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} d\Omega \quad (3)$$

上式(1)～(3)はそれぞれ質量保存則、運動量保存則、エネルギー保存則に対応する。ここで ρ , e , u_i , σ_{ij} , $\dot{\epsilon}_{ij}$ はそれぞれ密度、比内部エネルギー、速度ベクトル、コーシー応力テンソル、ひずみ速度テンソルを表す。また微分記号 $D/Dt = \partial/\partial t + u_i \partial/\partial x_i$ と変数上の黒点は物質導関数を意味する。ベクトルとテンソルは太字または下添字付きの成分により表示する。添字付きの場合、内積は総和規約を用いて表す。

2・2 非構造中点連結多面体セル 有限個の四角形で覆われた多面体(図1参照)を有限体積法のコントロール・ボリュームとして採用する。はじめに解析領域を汎用のメッシング・プログラム等により4節点四面体で分割する。続いて四面体を構成している各辺や各面の中点と重心の座標を計算し、これらの点を連結すると四面体は図2に示すように、等しい体積をもつ4個の六面体に分割される。この六面体をサブセルと呼ぶこととする。サブセルは1個の節点(Node)と7

Fig.1 A node-centered polyhedral cell enclosed by quadrilateral faces

個の中点(Median point)から構成される。

同じ節点を共有するサブセルを結合してコントロール・ボリュームを構築する。本研究ではこれを中点連結多面体セルと名付ける(以下、多面体セルあるいはAMPセルと略記)。図3に、8個の四面体(細線)と節点1を共有する8個のサブセル $\bar{1} \sim \bar{8}$ (太線)で構築された多面体セルの例を示す。密度・内部エネルギー・速度・応力・ひずみ速度等の変数はすべて節点で定義され、多面体セル内部では一定であると仮定する。

2・3 保存則の離散化 多面体セルに対して保存則(1)～(3)を適用する。ラグランジュ表示の下では多面体セルの表面を介して物質の流入・流出はなく質量は変化しない。したがって現在時刻すなわち第 n ステップ時の密度について次式を得る。

$$\rho^n = \frac{m}{V^n} \quad (4)$$

ここで V はサブセル $\bar{k}$ の体積 $V_{\bar{k}}$ の和として

$$V^n = \sum_{k=1}^{k_{\max}} V_{\bar{k}}^n \quad (5)$$

で与えられる。ただし $k_{\max}$ は多面体セルを構成する

Fig.2 Tetrahedral mesh and median mesh

Fig.3 Eight tetrahedra and eight hexahedral subcells (thick lines) composing the polyhedral cell-1

サブセルの総数を表す。多面体セル-1 の場合 $k_{\max}=8$ である(図3参照)。

次に式(3)の被積分項は多面体セル内で一定であるから、これを積分記号の外に出して両辺を $V=\int_{\Omega} d\Omega$ で除し

$$\dot{e}^{n-1/2} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij}^n \dot{\epsilon}_{ij}^{n-1/2} \dots\dots\dots (6)$$

を得る。比内部エネルギーは次式にしたがい更新する。

$$e^n = e^{n-1} + \dot{e}^{n-1/2} \Delta t^{n-1/2} \dots\dots\dots (7)$$

本節の最後として運動量保存式に有限体積法を適用して節点力を導出する方法について詳述する。式(2)の右辺に発散定理を適用して体積積分を面積分に変換し、

$$\rho \dot{u}_i V = \int_S \sigma_{ij} n_j dS \dots\dots\dots (8)$$

次に右辺を多面体セル表面上での応力と面積ベクトルとの積の総和で近似して

$$m \dot{u}_i^n = \sum_{j=1}^{l_{\max}} \sigma_{ij}^n \Delta S_j^n \equiv f_i^n \dots\dots\dots (9)$$

を得る。ただし f_i^n は節点力、 $l_{\max}$ は多面体セルの表面四角形の総数を表す。多面体セル-1 の場合 $l_{\max}=24$ である。具体的には以下に表す手順にしたがい式(9)の計算を行う。

はじめにサブセル- $\bar{I}$ の表面1-G-F1-E1上で多面体セル-1の応力 σ_1 を積分する。この積分値 $\sigma_1 \Delta S_{1-G-F1-E1}$ の1/4平均値を4個の点:1, G, F1, E1の局所配列 $f_{(i)}$ に加算する。残りの5個の表面: $n_F=2\sim 6$ についてもこの手順を実施する(図4の計算流れ参照)。そしてサブセル- $\bar{2}$ からサブセル- $\bar{4}$ のそれぞれの6個の表面に関しても同様の面積分と加算の計算処理を行う。

次に1個の四面体の処理が終了した段階で $f_{(i)}$ に格納されている節点力を全体配列の節点力 f_i ($i=1\sim$ 節点数)に加算する。以上述べた計算処理が全ての四面体に対して終了したとき全節点の節点力が確定される。

なおサブセルごとの表面力の和は、閉局面の面積ベクトルの和がゼロであることから打ち消しあい、

$$\sigma_{\bar{K}} \sum_{n_F=1}^6 \Delta S_{n_F} = 0, (\bar{K} = \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}) \dots\dots\dots (10)$$

が成り立つので運動量保存則が満たされる。

2.4 ひずみ速度テンソル 多面体セルのひずみ速度を、それに関連する四面体要素のひずみ速度の平均値として定義する。多面体セル-1の場合、図3に示した8個の四面体要素のひずみ速度がそれに対応す

Fig. 4 Computational flow to calculate nodal forces

る。

物質内部の任意の空間点におけるひずみ速度テンソル $\dot{\epsilon}_{ij}$ は

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \dots\dots\dots (11)$$

与えられる。上式の両辺を四面体の閉領域 V_T について積分し、式(8)と同様、右辺に発散定理を適用し体積積分を面積積分に変換して次式を得る。

$$\int_{V_T} \dot{\epsilon}_{ij} dV_T = \frac{1}{2} \int_{S_T} (u_i n_j + u_j n_i) dS_T \dots\dots\dots (12)$$

ここで S_T は四面体の表面を表す。四面体内部でひずみ速度が一定であるとの仮定から次式を得る。

$$\dot{\epsilon}_{Tij} = \frac{1}{4 V_T} \sum_{L=1}^4 [\bar{u}_i (\mathbf{d}_b \times \mathbf{d}_c)_j + \bar{u}_j (\mathbf{d}_b \times \mathbf{d}_c)_i]_L \dots\dots\dots (13)$$

ただし、

$$V_T = \frac{1}{6} \mathbf{x}_{a1}^n \cdot [\mathbf{x}_{21}^n \times \mathbf{x}_{31}^n], \quad \mathbf{x}_{pq}^n = \mathbf{x}_p^n - \mathbf{x}_q^n \dots\dots\dots (14)$$

Table 1 Local node numbers on a surface of the tetrahedron shown in Fig. 2

Face number: L	A	B	C
1	1	2	4
2	2	3	4
3	3	1	4
4	1	3	2

Fig. 5 Computational flow of the proposed algorithm according to the explicit time integration

$$\bar{u}_i = \frac{1}{3} (u_{Ai}^{n-1/2} + u_{Bi}^{n-1/2} + u_{Ci}^{n-1/2}) \dots \dots \dots (15)$$

$$d_b = x_B^n - x_A^n, \quad d_c = x_C^n - x_A^n \dots \dots \dots (16)$$

である。ここに L は四面体の表面の指標 ($L=1 \sim 4$)、 $\bar{u}_i$ は表面の平均速度である。記号 A, B, C は節点を表し、 L に応じて表 1 に示した節点の指標をとる。

いまサブセルのひずみ速度はそれが属する四面体のひずみ速度 $\dot{\epsilon}_{Tij}$ に等しいと仮定する。そしてサブセルの体積 V_k を加重平均の重みとして用い、多面体セルのひずみ速度を次式により定義する。

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{n-1/2} = \sum_{k=1}^{k_{\max}} (\dot{\epsilon}_{kij} V_k) / \sum_{k=1}^{k_{\max}} V_k \dots \dots \dots (17)$$

Bonet ら⁽³⁾ は、まず四面体要素の変形勾配テンソルを計算し、次に節点の変形勾配テンソルを式(17)と同様にその節点を共有する四面体要素の平均値として求め、続いてそれを用いて節点の応力を計算したのち、再び四面体要素の応力をその四面体を構成する節点の応力の平均として求めるという手法を用いている。この手法では四面体要素から節点、節点から四面体要素へと変数の平均化が何段階も行われる。それに対し本稿の多面体セルでは平均化は式(17)の一回だけである。

2.5 応力テンソル 式(9)の応力テンソル σ_{ij}^n は、物体の瞬間的な剛体回転についての客観性を考慮した Jaumann 変化率⁽⁸⁾を用い、次式に従い求める。

$$\begin{aligned} \dot{S}_{ij}^{n-1/2} = & 2G(\dot{\epsilon}_{ij}^{n-1/2} - \dot{\epsilon}_{kk}^{n-1/2}/3) \\ & - \omega_{ik} S_{kj}^{n-1} + S_{ik}^{n-1} \omega_{kj} \dots \dots \dots (18) \end{aligned}$$

$$S_{ij}^n = S_{ij}^{n-1} + \dot{S}_{ij}^{n-1/2} \Delta t^{n-1/2} \dots \dots \dots (19)$$

$$\sigma_{ij}^n = -p^n \delta_{ij} + S_{ij}^n \dots \dots \dots (20)$$

ただし G は横断性係数、 S_{ij} は偏差応力テンソル、 ω_{ij} はスピントテンソルである。式(18)の右辺第2項と第3項が剛体回転に関する補正項である。圧力 p は、 ρ^n と e^n の関数として状態方程式により与えられる。状態方程式として、後述の数値解析例ではユゴニオ状態式を用いる。応力テンソルに対する降伏条件の適用と塑性ひずみの算出はラジアル・リターン法⁽⁹⁾にしたがう。

図5に本章で述べた計算アルゴリズムのフローチャートを示す。図中の式番号は本文中の式番号に対応している。

3. 数値解析例

3.1 解析条件 Taylor 衝突問題を例題として取り上げ試験結果⁽¹⁰⁾ および六面体要素の計算結果と比較する。供試体は円柱形で直径 6.4 mm、長さ 31.77 mm である。表 2 に示すように 3 種類の異なる

Table 2 Data summary for test calculations

Case	Material	V_0	T_0
(a)	6061-T6 Al	406	295
(b)	ETP Copper	277	295
(c)	4340 Steel	177	1280

V_0 : Impact velocity (m/s) T_0 : Initial temperature (K)

Fig. 6 Two examples of AMP cells (thick lines) in two dimensional representations

Fig. 7 Initial mesh configuration used by Taylor impact problems

供試体に対してそれぞれ多面体セルと 8 節点六面体を適用し、合計 6 ケースの解析を行う。多面体セルの表面の計算メッシュは、図 6 に示すように多角形(太線)で表されるべきであるが、後処理プログラムの機能の制約により、以下の計算例では三角形(細線)で表示される。多面体セルの計算メッシュには図 7 に示すように、節点が非一様的に分布したメッシュを意図的に用いる。また六面体要素の計算メッシュは半径方向に 8 等分、長さ方向に 40 等分した一様なメッシュとする。多面体セルと六面体いずれも対称性を考慮して計算体系は円柱の 1/4 とする。

材料モデルとして、圧力には材料中の音速と粒子速度の間に線形関係が成り立つことを仮定して導出され

Table 3 Material properties for test calculations

	6061-T6 Al	ETP Copper	4340 Steel
ρ_0 (g/cm ³)	2.705	8.930	7.840
c (m/s)	5330	3940	4580
s	1.338	1.489	1.62
Γ	2.18	1.99	1.67
G_0 (GPa)	27.6	47.7	81.8
Y_0 (GPa)	0.32	0.125	0.25
Y_{max} (GPa)	0.68	0.64	1.15
a_1 (K ⁻¹)	-6.2×10^{-4}	-9.2×10^{-4}	-1.6×10^{-4}
a_2 (GPa ⁻¹)	8.0×10^{-2}	2.8×10^{-2}	2.06×10^{-2}
b	125	36	2
n	0.1	0.45	0.5
T_{melt} (K)	1220	1790	2310

るユゴニオ状態方程式を適用する。

$$p = p_H + \Gamma \rho_0 (e - e_H) \dots \dots \dots (21)$$

ここで p_H と e_H はユゴニオ圧力とユゴニオ・エネルギーであり、それぞれ

$$p_H = \rho_0 c_0^2 \eta / (1 - s\eta)^2 \dots \dots \dots (22)$$

$$e_H = p_H \eta / (2\rho_0) \dots \dots \dots (23)$$

と表される。ここで $\eta = 1 - \rho_0/\rho$ は体積変化率である。この状態方程式を規定する材料定数はグルナイゼン比 Γ 、基準密度 ρ_0 、音速 c_0 と比例定数 s である。

また降伏モデルとしては、降伏応力 Y について加工硬化、ひずみ速度依存性、温度依存性が考慮できる以下の Steinberg-Guinan 構成則を用いる。

$$Y = \min(Y_m, C_h C_m Y_0), (Y=0 \text{ if } T \geq T_{melt}) \dots \dots \dots (24)$$

$$G = C_h G_0, (G=0 \text{ if } T \geq T_{melt}) \dots \dots \dots (25)$$

ただし、

$$C_h = 1 + a_1 p (\rho_0/\rho)^{1/3} + a_2 (T - T_0) \dots \dots \dots (26)$$

$$C_m = (1 + b \epsilon_p)^n \dots \dots \dots (27)$$

である。この構成則を規定する材料定数とユゴニオ状態方程式の材料定数については文献(10)から引用し、これらを表 3 に記す。

図 8 に計算で得られた供試体の最終変形メッシュ形状を示す。各ケースとも左側が多面体セル、右側が六面体要素の結果である。ケース(a)と(b)については、計算で得られた供試体の最終長さが両者とも実験結果と良く一致している。ケース(c)の場合には、多面体セルと六面体要素の計算結果は一致したが、実験結果とは約 6% の差が生じた。ただし、この差は適切な材料定数を用いれば小さくなると考えられる。図 9 に、図 8 と同時刻の対称面上における相当塑性ひずみ分布を示す。多面体セルは、外形形状だけでなく内部の変形状態についても、六面体要素とほぼ等しい結果

Fig. 8 Comparison of the final deformed mesh configurations obtained by the proposed AMP cells and hexahedral elements

Fig. 9 Comparisons of the effective plastic strain contours obtained by the proposed AMP cell and hexahedral elements

を与える。これらの結果は、多面体セルが体積ロッキングの発生を効果的に抑制する特長をもつことを明示している。

節点ベースの計算手法については既に Average Nodal Pressure (ANP) 法⁽³⁾や NI-FEM 法⁽⁴⁾がある。本研究の多面体セルとの計算精度の比較のため、ANP 法の計算要素を備えている汎用衝撃コード ANSYS AUTODYN[®]を用いて ETP Copper の場合について計算を実施した。図 10 に最終変形形状を示す。左の要素変形図が ANP 法、右が同じ ANSYS AUTODYN[®]⁽¹¹⁾の六面体要素を用いて得られた変形

図である。図 8(b)と比較すると明らかなように、ANP 法の要素を用いた場合は軟らかい変形となる。また、NI-FEM 法も軟らかい変形を与えることが指摘されている⁽⁵⁾。それに対して本研究で提示した多面体セルは最終長さが実験結果と一致するだけでなく、衝突面近傍の変形の形状についても六面体要素で得られた変形形状と良く一致している。

四面体要素の場合には、例えば衝突面に接する要素がつぶれるとその時点で計算を打ち切るか、数値イロージョン⁽¹²⁾と呼ばれる手法によりその要素は計算体系から削除されなければならない。しかし多面体セル

Fig. 10 Final mesh configurations of the ETP copper test piece obtained by using the ANP elements and hexahedral ones of ANSYS AUTODYN®

は節点とその節点を共有する複数の四面体から構成されるので、セル自体が体積を失う状況にはなりにくいという特長がある。時間刻み幅の変動も少ない。これは大変形問題に適用したときに数値計算上の安定化に寄与する。

4. 結論と今後の課題

本研究では、四面体一次要素の欠点であるロッキングの発生を抑制することが可能な計算要素を新たに考案した。そしてラグランジュ表示の場の方程式をその要素について空間積分して得られる積分方程式を有限体積法により離散化する手法を示した。この計算要素は、非構造的に分布している四面体メッシュの辺や面の中点と重心を結んで構築されることから非構造中点連結多面体(Arbitrary Median-meshed Polyhedral, AMP)セルと名付けた。

本手法の有効性を確認するために Taylor 試験を例題として解析し、以下の知見と成果を得た。

(1) 材質や衝突速度および初期温度が異なる3つの例題について、AMPセルの結果は最終形状と塑性ひずみ分布について8節点六面体要素の結果と良く一致した。これによりAMPセルが体積ロッキングを十分な精度で抑制できることを確認した。

(2) 実験結果と比較すると、一つのケースについて計算結果は実験結果と一致しなかったが、原因は材

料定数にあると考えられる。

(3) AMPセルは体積がゼロになりにくく四面体要素と比較して数値的に安定であるという特長を有する。

(4) 既往の節点ベースの離散化手法であるANP法と近似性能を比較すると、ANP法を用いたときにみられる軟らかい変形がAMPセルでは顕著には表れず、良好な変形特性をもつことを確認した。

なお本報では、AMPセルが他方のロッキング現象であるせん断ロッキングに対しても有効であることを明示してはいない。その点に関してはせん断ロッキングが顕著な例題を解析し今後の研究報告の中で明らかにしていきたい。

文 献

- (1) Belytschko, T. et al., *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*, (2001), p. 454, John Wiley & Sons.
- (2) Bonet, J. and Burton, A. J., A simple averaged nodal pressure tetrahedral element nearly incompressible dynamic explicit applications, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 14 (1998), pp. 437-449.
- (3) Bonet, J. et al., An averaged nodal deformation gradient linear tetrahedral element for large strain explicit dynamic applications, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 17 (2001), pp. 551-561.
- (4) Dohrmann, C. R. et al., Node-based uniform strain elements for three-node triangular and four-node tetrahedral meshes, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 47 (2000), pp. 1549-1568.
- (5) Kurumatani, M. et al., Performance assessment of nodal-integration finite element method, *Transactions of JSCEs*, Paper No. 20070015 (2007).
- (6) Wilkins, M. L., *Computer Simulation of Dynamic Phenomena*, (1999), p. 129, Springer.
- (7) Belytschko, T. et al., *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*, (2001), p. 118, John Wiley & Sons.
- (8) Wilkins, M. L., *Computer Simulation of Dynamic Phenomena*, (1999), p. 139, Springer.
- (9) Wilkins, M. L., *Computer Simulation of Dynamic Phenomena*, (1999), p. 44, Springer.
- (10) Gust, W. H., High impact deformation of metal cylinders at elevated temperatures, *Journal of Applied Physics*, Vol. 53, No. 5 (1982), pp. 3566-3575.
- (11) Century Dynamics, *AUTODYN Theory Manual*, (2001).
- (12) Belytschko, T. and Lin, J. I., Three-dimensional impact-penetration algorithm with erosion, *Computer & Structures*, Vol. 25 (1987), pp. 95-104.