圧縮荷重を受ける軽量 Lattice 構造の機械特性の評価*
(第 2 報, 圧縮負荷方向の違いおよび不完全セルの存在による機械特性への影響)

牛 島 邦 晴^{*1}, Wesley James CANTWELL^{*2}, 陳 珉 珩^{*3}

**Estimation of the Mechanical Properties of
Lightweight Lattice Structures Subjected to Compressive Loading
(2nd Report, Effects of the Loading Direction and the Existence of
Partially-Complete Cells on the Mechanical Properties of Lattice Structure)**

Kuniharu USHIJIMA^{*4}, Wesley James CANTWELL and Dai-heng CHEN

^{*4} Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Kyushu Sangyo University,
2-3-1 Matsukadai, Higashi-ku, Fukuoka-shi, Fukuoka, 813-8503 Japan

In this paper, effects of a loading direction and an existence of partially-complete cells on the mechanical properties of lattice structure are discussed based on theoretical and numerical stress analysis, FEM. By comparing the relative mechanical properties (initial stiffness E^* and plastic collapse strength σ_{pl}^*) per unit relative density, it has been shown that the $BCCZH$ lattice structure is the bending-dominated structure, and the mechanical properties of $BCCZH$ are similar to those of BCC structure. Also, the f_2BCC structure is more stable and offers a superior mechanical response than the other lattice structures. Moreover, the effect of partially-complete cells on mechanical properties is discussed, and using an approximate solution, the parameters E^* and σ_{pl}^* for structures with partially-complete cells can be estimated from those for complete lattice structures.

Key Words: Lattice, Plasticity, Finite Element Method, Structural Analysis

1. 緒 言

ハニカム (Honeycomb) やフォーム (Foam), ラティス (Lattice) といった構造は, ユニットセルを規則的に配列した形状を持ち, その幾何学的な形状により軽量でかつ優れた機械特性 (高剛性, 高強度) を持たせることができるため, 種々の機械・構造物の構造部材として近年幅広く用いられている⁽¹⁾. ラティス構造は SLM (Selective Laser Melting) と呼ばれるラピッドプロトタイプング技術を用い, 粉末状にした金属にレーザー光を照射することで, 任意の 3 次元構造を容易に作製できる⁽²⁾⁽³⁾. 図 1 に SLM を用いて作製したラティス構造 (その幾何学的な構造より以下では BCC 構造と呼ぶ) の 1 例を示す.

著者の一人は, ステンレス鋼で作製したラティス構造の圧潰特性について, 準静的圧縮実験に基づく検討を行った⁽³⁾. また, 著者らは前報⁽⁴⁾で, 異なる 3 種類の

Fig. 1 Photograph of a typical BCC lattice structure (20mm cube)

ラティス構造 (構成する梁の配列状態より $BCC, BCCZ$ および f_2BCC 構造と呼ぶ) を z 方向に圧縮したときの初期剛性 E^* と塑性崩壊応力 σ_{pl}^* について, 初等梁理論および塑性崩壊曲線を用いた理論解析を行った. 図 2 に $BCC, BCCZ$ および f_2BCC 構造のユニットセル形状を示す.

図 2 からわかるように, BCC 構造のみが x, y, z 方向に対称な形状を有するため, それぞれの方向で全て等しい機械特性を示す. 一方, BCC 以外の構造 ($BCCZ$ と f_2BCC) では z 方向と x または y 方向で異なる形状

* 原稿受付 2009 年 4 月 13 日.

^{*1} 正員, 九州産業大学工学部機械工学科(〒813-8503 福岡市東区松香台 2-3-1).

^{*2} Department of Engineering, University of Liverpool (Brownlow Hill, Liverpool, L69 3GH, UK).

^{*3} 正員, フェロー, 東京理科大学工学部機械工学科(〒162-8601 東京都新宿区神楽坂 1-3).

E-mail: kuniharu@ip.kyusan-u.ac.jp

Fig. 2 Geometry of unit cell for lattice structures

を持つため、圧縮方向の違いにより異なる特性を示すことが予想される。BCCZ と f_2 BCC の構造を x または y 方向に圧縮する場合を、以下ではそれぞれ BCCZH 構造と f_2 BCH 構造と呼ぶ。

そこで本研究では第2報として、非対称な幾何形状を持つ BCCZ と f_2 BCC 構造に対し、圧縮方向の違いによる機械特性への影響を検討する。また、前報⁽⁴⁾の結果と合わせ、これら5種類のラティス構造での機械特性を比較することで、最も優れた機械特性を有するラティス構造の提案を試みる。さらに、ラティス構造内を作製した際、図2に示したユニットセルでは完全に表すことができないセル（以下では不完全セルと呼ぶ）が構造内に生じ、それにより機械特性が変化する場合が考えられる。従って、そうした不完全セルによるラティス構造の機械特性への影響についても検討を行う。なお、本理論内で用いた仮定、並びに材料特性は、前報⁽⁴⁾に示した通りである。

2. 解析方法

2.1 汎用 FEM による数値解析 本研究ではユニットセルに基づく理論解析の妥当性を検討するため、汎用 FEM コード ABAQUS による非線形解析を行う。解析モデルの1例として、BCCZH 構造の概略図を図3(a)に示す。図1に示したラティス構造 (BCC) と同様、構造内に図2(b)に示したユニットセルが x, y, z 方向に8個ずつ並んでいる状態を考え、剛体面を y 方向に移動させてラティス構造を圧縮する問題を考える。ここで対称性を考慮し、図3(a)内の点線で示した領域を解析対象とする。

次に、本解析で用いた FEM 解析での境界条件を説明する。ラティス構造を構成する梁の断面は直径 d の円形とし、各セルを構成する梁は、1本あたり約20個の2節点ビーム要素（要素タイプ B31）を用いて離散化した。対称平面上にある節点は、その面上を自由に移動できるものとし、周期対称性を満足するよう回転の自由度を拘束した。さらに、剛体の接触において摩擦の影響は無視し、剛体と接触する節点は剛体面上を自由に移動でき、回転の自由度を全て拘束した。なお、この境界条件下では、ユニットセルの個数の違いによる機械特性への影響は見られなかった。

Fig. 3 Geometries and boundary conditions for BCCZH lattice structure

次節では、圧縮荷重を受けるラティス構造の変形初期の剛性 E^* と、塑性崩壊強度 σ_{pl}^* の理論解の導出方法について説明する。

2.2 初期剛性 E^* に関する理論解の導出

2.2.1 BCCZH 構造 図4(a)に、BCCZH 構造に対する理論モデルを示す。 y 方向に圧縮した場合について FEM 解析を行ったところ、縦の棒 BC はほとんど変形せず (y 方向に対する z 方向の変形量の比は0.4%以下)、図4(b)に示すように、斜めの梁が回転を伴いながら変形した (図中の破線は棒 AB と AC の変形の様子を概略図として表す)。

そこで、点 B に対する点 A の相対変位を $(u, v, 0)$ と

仮定し、図 4(b) に示すような (x', y', z') 座標系を定義する。ここで、 x' は梁 AB に沿った方向、 y' は点 A の移動方向 ($=AA'$) を表す。以下では構造内の 8 本の梁のうち 1 本の梁 AB の挙動に注目し、初期剛性 E^* の評価を行う。

Fig. 4 Geometry of the BCCZH theoretical model, and movement of an inclined strand AB and AC

前報⁽⁴⁾で述べた方法を用い、ユニットセル (図 4(a)) に働く力のつり合い、ならびに外部仕事と内部に蓄えられるひずみエネルギーのつり合いを考慮することで、未知の相対変位 u, v が以下のように算出できる。

$$\begin{cases} u = \frac{\sqrt{3}\sigma_y}{2\pi E} \cdot \frac{L^5(L^2 - d^2)}{d^4(d^2 + 2L^2)} \\ v = \frac{\sqrt{3}\sigma_y}{2\pi E} \cdot \frac{L^5(2d^2 + L^2)}{d^4(d^2 + 2L^2)} \end{cases} \quad (1)$$

これらの変位のうち y 方向の成分 v を用いて、最終的に BCCZH 構造の剛性 E_{BCCZH}^* は以下の式で表される。

$$E_{BCCZH}^* = \frac{\sqrt{3}\pi E}{3} \cdot \left(\frac{d}{L}\right)^2 \cdot \frac{(d/L)^2 + 2}{2 + (L/d)^2} \quad (2)$$

2.2.2 f_2BCCH 構造 図 5(a) に f_2BCCH 構造の理論モデルを示す。この構造は図 5(b) に示すように、2 種類の BCC 構造を組み合わせることでできた構造と考えることができる。ただし、前報⁽⁴⁾で述べた z 方向へ圧縮した場合と異なり、 x または y 方向に圧縮する場合、図 5(b) に示した梁 AB, BD, BE は全て異なる変形を生じ得る。

そこで、図中の太線で表した 3 本の梁 (AB, BD, BE) に注目し、それぞれの梁において、点 B に対する相対変位を $(u_A, v_A, w_A), (u_D, v_D, w_D), (u_E, v_E, w_E)$ で表わす。ただし、構造の対称性より、これら変位に関し以下の拘束条件が満足される。

$$\begin{cases} u_A = u_D = u, u_E = 0 \\ v_A = v_E = v, v_D = 0 \\ w_A = w_D = w_E = w \end{cases} \quad (3)$$

未知変位 u, v, w を求めるためには、前報⁽⁴⁾で述べた力、エネルギーの釣り合い式のほかに、 f_2BCCH 構造として満足すべき周期対称条件が必要となる。すなわ

Fig. 5 Geometry of the f_2BCCH theoretical model and movement of three inclined strands AB, BD and BE

ち、ラティス構造全体として、変位 u, v, w の間で満足する関係を知る必要がある。そこで、 f_2BCCH 構造に対して FEM 解析を行い、構造内の任意のユニットセルにおける変位 u と v の変化を求め、その結果を図 6 に示す。

Fig. 6 Variation of displacements u and v for f_2BCCH structure obtained by FEM

図中には、3 種類の直径 d を用いた結果を $\bullet$, $\circ$, $\square$ 印で示している。この結果からわかるように、変位 u と v の関係は、梁の直径 d とセル一辺の長さ L との比 d/L によって異なり、また変形とともに変化するが、変形初期においては以下の式で近似的に表現できる。

$$u \simeq v/5. \quad (4)$$

上式の条件を用いて前節と同様の方法により、未知変位 v, w が以下のように求まる。

$$v = \frac{25\sigma_y L^3}{2\pi E d} \bar{v}, \quad w = \frac{15\sigma_y L^3}{2\pi E d} \bar{w}. \quad (5)$$

ただし、

$$\begin{cases} \bar{v} = \frac{L^3 (B_1 d^2 + B_2 L^2)}{d (B_3 d^4 + B_4 d^2 L^2 + B_5 L^4)} \\ \bar{w} = \frac{L^3 (-B_1 d^2 + B_6 L^2)}{d (B_3 d^4 + B_4 d^2 L^2 + B_5 L^4)} \end{cases} \quad (6)$$

であり、式中の係数 $B_1 \sim B_6$ は以下の式で表わされる。

$$\begin{cases} B_1 = 27\sqrt{2}, & B_2 = 2(9\sqrt{2} + 4\sqrt{3}), \\ B_3 = 9(9 + 8\sqrt{6}), & B_4 = (658 + 303\sqrt{6}), \\ B_5 = 2(18 + 13\sqrt{6}), & B_6 = 2(9\sqrt{2} + 8\sqrt{3}). \end{cases} \quad (7)$$

最終的に $f_2 BCC H$ 構造の剛性 $E_{f_2 BCC H}^*$ は、 y 方向の変位 v を用いて以下の式で表される。

$$E_{f_2 BCC H}^* = \frac{\pi E d}{25L} \cdot \frac{1}{\bar{v}}. \quad (8)$$

2.3 塑性崩壊応力 σ_{pl}^* に関する理論解の導出

以下では $BCCZH$ 構造と $f_2 BCC H$ 構造に対し、梁に生じる応力状態を考慮して、塑性崩壊応力 σ_{pl}^* を理論的に求める手法を説明する。ここで、塑性崩壊とは、ラティス構造を構成する梁の断面全体が完全に塑性変形し、接合点付近で塑性ヒンジが生じた状態とする。

2.3.1 BCCZH 構造 $BCCZH$ 構造にある長さ $\sqrt{3}L/2$ の梁は、直交する2平面 ($x'y'$ 面と $x'z'$ 面) 上で曲げ変形、および軸方向の伸び変形を伴う。すなわち、図7に示すように、2つの曲げモーメント $M_{x'y'}, M_{x'z'}$ を受け、梁内部にはそれぞれ方向 y', z' で異なる曲げ応力と、軸力 N による一様応力が生じる。ただし、概略図4(b)からもわかるように、 $BCCZH$ 構造内の梁 AB では曲げが支配的であり、軸力 N の影響は無視できる程小さいと予想される。これは前報⁽⁴⁾で述べた BCC 構造と同様である。従って以下では、2つの曲げモーメント $M_{x'y'}, M_{x'z'}$ のみを受ける片持ち梁 AB での、塑性崩壊について検討する。

Fig. 7 Schematic of the axial stress distribution for a beam subjected to bending moments $M_{x'y'}$ and $M_{x'z'}$

前節で述べた理論解析により求めた変位 u, v を用いると、塑性ヒンジが生じる梁の接合点 B での曲げモーメント $M_{x'y'}, M_{x'z'}$ は、以下の式

$$\begin{cases} M_{x'y'} = -\frac{\sqrt{2}\sigma_y}{32} \cdot \frac{L^3 (5d^2 + 4L^2)}{d^2 + 2L^2} \\ M_{x'z'} = \frac{\sqrt{6}\sigma_y}{32} \cdot \frac{L^3 (-d^2 + L^2)}{d^2 + 2L^2} \end{cases} \quad (9)$$

で表わされる。従って、これらモーメントによる軸方向の曲げ応力 σ_m (引張りを正とする) 分布は、以下の式で表わされる。

$$\sigma_m = -\left\{ C_1 \left(\frac{2y'}{d} \right) + C_2 \left(\frac{2z'}{d} \right) \right\} \sigma_y. \quad (10)$$

ただし、

$$\begin{cases} C_1 = \frac{\sqrt{2}L^3 (5d^2 + 4L^2)}{\pi d^3 (d^2 + 2L^2)} \\ C_2 = \frac{\sqrt{6}L^3 (-d^2 + L^2)}{\pi d^3 (d^2 + 2L^2)} \end{cases} \quad (11)$$

塑性崩壊応力を定義するため、ここでは Tresca の降伏曲面⁽⁵⁾を用いる。図8に降伏曲面の概略図を示す。式(9)からわかるように、曲げモーメント $M_{x'y'} < 0, M_{x'z'} > 0$ であるため、Tresca の曲面のうち、第2象限上の曲線

$$-\frac{M_{x'y'}}{M_P} + \frac{M_{x'z'}}{M_P} = 1 \quad (12)$$

を考えればよい。ここで、 M_P は完全塑性モーメント ($=\sigma_0 d^3/6$, σ_0 は降伏応力) を表す。

Fig. 8 Schematic of Tresca yield criterion for two principal moments

2つのモーメント $M_{x'y'}$ と $M_{x'z'}$ は互いに独立であり、図8にも示しているように、塑性崩壊時の $M_{x'y'}$ と $M_{x'z'}$ は以下の式で表わされる。

$$\begin{cases} |M_{x'y'}| = \frac{C_1}{C_1 + C_2} M_P \\ M_{x'z'} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} M_P \end{cases} \quad (13)$$

また、それぞれの曲げモーメントが単独に作用した場合、塑性崩壊時の応力 $\sigma_y (= \sigma_{pl}^*)$ は以下の式で求められる。すなわち、 $M_{x'y'}$ のみが作用する場合、

$$\sigma_{pl,y'}^* = \frac{8\sqrt{2}\sigma_0}{3} \cdot \left(\frac{d}{L} \right) \cdot \frac{(d/L)^2 + 2}{5 + 4(L/d)^2} \quad (14)$$

で表われ、 $M_{x'z'}$ のみが作用する場合

$$\sigma_{pl,z'}^* = \frac{8\sqrt{6}\sigma_0}{9} \cdot \left(\frac{d}{L}\right) \cdot \frac{(d/L)^2 + 2}{-1 + (L/d)^2} \quad (15)$$

で表われる。従ってこれらの値を用い、本研究では BCCZH 構造の塑性崩壊応力を以下の式で定義する。

$$\sigma_{pl,BCCZH}^* = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \sigma_{pl,y'}^* + \frac{C_2}{C_1 + C_2} \sigma_{pl,z'}^* \quad (16)$$

2.3.2 f_2BCCH 構造

前節で述べた BCCZH 構造と同様、 f_2BCCH 構造もまた、長さ $\sqrt{3}L/2$ の梁 AB は 2 つの曲げモーメント $M_{x'y'}$, $M_{x'z'}$ 並びに軸力 N を受ける。さらに、この構造には図 5 に示したように長さ $\sqrt{2}L/2$ で異なる変形を生じる 2 種類の梁 BD と BE が存在し、それぞれ xz 平面と yz 平面上で曲げ変形を、また、軸力による伸び変形を生じ得る。そこで、それぞれの梁での塑性崩壊時の応力を求め、FEM による解析結果と比較する。

長さ $\sqrt{3}L/2$ の梁 AB において、軸力 N による応力 σ_n は

$$\sigma_n = \frac{5\sigma_y L}{\pi d} (-2\bar{v} + \bar{w}) \quad (17)$$

で表われ、2 つの曲げモーメント ($M_{x'y'}$ と $M_{x'z'}$) による曲げ応力 σ_m 分布は以下の式で表われる。

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \frac{20\sqrt{2}\sigma_y}{\pi} \bar{v} \left(\frac{2y'}{d}\right) + \frac{10\sqrt{6}\sigma_y}{\pi} \bar{w} \left(\frac{2z'}{d}\right) \\ &= D_1 \left(\frac{2y'}{d}\right) + D_2 \left(\frac{2z'}{d}\right) \end{aligned} \quad (18)$$

図 9 に梁 AB 内の点 B における、軸方向 (x' 方向) の応力分布 $\sigma_{axial,B} (= \sigma_m + \sigma_n)$ を示す。この図からわかるように、断面中央 ($y'=0, z'=0$) での軸方向応力 $\sigma_{axial,B} < 0$ であり、梁 AB には軸力 N および 2 つの曲げモーメントによる応力分布が混在する、すなわち、先述の BCCZH 構造とは異なり、軸力の影響も考慮して塑性崩壊応力を評価しなければならない。なお、ここでは断面として y' 方向の結果のみを示しているが、 z' 方向の応力分布も同様であった。

次に、梁 AB の塑性崩壊応力を求めるため、図 10 に示す 3 次元の塑性降伏曲面⁽⁶⁾を用いる。

図 10 中の点 F における合モーメント M は、以下の式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{M}{M_P} &= \frac{1}{D_1 + D_2} \sqrt{D_1^2 \left(\frac{M_{x'y'}}{M_P}\right)^2 + D_2^2 \left(\frac{M_{x'z'}}{M_P}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{D_1^4 + D_2^4}}{D_1(D_1 + D_2)} \cdot \left(\frac{M_{x'y'}}{M_P}\right) = K \left(\frac{M_{x'y'}}{M_P}\right) \end{aligned} \quad (19)$$

本研究では前報⁽⁴⁾と同様、軸力 N と合モーメント M を同時に受ける梁の塑性限界を表す曲線⁽⁷⁾

$$\left(\frac{M}{M_P}\right) =$$

Fig. 9 Distribution of the axial stress in a f_2BCCH , $\sigma_{axial,B}$, at the junction B

Fig. 10 Schematic of interaction limit curve due to axial load N and two moments $M_{x'y'}$ and $M_{x'z'}$

$$\cos^3 \left\{ \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{N}{N_P} \right) - \left(\frac{M}{M_P} \right)^{1/3} \sqrt{1 - \left(\frac{M}{M_P} \right)^{2/3}} \right\} \quad (20)$$

を用いる。ただし、上式中の M/M_P を $M/(KM_P)$ で置き換え、二分法などの反復計算により降伏曲面上の M, N の値を算出する。以降の具体的な計算方法は、前報⁽⁴⁾での f_2BCC 構造と同様であり、ここでは紙面の関係上省略する。

一方、梁 BD において、接合点 B での曲げモーメント M_{xz} と軸力 N は、以下の式で表される。

$$\begin{cases} M_{xz} = -\frac{15\sqrt{2}d^3\sigma_y}{64} (\bar{v} + 3\bar{w}) \\ N = \frac{5dL\sigma_y}{8} (-\bar{v} + 3\bar{w}) \end{cases} \quad (21)$$

式 (21) を用いて求めた、梁 BD における塑性崩壊時の応力を $\sigma_{pl,BD}^*$ で表わす。

同様に、梁 BE において、接合点 B での曲げモーメント M_{yz} と軸力 N は、以下の式で表される。

$$\begin{cases} M_{yz} = -\frac{15\sqrt{2}d^3\sigma_y}{64}(5\bar{v}+3\bar{w}) \\ N = \frac{5dL\sigma_y}{8}(5\bar{v}+3\bar{w}) \end{cases} \quad (22)$$

式 (22) を用いて求めた梁 BE における、塑性崩壊時の応力を $\sigma_{pl, BE}^*$ で表わす。

図 11 には、 f_2BCCH 構造に対し FEM 解析で求めた塑性崩壊応力 $\sigma_{pl, FEM}^*$ と、3 種類の梁の塑性崩壊時の応力 $\sigma_{pl, AB}^*, \sigma_{pl, BD}^*, \sigma_{pl, BE}^*$ を比較している。ここで、 $\sigma_{pl, FEM}^*$ はラティス構造に 0.2% の塑性ひずみが生じたときの応力値として定義した。この図からわかるように、梁の直径 d とセル一辺の長さ L との比 d/L の大小に関わらず、梁 AB の塑性崩壊応力は、他の 2 本の梁 (BD と BE) での値よりも、常に大きな値となる。また、FEM 解析で求めた $\sigma_{pl, FEM}^*$ は各 d/L において $\sigma_{pl, AB}^*$ と $\sigma_{pl, BD}^*$ の間で変化する。

Fig. 11 Comparisons of σ_{pl}^* for strands AB , BD and BE in a f_2BCCH structure

3. 解析結果および検討

3.1 各ラティス構造での機械特性の比較

図 12 には、梁の直径 d とセル一辺の長さ L との比 $d/L=0.08$ で、内部構造が異なる 5 種類のラティス構造を圧縮したときの、圧縮応力とひずみとの関係を示す。この図から分かるように、 BCC と $BCCZH$ 構造での圧縮応力とひずみとの関係は、他の構造 (f_2BCC , f_2BCCH , $BCCZ$) に比べ小さく、両者は近い特性を持つ。また、 $BCCZ$ 構造は他の構造に比べ、変形初期の剛性 E^* は最も大きい、応力とひずみの関係が非線形となるひずみは最も小さく、塑性崩壊応力 σ_{pl}^* は f_2BCC や f_2BCCH 構造に比べ小さい。

Fig. 12 Comparisons of compressive stress-strain curve for five kinds of lattice structures

次に、これらラティス構造のうち、最も機械特性に優れた構造を評価するため、初期剛性 E^* と塑性崩壊応力 σ_{pl}^* に対し、相対密度 ρ^*/ρ_s で除した値をそれぞれ E_{rel}^* と $\sigma_{pl, rel}^*$ で表し、図 13(a), (b) に示す。ここで、相対密度 ρ^*/ρ_s とは、空間内でラティス構造が占める割合を意味し、以下の式で表される。

$$\rho^*/\rho_s = \begin{cases} \sqrt{3}\pi\left(\frac{d}{L}\right)^2 & (BCC) \\ \left(\sqrt{3} + \frac{1}{4}\right)\pi\left(\frac{d}{L}\right)^2 & (BCCZ, BCCZH) \\ \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)\pi\left(\frac{d}{L}\right)^2 & (f_2BCC, f_2BCCH) \end{cases} \quad (23)$$

図 13(a), (b) からわかるように、初期剛性 E_{rel}^* と塑性崩壊応力 $\sigma_{pl, rel}^*$ は、共に $BCCZ$ 構造が一番高い値を示すが、荷重方向が変わることで $BCCZH$ 構造となり、そのときの E_{rel}^* は、補強していない BCC 構造のそれとほとんど変わらない。一方、 f_2BCC 構造においては、荷重方向の違いに関わらず、常に安定して高い値となる結果を示した。

なお、 $BCCZ$ 構造においては、圧縮方向に沿った梁が存在するため、塑性崩壊の前に梁が弾性座屈して構造が崩壊する場合が考えられる。そこで、ユニットセルを構成する梁の直径 d と長さ L を幾つか変えて FEM 解析を行い、塑性崩壊応力 σ_{pl}^* と Timoshenko らによる弾性座屈応力の理論解⁽⁸⁾と比較した結果、 $d/L > 0.05$ の範囲において、 σ_{pl}^* の値は座屈応力よりも小さく、弾性座屈する前に塑性崩壊を生じることを確認している。

従って以上の結果より、検討したラティス構造のうち、 f_2BCC 構造が負荷方向の違いによる影響は小さく、

最も優れた機械特性を有する構造であるといえる。

(b) Relative value of plastic collapse strength $\sigma_{pl,rel}^*$

Fig. 13 Variations of E_{rel}^* and $\sigma_{pl,rel}^*$ for five kinds of lattice structures

3.2 不完全セルの存在による機械特性への影響

緒言でも述べたように、実際のラティス構造を作製した場合、提案した理論モデルでは表わすことができない不完全セルが存在し、そのためラティス構造全体の機械特性に影響を及ぼすことがある。この不完全セルの影響は、BCC 以外の全てのラティス構造に当てはまるが、以下では紙面の関係上 BCCZ 構造のみ示す。

図 14(a)(b) は、BCCZ 構造を $8L \times 8L \times 8L$ の大きさに作製したときの形状を、概略図として示す。ここで、図 14(a) は、図 2(b) のユニットセルのみで構成した BCCZ 構造、図 14(b) は、図 2(b) のユニットセルとは異なる形状の不完全セルも含む BCCZ 構造を表す。図 14(b) の構造に含まれる、2 種類の不完全セル (Z1 と Z2) の形状を図 15(a),(b) に示す。

Fig. 14 Schematics of BCCZ lattice structure composed of complete and partially-complete unit cells

(a) Partially-complete cell (Z1) (b) Partially-complete cell (Z2)

Fig. 15 Schematic BCCZ lattice structure consists of unit and partially-complete cells

Z1, Z2 のモデル単体での初期剛性 E^* は、前述の方法と同様にして、以下のように求められる。

$$E_{Z1}^* = \frac{\pi E}{2} \cdot \frac{(1+2\sqrt{3})(d/L)^2 + 2}{1+2(L/d)^2} \quad (24)$$

$$E_{Z2}^* = \pi E \cdot \frac{(1+\sqrt{3})(d/L)^2 + 2}{1+2(L/d)^2} \quad (25)$$

前報⁽⁴⁾、および前節までに求めたラティス構造の機械特性は、ユニットセルのみで構成された図 14(a) の場合の結果であり、図 14(b) の構造が十分大きければ、周辺の不完全セルの影響が小さくなるため、両者の結果は一致すると考えられる。

不完全セルを含む BCCZ ラティス構造の機械特性 (ここでは初期剛性とする) $E_{BCCZ,a}^*$ は、 x, y 方向に $NL \times NL$ の大きさを持つ場合、以下の式より算出できる。

$$E_{BCCZ,a}^* = E_{BCCZ}^* \cdot \frac{(N-1)^2}{N^2} + E_{Z1}^* \cdot \frac{2(N-1)}{N^2} + E_{Z2}^* \cdot \frac{1}{N^2} \quad (26)$$

ここで、式中の N は x, y 方向に配置したセルの個数を表す。図 16(a) は、種々の直径と一辺の比 d/L にお

る, $E_{BCCZ,a}^*$ の値を比較したものである. 図中にはセルの個数 $N=7, 9, \infty$ と変化させた時の結果を示し, 各線は式 (26) による理論結果を示す. この結果からわかるように, 不完全セルの存在により初期剛性 E^* は上昇し, 直径とセル一辺の長さの比 d/L の増加とともに大きくなる. また, いずれの個数 N での結果も, 式 (26) を用いて精度よく求められていることがわかる.

次に, 個数 N の影響を定量的にみるため, 不完全セルの影響を持つ初期剛性 $E_{BCCZ,a}^*$ と, 不完全セルを持たない図 14(a) の構造での初期剛性 E_{BCCZ}^* との比をとり, その結果を図 16(b) に示す. また, 両者の比は, 本理論解析結果より以下の式で表わされる.

$$\frac{E_{BCCZ,a}^*}{E_{BCCZ}^*} = 1 + \left(\frac{2}{N} + \frac{1}{N^2} \right) \cdot \frac{(d/L)^2 + 2}{(1 + 4\sqrt{3})(d/L)^2 + 2} \cong \left(1 + \frac{1}{N} \right)^2. \quad (27)$$

この結果からわかるように, 両者の比は個数 N が小さくなるにつれ増加し, 4 に近づく. また, N の増加とともに小さくなり, 影響が十分小さいとみなせるのは, 平面内にセルを 10000 個 ($N=100$) 以上並べた場合であるといえる. ここでは初期剛性 E^* のみ検討を行ったが, 塑性崩壊応力 σ_{pl}^* についても不完全セルの影響がなくなるのは, 同様に $N > 100$ 程度であった.

4. 結 言

本研究では, 圧縮方向の違いや作製したラティス構造内に現れる不完全セルの存在による機械特性への影響について検討を行った. 解析結果により以下の結論が得られた.

- (1) $BCCZH$ 構造の機械特性は補強していない BCC 構造のそれとほぼ等しい.
- (2) f_2BCC 構造は圧縮方向の違いにかかわらず安定して高い機械特性を有する.
- (3) 不完全セルの存在によりラティス構造の機械特性を表す E^* と σ_{pl}^* の値は増加し, 影響が十分小さいとみなせるのは, 平面内にセルを 10000 個 ($N=100$) 以上並べた構造の場合である.

文 献

- (1) Gibson, L.J. & Ashby, M.F., *Cellular Solids: Structure and Properties*, (1999), pp.15-51, Cambridge University Press.
- (2) Mines, R.A.W., *On the characterization of foam and micro lattice materials used in sandwich construction*, *Strain*, Vol.44(2008), pp. 71-83.
- (3) McKown, S., Shen Y., Brookes, W.K., Sutcliffe, C., Cantwell, W.J., Langdon, G. and Nurick, G.N., *The quasi-static and blast response of lattice structures*, *International Journal of Impact Engineering*, Vol.35(2008), pp. 795-810.

(a) Relationship between $E_{BCCZ,a}^*$ and d/L

(b) Variation of $E_{BCCZ,a}^*/E_{BCCZ}^*$ with number of cells N

Fig. 16 The Effect of partially-complete cells on the initial stiffness $E_{BCCZ,a}^*$

- (4) Ushijima, K., Cantwell, W.J. and Chen, D.-H., *Evaluation of the mechanical properties of lightweight lattice structures subjected to compressive loading, 1st report, Analytical approach for the initial stiffness and plastic collapse strength(in Japanese)*, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A, Vol.75, No.753(2009), pp. 572-579.
- (5) Jones N., *Structural Impact*, (1997), pp. 22-61, Cambridge University Press.
- (6) Chen W.C. & Atsuta, T., *Theory of Beam-Columns Volume 2 Space behavior and design*, (1977), pp. 195-269, McGraw-Hill.
- (7) Xie, L.S. & Chan, K.C., *The effect of strut geometry on the yielding behaviour of open-cell foams*, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol.48(2006), pp.249-255.
- (8) Timoshenko, S.P. and Gere, J.M., *Theory of Elastic Stability*, (1961), pp.46-59.