柔軟節の回転特性に基づく周期正方セル構造の短波長座屈モード*

田 中 展^{*1}, 渋谷 陽 二^{*1,*2}Short Wave-Length Buckling Modes of Periodic Square Cell Structures
Based on the Rotational Characteristics of Flexible JointsHiro TANAKA^{*3} and Yoji SHIBUTANI^{*3} Department of Mechanical Engineering, Osaka University,
2-1 Yamadaoka, Suita-shi, Osaka, 565-0871 Japan

The mechanical properties of spatial structures constructed of joints and beam members are strongly influenced by both their geometrical configurations and joint rigidities. From the standpoint of joint flexibility, we have formulated the elastic deformation model of a two-dimensional flexibly jointed structure with multi-rotational nodes. The aim of this paper is to make clear the relationship between overall buckling characteristic and local rotations of the flexibly jointed structure. To this end, the structural instability of periodic square cells under equi-biaxial compression is evaluated by applying our proposed model, and it is clarified that the short wave-length buckling modes are determined by the combinations of multi-rotational modes of flexible joints.

Key Words: Flexible Joint, Square Cell, Short Wave-Length Buckling, Equi-Biaxial Compression

1. 緒 言

微視的単位空間を有する空間構造体は日常に多く観察される。例えば、建築骨組や大型橋梁は工業的に特化したマクロな空間構造体であり⁽¹⁾、ハニカム材やフォーム材などのセル状材料は一般に高比剛性に優れた構造材料としてミクロな空間構造体に位置付けられる⁽²⁾。空間構造体ははり部材とそれらを連結する節で構成され、超軽量性、高機能性および空間制約などの各種要求に応じた構造設計が可能となるため、その力学特性を理解することは工学上きわめて重要である。

著者らは、より広い視点から空間構造体がもたらす多彩な変形様式を理解することを目的として、節の多回転相互作用に着目した2次元柔軟節構造体の弾性変形モデルを構築し、節の柔軟性に依存した空間構造体特有の変形機構を見出した^{(3)~(5)}。空間構造体の変形様式の多くは微視構造の回転が伴い、力場は幾何形状に準ずるモーメントの相互作用が支配的となる。座屈分岐はその代表例であり、微視構造の変形が圧縮から回転に移行することで構造は対称性を失う。特に、六方セルは工業的用途の豊富さと高対称性に対する物理的

関心から精力的に研究がなされているハニカム材のひとつであり、面内圧縮下における六方セルの多様な座屈モードと座屈後挙動が、実験^{(6)~(7)}ならびに有限要素法^{(8)~(9)}、代表体積要素法⁽¹⁰⁾および群論的分岐理論に基づくブロック対角化法^{(11)~(12)}などの数値解析より得られることが報告されている。一方、正方ハニカムも高表面積と高比剛性の利点から触媒コンバーターや熱交換器に応用されており^{(13)~(14)}、面内圧縮下における弾性/弾塑性正方セルの短波長および長波長座屈モードが古典はり理論⁽¹⁵⁾や均質化理論によるマルチスケール解析^{(16)~(17)}より求められている。セル構造体の微視的分岐と巨視的不安定の関係は周期材料の座屈分岐に対する関心事のひとつであり^{(18)~(22)}、正方ハニカムの場合、その巨視的不安定点は微視的な正方セルの長波長座屈に相当することが報告されている⁽¹⁶⁾。

本研究では、節の回転特性に関する基礎知識を充実させ、柔軟節構造体の基本的な座屈メカニズムを理解することを目的とする。そのため、解析対象は等二軸圧縮下における柔軟節を有する周期正方セルの短波長座屈モードに限定する。そこで本論文では、はじめに柔軟節モデルを定式化し、多回転相互作用を表すヘシアン行列から柔軟節の基本回転モードを導出する。そして、正方セルの等二軸圧縮座屈解析より求めた座屈モードの幾何学的対称性と節の回転対称性の相関を2面体群^{(23)~(24)}を用いて整理し、得られた結果より柔軟

* 原稿受付 2009年6月1日。

^{*1} 正員、大阪大学大学院工学研究科機械工学専攻(☎565-0871 吹田市山田丘2-1)。^{*2} 正員、フェロー、大阪大学大学院工学研究科附属原子分子イオン制御理工学センター。

E-mail: htanaka@mech.eng.osaka-u.ac.jp

節の回転特性が及ぼす正方セルの構造不安定性について議論する。

2. 定式化

本章では、文献⁽³⁾⁻⁽⁵⁾に基づいた柔軟節モデルの定式化を行い、柔軟節の回転特性および柔軟節構造体の弾性保存系について記述する。

2.1 柔軟節の多回転エネルギー 有限な 2 次元領域 $[\Omega := x \times y \subset \mathcal{R}^2]$ 上で n 組のはりセグメントと連結する結合節を n 位柔軟節 (joint (n)) と呼ぶ。このとき、 n 位柔軟節は $2+n$ 組の独立な並進/回転自由度を有し、その一般化変位ベクトルおよび一般化荷重ベクトルを以下のように定義する。

$$d_{(n)}(x, y) = \{u \ w \ \theta_1 \ \cdots \ \theta_n\}^T \quad (1)$$

$$f_{(n)}(x, y) = \{P \ F \ M_1 \ \cdots \ M_n\}^T \quad (2)$$

ここで、 u, w は各軸方向の並進変位を表し、 θ_i ($i = 1, \dots, n$) は i 番目の回転変位を表す。ただし、柔軟節上の結合番号 i は反時計回りでカウントする。また、 P, F は各軸方向の集中荷重を表し、 M_i は i 番目の回転モーメントを表す。 x 軸を基準軸とし、基準軸からの i 番目の初期方位角を θ_i^0 とすると、 n 位柔軟節の相対結合角 θ_{ij} は以下ようになる。

$$\theta_{ij} = (\theta_j^0 + \theta_j) - (\theta_i^0 + \theta_i), \quad (i, j) \in B_n \quad (3)$$

ここで、集合 B_n は以下の結合番号の組み合わせを表す。

$$B_n = \{0 < a < b \leq n \mid (a, b) \in \mathcal{N}^2\} \quad (4)$$

このとき、 n 位柔軟節の多回転エネルギー $U_{(n)}$ を相対結合角を用いて以下で記述する。

$$U_{(n)}(\{\theta_{ij} \mid (i, j) \in B_n\}) = \sum_{j>i}^n \Phi_{ij}(\theta_{ij}) \quad (5)$$

ここで、 Φ_{ij} は θ_{ij} に関する C^2 -級半正値関数とする。 Φ_{ij} が全て調和関数であり、初期平衡状態において $U_{(n)} = 0$ を満たすとき、式 (5) は次式のように簡易化される。

$$U_{(n)} = \sum_{j>i}^n \frac{1}{2} k_{ij} (\theta_j - \theta_i)^2 \quad (6)$$

ここで、 k_{ij} は各結合間の回転剛性を表す。いま、初期状態において相対結合角が等しい回転剛性は等価であると仮定する。本研究では、この仮定を回転剛性の対称性と呼ぶ。回転剛性の対称性を課した場合、最隣接の相対結合角が全て等しい n 位柔軟節の回転剛性は以下のように記述できる。

$$k_{ij} = k_m \text{ and } k_m = k_{n-m}, \quad m = \{j-i \mid (i, j) \in B_n\} \quad (7)$$

すなわち、 k_m は第 m 隣接間の回転剛性を表す。

2.2 柔軟節の基本回転モード 式 (5) で与えた多回転エネルギー $U_{(n)}$ の回転変位に関するヘシアン行列 $H_{(n)} \in \mathcal{R}^{n \times n}$ は次のように求められる。

$$H_{(n),ij} = \frac{\partial^2 U_{(n)}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \begin{cases} \sum_{k \neq i}^n \frac{\partial^2 \Phi_{ik}}{\partial \theta_i^2}, & i = j \\ -\frac{\partial^2 \Phi_{ij}}{\partial \theta_i^2}, & i \neq j \end{cases} \quad (8)$$

ここで、 Φ_{ij} の定義より各回転変位 θ_i において混合微分の連続性が保証されるため、式 (8) のヘシアン行列は対称行列となる。すなわち、 $H_{(n)} = H_{(n)}^T$ 。したがって、式 (6)-(8) から、回転剛性の対称性を課した線形ヘシアン行列 $\bar{H}_{(n)}$ は次式のようになる。

$$\bar{H}_{(n)} = \sum_{m=1}^{n-1} k_m (I_n - I_n^m) = k_0 I_n - \sum_{m=1}^{n-1} k_m I_n^m \quad (9)$$

ここで、 $k_0 = \sum_{m=1}^{n-1} k_m$ とする。また、 $I_n^m \in \mathcal{R}^{n \times n}$ は以下の成分表示を満足する行列として定義する。

$$I_{n,ij}^m = \begin{cases} 1, & \text{if } j = (i+m) \bmod n \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (10)$$

ただし、 I_n は n 次単位行列を表し、 $I_n^0 = I_n$ となる。式 (10) より行列 I_n^m は以下の二つの演算を満足する。

$$I_n^a I_n^b = I_n^{(a+b) \bmod n}, \quad I_n^{aT} = I_n^{-a} \quad (11)$$

したがって、行列 I_n^m は位数 n の有限巡回群 C_n の各元に対応した以下の表現行列 $T(g)$ に相当する。

$$I_n^m = T(g), \quad g \in C_n = \{e, r^1, \dots, r^m, \dots, r^{n-1}\} \quad (12)$$

ここで、 r^i は i 回の回転変換を表し、 $e = r^0$ は単位変換を表す。

式 (9) より行列 $\bar{H}_{(n)}$ は I_n^m の線形和で記述され、この行列形式より $\bar{H}_{(n)}$ は巡回行列に属する⁽²⁵⁾⁽²⁶⁾。このとき、以下で与えた $\bar{H}_{(n)}$ の標準固有値問題を考える。

$$\bar{H}_{(n)} \xi_q = \lambda_q \xi_q, \quad q = 0, 1, \dots \quad (13)$$

ここで、 $\lambda_q \in \mathcal{R}$ および $\xi_q \in \mathcal{R}^n$ は q 次の固有値および固有ベクトルを表す。いま、 $\xi_q^{(i)}$ を以下で定義したとき、

$$T(r^i) \xi_q = \xi_q^{(i)}, \quad i = 0, \dots, n-1, \quad (14)$$

表現行列 T の直交性より次式の関係が成り立つため、 ξ_q の回転変換に対して式 (13) は不変である。

$$\begin{aligned} T(r^i) \bar{H}_{(n)} T(r^i)^T T(r^i) \xi_q &= \lambda_q T(r^i) \xi_q \\ \Leftrightarrow I_n^i \left(k_0 I_n - \sum_{m=1}^{n-1} k_m I_n^m \right) I_n^{-i} \xi_q^{(i)} &= \lambda_q \xi_q^{(i)} \\ \Leftrightarrow \bar{H}_{(n)} \xi_q^{(i)} &= \lambda_q \xi_q^{(i)} \end{aligned} \quad (15)$$

Fig. 1 Schematic drawings of all possible eigenvectors of unit regular joint (4): (a) a co-rotation mode (ξ_0 for $\lambda_0 = 0$), (b)–(d) asymmetrical rotation modes ($\xi_1^{(0)}$, $\xi_1^{(1)}$, and $\xi_1^{(0)} + \xi_1^{(1)}$ for $\lambda_1 = 2k_1 + 2k_2$), (e) a contra-rotation mode (ξ_2 for $\lambda_2 = 4k_1$). The symbols $\oplus$ show the initial states of regular joints (4).

Table 1 Eigenvalue and eigenvector of $\bar{H}_{(n)}$ for each joint (n) as $n = 3 \sim 6$.

		$q = 0$	$q = 1$	multiple root	$q = 2$	multiple root	$q = 3$
$\bar{H}_{(3)}$	λ_q	0	$3k_1$				
	$\xi_q \in \mathcal{R}^3$	+1 +1 +1	+1 -1/2 -1/2	$\{\xi_1^{(0)}, \xi_1^{(1)}, \xi_1^{(2)}\}$			
$\bar{H}_{(4)}$	λ_q	0	$2k_1 + 2k_2$		$4k_1$		
	$\xi_q \in \mathcal{R}^4$	+1 +1 +1 +1	+1 0 -1 0	$\{\xi_1^{(0)}, \xi_1^{(1)}\}$	+1 -1 +1 -1		
$\bar{H}_{(5)}$	λ_q	0	$(2 - \tau_2)k_1 + (2 + \tau_1)k_2$		$(2 + \tau_1)k_1 + (2 - \tau_2)k_2$		
	$\xi_q \in \mathcal{R}^5$	+1 +1 +1 +1 +1	+1 $+\tau_2/2$ $-\tau_1/2$ $-\tau_1/2$ $+\tau_2/2$	$\{\xi_1^{(i)} \mid i = 0 \sim 4\}$	+1 $-\tau_1/2$ $+\tau_2/2$ $+\tau_2/2$ $-\tau_1/2$	$\{\xi_2^{(i)} \mid i = 0 \sim 4\}$	$\tau_1 = \frac{+1+\sqrt{5}}{2}$ $\tau_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
$\bar{H}_{(6)}$	λ_q	0	$k_1 + 3k_2 + 2k_3$		$3k_1 + 3k_2$		$4k_1 + 2k_3$
	$\xi_q \in \mathcal{R}^6$	+1 +1 +1 +1 +1 +1	+1 $+1/2$ $-1/2$ -1 $-1/2$ $+1/2$	$\{\xi_1^{(0)}, \xi_1^{(1)}, \xi_1^{(2)}\}$	+1 $-1/2$ $-1/2$ +1 $-1/2$ $-1/2$	$\{\xi_2^{(0)}, \xi_2^{(1)}, \xi_2^{(2)}\}$	+1 -1 +1 -1 +1 -1

式 (13) の標準固有値問題は、巡回行列の定理より次式のように実部の解析解として求める⁽²⁶⁾。

$$\lambda_q = -\sum_{m=0}^{n-1} k_m \cos(-2\pi qm/n) \quad (16)$$

$$\xi_q = \{1 \cos(-2\pi q/n) \cdots \cos(-2\pi q(n-1)/n)\}^T \quad (17)$$

例えば、 $n = 4$ のとき、固有値とそれに対応する固有ベクトルはそれぞれ以下になる。

$$\begin{aligned} \lambda_0 = 0 & : \xi_0 = \{+1 \ +1 \ +1 \ +1\}^T \\ \lambda_1 = 2k_1 + 2k_2 & : \xi_1^{(0)} = \{+1 \ 0 \ -1 \ 0\}^T \\ (\text{multiple root}) & : \xi_1^{(1)} = \{0 \ +1 \ 0 \ -1\}^T \\ \lambda_2 = 4k_1 & : \xi_2 = \{+1 \ -1 \ +1 \ -1\}^T \end{aligned} \quad (18)$$

ここで、 $\xi_1^{(2)}$, $\xi_1^{(3)}$ は、鏡映関係 $\xi_1^{(2)} = -\xi_1^{(0)}$ と $\xi_1^{(3)} = -\xi_1^{(1)}$ をそれぞれ満足するため省略する。式 (18) の各固有ベクトルは 4 位柔軟節の基本回転モードを表す。

いま、各回転モードに回転変換を作用させると、

$$\begin{aligned} I_4^0 \xi_0 &= I_4^1 \xi_0 = I_4^2 \xi_0 = I_4^3 \xi_0 = \xi_0 \\ I_4^0 \xi_1^{(0)} &= \xi_1^{(0)}, I_4^1 \xi_1^{(0)} = -\xi_1^{(1)}, I_4^2 \xi_1^{(0)} = -\xi_1^{(0)}, I_4^3 \xi_1^{(0)} = \xi_1^{(1)} \\ I_4^0 \xi_1^{(1)} &= \xi_1^{(1)}, I_4^1 \xi_1^{(1)} = \xi_1^{(0)}, I_4^2 \xi_1^{(1)} = -\xi_1^{(1)}, I_4^3 \xi_1^{(1)} = -\xi_1^{(0)} \\ I_4^0 \xi_2 &= \xi_2, I_4^1 \xi_2 = -\xi_2, I_4^2 \xi_2 = \xi_2, I_4^3 \xi_2 = -\xi_2, \end{aligned} \quad (19)$$

となる。式 (19) より ξ_0 は 4 回対称性が保持された共回転モードである。一方、 $\xi_1^{(1)}$, $\xi_1^{(2)}$ およびその線形和 $\xi_1^{(1)} + \xi_1^{(2)}$ は非対称回転モードであり、また、 ξ_2 は 2 回対称の反対回転モードである。これら各モードの回転様式をそれぞれ図 1(a)–(e) に示す。次に、 $n = 3$ から $n = 6$ までの柔軟節の固有値と基本回転モードの関係を表 1 に整理する。表 1 より、全ての柔軟節は固有値 0 の共回転モード (0 次モード) を有する。また、 $n = 4$ のとき、その全固有ベクトルは $\{0, \pm 1\}$ の要素から成り、互いに直交していることがわかる。一方、 $n = 3, 5, 6$ の場合、重解の固有値から得られる固有ベクトル $\xi_q^{(i)}$

は回転変換に対して直交関係を満たさない。ただし、表1で与えた $\xi_q^{(j)}$ は、全ての異なる固有値の固有ベクトル空間と直交する平面(直交補空間)上のベクトルのひとつであることに注意する。例えば、 $n=3$ の場合、 $\langle \xi_0, \xi_1 \rangle = 0$ を満たす任意の ξ_1 が選択できる。

2.3 柔軟節構造体の弾性保存系 いま、 N_j 組の柔軟節と N_s 組のはりセグメントで構成された安定な平衡状態を有する2次元柔軟節構造体の弾性保存系を考える。このとき、系のポテンシャルエネルギーを以下で与える。

$$\Pi = \sum_{\alpha=1}^{N_j} U_{(n)}^{\alpha} + \sum_{\beta=1}^{N_s} U_s^{\beta} - W \quad (20)$$

式(20)の右辺第1項は、式(6)で与えた柔軟節の回転ポテンシャルエネルギーの総和を表す。また、第2項ははりセグメントのひずみエネルギーの総和を表す。本モデルにおけるはりセグメントは微小ひずみの仮定の下、大変位/大回転を許容する3節点はり要素で定式化されており、文献⁽³⁾に詳細が記述されている。第3項は外力による仕事を表す。いま、系全体の変位ベクトルを $d \in \mathcal{R}^{f_j+f_s}$ で定義し、それに対応する外力ベクトルを $f \in \mathcal{R}^{f_j+f_s}$ で定義する。ここで、 f_j は全柔軟節の総自由度、 f_s は全はりセグメントの総自由度を示す。このとき、式(20)より系のポテンシャルエネルギーの d に対する第一変分を以下に得る。

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= \sum \delta U_{(n)}^{\alpha} + \sum \delta U_s^{\beta} - \delta W \\ &= \left\{ \sum q_{(n)}^{\alpha T} + \sum q^{\beta T} - f^T \right\} \delta d \end{aligned} \quad (21)$$

ここで、 $q_{(n)}^{\alpha} \in \mathcal{R}^n$ 、 $q^{\beta} \in \mathcal{R}^9$ はそれぞれ柔軟節 α の内モーメントベクトルおよびはりセグメント β の内力ベクトルを表す。弾性保存系における全ポテンシャルエネルギーの停留条件 $\delta \Pi = 0$ より、式(21)から以下の非線形方程式が得られる。

$$f = \sum q_{(n)}^{\alpha} + \sum q^{\beta} = q(d) \quad (22)$$

さらに、式(22)の局所線形増分から以下のような接線剛性行列 $'G \in \mathcal{R}^{(f_j+f_s) \times (f_j+f_s)}$ が要素内力ベクトルのヤコビ行列で導出される。

$$\begin{aligned} \Delta f &= \left[\sum \frac{\partial q_{(n)}^{\alpha}}{\partial d^{\alpha}} + \sum \frac{\partial q^{\beta}}{\partial d^{\beta}} \right] \Delta d \\ &= \left[\sum \bar{H}_{(n)}^{\alpha} + \sum 'K^{\beta} \right] \Delta d \\ &= 'G \Delta d \end{aligned} \quad (23)$$

ここで、行列 $'K^{\beta}$ は3節点要素のはりセグメント β の接線剛性行列である⁽³⁾⁽⁴⁾。

3. 周期正方セルの等二軸座屈問題

3.1 解析条件 第2章で述べた柔軟節が有する基本回転モードを踏まえて、図2(a)に示すような4位柔軟節で連結された正方セルの等二軸圧縮問題を考える。荷重負荷を比例荷重係数 Λ と参照荷重ベクトル f_{ref} の積で表し、図2(b)に示すような変位境界条件を与える。ここで、各変位変数の上付添字は図2(b)の節点番号に対応し、変位拘束が課された各セル壁の節点は圧縮以外の変位に対して周期条件を満足している。また、セル壁上の回転変位も周期条件を満たすとする。はり部材は3節点要素で10要素に分割され、その部材長を $L=20$ とする。そして、はり部材の軸剛性および曲げ剛性をそれぞれ $EA=200.0$ 、 $EI=2.0$ とする。本解析では、図3に示すような2種類の4位柔軟節を用いる。図3(a)は、最隣接はり部材間のみ回転ばねを内挿した柔軟節モデルであり、Joint A と呼称する。また、図3(b)は、半剛節はり部材が剛連結した柔軟節モデルを表し、Joint B と呼称する。これらのヘシアン行列はそれぞれ以下のように表される。

$$\bar{H}_{(4)}^A = \frac{k}{4} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \bar{H}_{(4)}^B = \frac{k}{4} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad (24)$$

ここで、回転剛性を $k=2\mu EI/L$ で表し、 μ を柔軟係数とする。 $\mu \rightarrow \infty$ のとき、この柔軟節は剛節に近似さ

Fig. 2 Analytical model of a flexible jointed structure with 2×2 square cells: (a) a loading condition, (b) displacement boundary conditions.

Fig. 3 Two types of flexible joints (4).

Fig. 4 Bifurcation points from mode 1 to mode 9 as 'Joint A' modeling for $\mu = 1$.

Fig. 5 Measured buckling shapes of square cells under biaxial compression: (a)–(h) mode p , ($p = 1, \dots, 8$).

The deformation modes shown here are greatly magnified for clarity.

れ, $\mu \rightarrow 0$ のときは滑節に近似される. 式 (24) の導出に関しては文献⁽⁵⁾に詳細が記述されている.

3.2 数値解析結果 図 2 の解析モデルを対象にして, 比例荷重係 $q(d) = \Lambda f_{\text{ref}}$ における接線剛性行列 ' G ' が非正則 $\det(G) = 0$ であるとき, 座屈点と判定する. このとき, p 次座屈点においてクリティカルな座屈係数 Λ_p^c および座屈モード $\phi_p^{(i)c}$ を以下で定義する.

$$G(\Lambda_p^c) \phi_p^{(i)c} = 0, \quad p = 1, 2, \dots, i = 1, \dots, M \quad (25)$$

ここで, 座屈係数 Λ_p^c を $\Lambda_1^c \leq \Lambda_2^c \leq \dots$ と順に並べる. また, 上付添字 (i) は分岐の多重度を表す. なお, 本数値解析においては, $\det(G)$ の正負符号の反転を利用

した二分法より座屈点を判定している⁽²⁷⁾.

はじめに, 柔軟係数 $\mu = 1$ のとき, Joint A の柔軟節モデルに対して得られた各座屈モードの分岐点を図 4 に示す. ここで, 縦軸は比例荷重係数 Λ を, 横軸は圧縮率 u^d/L (図 2(b) 参照) を表す. また, p 次座屈点に対応した各座屈形状をそれぞれ図 5(a)–(h) に示し, mode p と呼ぶ. 図 5(a) に示す mode 1 は最低次の座屈モードであり, 隣接する節が互いに逆方向に共回転することで生成される. この座屈モードは, 一般的な剛節骨組構造の理論解⁽¹⁵⁾および数値解析解⁽¹⁶⁾として得られ, 柔軟節の回転特性は寄与しない. 一方, mode 2 および mode 3 は共回転以外の回転モードが座屈に作用し,

Fig. 6 A pair of orthogonal eigenvector modes for mode 2: (a) $\phi_2^{(1)c}$ and (b) $\phi_2^{(2)c}$. Two pairs of orthogonal eigenvector modes for mode 3: (c–f) $\phi_3^{(i)c}$ ($i = 1, \dots, 4$). The figures 5(b) and (c) correspond to the linear sum of their modes: (mode 2) $\phi_2^{(1)c}/\sqrt{2} + \phi_2^{(2)c}/\sqrt{2}$, (mode 3) $\phi_3^{(1)c}/\sqrt{2} + \phi_3^{(2)c}/\sqrt{2}$.

Table 2 Buckling modes ($p = 1 \sim 5$) of 2×2 square cells under equi-biaxial compression.

mode	overall eigen vector	overall symmetry reduction	joint rotation	joint symmetry
$p = 1$	$\pm \phi_1^c$	$D_4 \rightarrow D_2^{1,4}, D_2^{2,4}$	ξ_0	C_4
$p = 2$	$\pm \phi_2^{(1)c}/\sqrt{2} \pm \phi_2^{(2)c}/\sqrt{2}$	$D_4 \rightarrow D_1^{1,4}, D_1^{2,4}, D_1^{3,4}, D_1^{4,4}$	$\{\xi_0, \xi_2\}$	C_4, C_2
$p = 3$	$\pm \phi_3^{(1)c}/\sqrt{2} \pm \phi_3^{(4)c}/\sqrt{2}$	$D_4 \rightarrow D_1^{1,4}, D_1^{2,4}, D_1^{3,4}, D_1^{4,4}$	$\{\xi_1^{(1)}, \xi_1^{(2)}\}$	C_1
	$\phi_3^{(3)c}/\sqrt{2} + \phi_3^{(4)c}/\sqrt{2}$	$D_4 \rightarrow D_4$	$\{\xi_1^{(1)}, \xi_1^{(2)}\}$	C_1
	$\phi_3^{(3)c}/\sqrt{2} - \phi_3^{(4)c}/\sqrt{2}$	$D_4 \rightarrow D_2^{1,4}, D_2^{2,4}$	$\{\xi_1^{(1)}, \xi_1^{(2)}\}$	C_1
$p = 4$	$\pm \phi_4^c$	$D_4 \rightarrow D_4$	ξ_2	C_2
$p = 5$	$\pm \phi_5^c$	$D_4 \rightarrow C_4$	ξ_0	C_4

これらの座屈モードは多重分岐となる。

mode 2 では、図 6(a), (b) で示す 1 対の直交したクリティカルな固有ベクトル $\phi_2^{(1)c}$ および $\phi_2^{(2)c}$ を有する 2 重分岐となる。図 5(b) に示す mode 2 はこの 1 対の固有ベクトルの線形和 $\cos \gamma \phi_2^{(1)c} + \sin \gamma \phi_2^{(2)c}$ ($\gamma = \pi/4$) で表され、係数の正負の組み合わせにより系の対称性が 4 軸対称から 4 パターンの 1 軸対称に低下する。mode 2 の特徴は、2 組の共回転モード ξ_0 と 2 組の反対回転モード ξ_1 で構成され、座屈係数が mode 1 に次いで小さくなる点である。mode 3 の座屈モードでは、2 対のクリティカルな固有ベクトル $\phi_3^{(1)c}, \phi_3^{(2)c}$ と $\phi_3^{(3)c}, \phi_3^{(4)c}$ を有する。その形状を図 6(c)–(f) に示すように各固有ベクトルは全ての節が非対称回転モード $\xi_1^{(1)}$ もしくは $\xi_1^{(2)}$ で表現されている。例えば、 $\xi_1^{(1)}$ の場合は図 6(c), (e) より x -軸方向の座屈モードを生成し、また、 $\xi_1^{(2)}$ の場合は図 6(d), (f) より y -軸方向の座屈モードを生成する。4 組のクリティカルな固有ベクトルを有するが、直交関係をもつ固有ベクトル以外が同時に重なり合うことはない。mode 4 の座屈モードは、図 5(d) に示すように全て柔軟節の反対回転モード ξ_2 で構成された単純分岐点となる。系全体の対称性が変化しない mode 4 は一般に全対称モードと呼ばれるが、柔軟節の局所的な回転対称性は低下している。

全ての柔軟節が同方向の共回転モードを示す mode 5 は、各はり部材が 1 波長の座屈形状となり、高次の

座屈モードに位置付けられる。mode 1 から mode 5 までの座屈モードに対する系の対称性の変化と柔軟節の回転モードの関係を表 2 に整理する。ここで、 $D_n, D_m^{k,n}$ はそれぞれ 2 面体群およびその部分群を表す^{(23) (24)}。表 2 が示すように、座屈モードの順序は局所的な柔軟節の回転モードに依存する。そして、選択された回転モードと周期境界条件に基づいて系の対称性が決定される。同様に、各はり部材のたわみが 1 波長になる高次座屈モードにおいても、座屈モードの順序は柔軟節の回転モードに依存する (図 5(e)–(h) 参照)。

次に、Joint A と Joint B の柔軟節モデルにおいて、柔軟係数 μ を変化させたときの各モードの座屈値の変動を調べる。図 7(a), (b) に各モデルの座屈値と柔軟係数の関係を示す。ここで、縦軸の座屈値は mode 1 の座屈係数で無次元化されている。図 7(a), (b) より、mode 1 および mode 5 は柔軟係数に依らず両モデルともに定値を示す。これは、mode 1 および mode 5 の座屈モードが柔軟節の共回転モード (固有値 0) で構成されているためである。また、Joint B では mode 3 と mode 4 の座屈値が完全に一致するのに対して、Joint A では mode 3 が mode 4 から分離する。この理由は、Joint A のヘシアン行列の場合、式 (18) より非回転対称モードの固有値 $k/2$ が反対回転モードの固有値 k より小さくなるためである。一方、Joint B では両回転モードの固有値は等しいため区別されない。また、柔

Fig. 7 Relationship between normalized buckling load factor Λ_p/Λ_1 and joint flexibility μ : (a) Joint A, (b) Joint B.

Fig. 8 Measured buckling shapes of square cells with fully rigid joints: (a) mode 3, (b) mode 4.

軟係数の極限に着目すると、 $\mu \rightarrow 0$ のとき mode 2~4 の座屈値が mode 1 の座屈値まで単調減少する。一方、 $\mu \rightarrow \infty$ のとき mode 3, 4 の座屈値は mode 5 に漸近する。例えば、剛節時の mode 3 と mode 4 の座屈モードを図 8(a), (b) に示すように、節上で回転が生じないため等価な変形エネルギーを要することがわかる。

以上のように、共回転モード以外で構成されている座屈モードは、その座屈値が節の柔軟性に強く依存するため、柔軟節構造体特有の座屈モードであると考ええる。

4. 考 察

柔軟節構造体モデルの目的は、柔軟節の多回転を含む一般化変位を用いて回転モーメントが支配的となる空間構造体の変形挙動を表現することである。2. では、材料質点上で共役な多自由度の回転変位とモーメントを定義し、結合隣接間の相互作用を回転剛性で記述した。これは、細長比の大きい部材を 1 次元はり要素で近似すると同様に、有限な体積の結合部を多回転相互作用を介する節点で近似したことを意味する。本論文で定義された柔軟係数 μ は $\mu \propto kL/EI$ の関係を有することから、節の柔軟性は対象構造の材料パラメータとサイズパラメータによって相対的に決定される。このように結合部の定性的な回転相互作用をモデル化した柔軟節より、式 (16), (17) のように基本回転モードとその固有値が容易に求められる。

また、3. では、はじめに等二軸圧縮下における正方セルの短波長座屈モードが柔軟節の基本回転モードで簡潔に整理できることを明らかにした。これは正方セルの座屈形状に対して 4 位柔軟節の局所的回転特性が密接に寄与していることを示唆する。さらに、図 7(a), (b) において柔軟係数と各モードの座屈値の関係を示した。この結果、最低次モードの座屈値は柔軟係数に依存しないことから、工学的な座屈問題において節の回転剛性は必ずしも必要ではないことがわかる。一方、高次モード (mode 2, 3, 4) の座屈値は柔軟係数に依存し、その座屈特性は 4 位柔軟節の回転特性と関連付けられた。本論文では、式 (24) で定式化した Joint A と Joint B を代表にして、基本回転モードの固有値 (k_1 と k_2 の組み合わせ) が座屈値の主因子であることを明らかにした。この結果より、多様な 4 位柔軟節の結合形態⁽⁵⁾に対しても、その回転剛性 k_1 と k_2 から各モードの座屈値が予測可能となる。最低次以上の座屈モードは物理的に顕在化しにくい。このような高次モードを誘起させるためには、基本回転モードを初期不整量として与えるなど柔軟節の回転特性を考慮に入れた新しい構造制御の概念が必要となる。

5. 結 言

2 次元柔軟節構造体の弾性変形モデルを用いて、等二軸圧縮下における柔軟節正方セルの短波長座屈モードを解析し、系全体の座屈特性と局所的な 4 位柔軟節の回転特性の関係について議論した。本研究で得られた知見を以下に整理する。

- (1) 柔軟節のヘシアン行列の固有値と固有ベクトルを巡回行列の性質から導出し、4 位柔軟節が有する 3 種類の基本回転モードを具体的に示した。

- (2) 等二軸圧縮下における周期正方セル (2×2 セル集合) の短波長座屈モードを計算した。そして、得られた座屈モードが 4 位柔軟節の局所的な回転モードの組み合わせで決定されることを示した。
- (3) 正方セルの最低次の座屈モードは、節の共回転モードで構成されており、その座屈値は柔軟係数に依存しない。一方、共回転モード以外で構成される座屈モードでは、その座屈値が柔軟係数に依存し、剛節や滑節で連結された正方セルの座屈値から分離することを示した。

謝 辞

なお、本研究の一部は、財団法人総合工学振興会の研究奨励金および科学研究費補助金萌芽研究 (20656020) の助成により行われたものである。ここに記して謝意を表する。

文 献

- (1) Saito, K., *The Story of Spatial Structures - A Turning Point for Structural Design* (in Japanese), (2003), Shoukoku-sha Co., Ltd.
- (2) Gibson, L.J. and Ashby, M.F., *Cellular Solids: Structure and Properties, Second Edition*, (1997), Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- (3) Tanaka, H. and Shibutani, Y., Large Deformability of 2D Framed Structures Connected by Flexible Joints, *Journal of Solid Mechanics and Materials Engineering*, **2-8** (2008), 1037–1048.
- (4) Tanaka, H., *Study on the Deformability and Structural Instability of Flexibly Jointed Structures* (In Japanese), (2009), Doctoral Thesis (Osaka Univ.).
- (5) Tanaka, H. and Shibutani, Y., In-plane Mechanical Behaviors of 2D Repetitive Frameworks with Four-coordinate Flexible Joints and Elbowed Beam Members, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, (in press).
- (6) Papka, S.D. and Kyriakides, S., In-plane Compressive Response and Crushing of Honeycomb, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **42** (1994), 1499–1532.
- (7) Papka, S.D. and Kyriakides, S., Biaxial Crushing of Honeycombs—Part I: Experiments, *International Journal of Solids and Structures*, **36** (1999), 4367–4396.
- (8) Guo, X.E. and Gibson, L.J., Behavior of Intact and Damaged Honeycombs: A Finite Element Study, *International Journal of Mechanical Sciences*, **41** (1999), 85–105.
- (9) Papka, S.D. and Kyriakides, S., In-plane Biaxial Crushing of Honeycombs—Part II: Analysis, *International Journal of Solids and Structures*, **36** (1999), 4397–4423.
- (10) Hohe, J. and Becker, W., Effective Mechanical Behavior of Hyperelastic Honeycombs and Two-dimensional Model Foams at Finite Strain, *International Journal of Mechanical Sciences*, **45** (2003), 891–913.
- (11) Saiki, I., Ikeda, K. and Murota, K., Appropriate Number of Unit Cells in a Representative Volume Element for Micro-structural Bifurcation Encountered in a Multi-scale Modeling, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **191** (2002), 2561–2585.
- (12) Saiki, I., Terada, K., Ikeda, K. and Hori, M., Flower Patterns Appearing on a Honeycomb Structure and their Bifurcation Mechanism, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **15** (2005), 497–515.
- (13) Ichikawa, Y., Umehara, K., Yamada, T., Hijikata, T. and Katsube, F., Advanced Ceramic Substrate: Catalytic Performance Improvement by High Geometric Surface Area and Low Heat Capacity, *SAE Paper*, (1997), 971029.
- (14) Hayes, A.M., Wang, A., Dempsey, B.M. and McDowell, D.L., Mechanics of Linear Cellular Alloys, *Mechanics of Materials*, **36** (2004), 691–713.
- (15) Wah, T., The Buckling of Gridworks, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **13** (1965), 1–16.
- (16) Ohno, N., Okumura, D., Niikawa, T., Long-wave Buckling of Elastic Square Honeycombs Subjected to In-plane Biaxial Compression, *International Journal of Mechanical Science*, **46** (2004), 1697–1713.
- (17) Erami, K., Ohno, N. and Okumura, D., Long-wave In-plane Buckling of Elastoplastic Square Honeycombs, *International Journal of Plasticity*, **22** (2006), 1569–1585.
- (18) Abeyaratne, R. and Triantafyllidis, N., An Investigation of Localization in a Porous Elastic Material Using Homogenization Theory, *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, **51** (1984), 481–486.
- (19) Triantafyllidis, N. and Schraad, M., Onset of Failure in Aluminum Honeycombs under General In-plane Loading, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **46** (1998), 1089–1124.
- (20) Ohno, N., Advances in Microscopic Bifurcation Analysis of Cellular Materials, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, **68** (2002), 1498–1504.
- (21) Ohno, N., Okumura, D. and Noguchi, H., Microscopic Symmetric Bifurcation Condition of Cellular Solids Based on a Homogenization Theory of Finite Deformation, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **50** (2002), 1125–1153.
- (22) Okumura, D., Ohno, N. and Noguchi, H., Microscopic Bifurcation and Macroscopic Localization in Periodic Cellular Solids: Elastoplastic Analysis Based on a Homogenization Theory, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, **69** (2003), 1421–1428.
- (23) Ikeda, K. and Murota, K., *Imperfect Bifurcation in Structures and Materials: Engineering Use of Group-theoretic Bifurcation Theory*, (2002), Springer: New York.
- (24) Fujii, F., Ohsaki, J. and Ikeda, K., *Mechanics of Bifurcation of Structures and Solids*, (2005), Corona Publishing Co., Ltd.
- (25) Davis, P.J., *Circulant Matrices*, (1979), A Wiley-Interscience Pub., New York.
- (26) Gray, R.M., *Toeplitz and Circulant Matrices: A Review*, (2006), Now Publishers Inc.
- (27) Hisada, T. and Noguchi, H., *Foundations and Applications of Nonlinear Finite Element Method* (in Japanese), (1995), p.310, Maruzen Co., Ltd.