楕円体強化基材を含む複合材料の巨視的損失係数の マイクロメカニクス解析*

荒木 栄 敏^{*1}, 山下 浩 儀^{*2}, 杉 本 明 男^{*3}

Micromechanical Analysis of Macroscopic Loss Factors for a Composite Material Containing Ellipsoidal Reinforcements

Shigetoshi ARAKI^{*4}, Hironori YAMASHITA and Akio SUGIMOTO

^{*4} Department of Mechanical and System Engineering, Kyoto Institute of Technology,
Matsugasaki, Sakyo-ku, Kyoto-shi, Kyoto, 606-8585 Japan

Macroscopic loss factors are derived for a composite material containing many ellipsoidal reinforcements whose semi-axes are different from each other by using the equivalent inclusion method combined with the Mori-Tanaka theorem. Eshelby tensor rearranged as a function of Poisson's ratio of the matrix multiplied by the geometrical factor is used for the reinforcement in the analysis. Since all reinforcements are assumed to align along the same direction in the modeling, the composite material has three perpendicular two-fold rotational symmetries and hence nine components of the macroscopic loss factor of the composite can be expressed in terms of the geometrical factors. Moreover, it can be seen that the imaginably part of the complex Poisson's ratio of the constituent must be equal to zero from the condition that the magnitude of the macroscopic loss factor of a porous material must be equal to that of the matrix.

Key Words: Equivalent Inclusion Method, Eshelby Tensor, Geometrical Factor, Composite Material, Macroscopic Loss Factor

1. 結 言

線形常微分方程式で表される線形粘弾性体の構成式は、定常入力・定常応答の際には振幅に関する代数方程式に帰着し、線形弾性体の構成式と形式的に一致するという特性を有している⁽¹⁾。これを利用して、複合材料の巨視的弾性定数の解析解に含まれる構成要素の弾性定数を複素弾性率に置き換えることによって、その巨視的な複素弾性率を求めることができる。著者らはこれまで、Mori-Tanaka の定理⁽²⁾を導入した等価介在物法⁽³⁾を用いて巨視的弾性定数を求め、その結果を基にガラス転移点異なる形状記憶ポリマー粒子を含む複合材料の巨視的損失係数を解析し、ガラス転移点分布を調整することで広い温度範囲に渡って優れた制振特性を有する材料開発の可能性⁽⁴⁾⁽⁵⁾を探ったり、従来の解析手法であるモードひずみエネルギー法

(MSE 法)との比較⁽⁶⁾⁽⁷⁾を行ったりしている。

この等価介在物法⁽³⁾を用いた複合材料の巨視的弾性係数の解析は枚挙に暇が無く、種々の強化基材形状に対して種々の陽な解^{(8)~(11)}が求められている。しかしながら、そのいずれもが強化基材形状を特定したものや解に強化基材の Eshelby テンソルが直接含まれるものとなっている。著者らは最近、Eshelby テンソルを吟味し、これが強化基材形状のいかに拘わらず、母材のポアソン比のみの関数と強化基材のアスペクト比のみの関数との積になることを見出した。後者を形状因子と名付け、種々の楕円体形状に対してその値を求めている⁽¹²⁾。これを用いて、任意形状の楕円体強化基材を含む複合材料の巨視的弾性係数の一般解を導出している⁽¹³⁾。この一般解は、強化基材の形状因子で整理された形でまとめられており、構成要素の材料定数と形状因子とは完全に分離している。したがって、この解に含まれる構成要素の弾性定数を複素弾性率に置き換えるのは極めて容易である。

したがって、本研究では、この一般解に含まれる母材と強化基材の弾性定数を複素弾性率に置き換えることで、任意形状の楕円体強化基材を含む複合材料の巨視的複素弾性率と巨視的損失係数の一般解を導出することを目的とする。さらに、得られた一般解を用いて

* 原稿受付 2009 年 5 月 29 日。

^{*1} 正員、京都工芸繊維大学大学院工芸科学研究科機械システム工学専攻(〒606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町)。

^{*2} 正員、京都工芸繊維大学大学院工芸科学研究科[現：三菱電機(株)生産技術センター(〒661-8661 尼崎市塚口本町 8-1-1)]。

^{*3} 正員、(株)神戸製鋼所技術開発本部機械研究所(〒651-2271 神戸市西区高塚台 1-5-5)。

E-mail: araki@mech.kit.ac.jp

多孔質材料に対する巨視的損失係数を求めることで
 方形の線形粘弾性体に対して独立な弾性定数の数はい
 くつあるのかという疑問に対する検討を行い、複素ポ
 アソン比をどのように取り扱えば良いかについて吟味
 する。

2. 楕円体強化基材を含む複合材料の 巨視的損失係数の一般解の解析

2・1 幾何学モデル 図1に示すように、楕円体
 形状の強化基材 Ω を多数含む複合材料 D を想定す
 る。 Ω は、主半軸の長さがそれぞれ a_1, a_2, a_3 の楕円
 体であり、方向は全て揃っているが、母材中に完全に
 ランダムに分布しているものとする。母材と Ω の複
 素弾性率をそれぞれ C_{ijkl}^0 と C_{ijkl}^* とおき、定常振動作
 用応力 $\sigma_{ij}^0 \exp(i\omega t)$ が作用している状態を想定する。

このような複合材料の巨視的複素弾性率を求めるた
 め、母材と強化基材 Ω の弾性定数をそれぞれ C_{ijkl} と
 C_{ijkl}^* において、まず最初に線形弾性解析を行う。

2・2 線形弾性解析による巨視的弾性定数の一般解

図1に示した複合材料に作用応力 σ_{ij}^0 が作用する場
 合における等価式は、強化基材 Ω 内で、

$$\sigma_{ij}^0 + \bar{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij}^* = C_{ijkl}(\epsilon_{kl}^0 + \bar{\epsilon}_{kl} + S_{klmn}\epsilon_{mn}^* - \epsilon_{kl}^*)$$

$$= C_{ijkl}^*(\epsilon_{kl}^0 + \bar{\epsilon}_{kl} + S_{klmn}\epsilon_{mn}^*) \quad \dots\dots\dots (1)$$

となる⁽³⁾。ここで ϵ_{ij}^* は母材と Ω の弾性定数の違いを
 代行する等価固有ひずみ、 S_{ijkl} は Ω の Eshelby テン
 ソルである。 σ_{ij}^0 と ϵ_{ij}^0 は作用応力と作用ひずみで、 σ_{ij}^0
 $= C_{ijkl}\epsilon_{kl}^0$ なる関係がある。 σ_{ij}^* は固有応力であり、

$$\sigma_{ij}^* = C_{ijkl}(S_{klmn}\epsilon_{mn}^* - \epsilon_{kl}^*) \quad \dots\dots\dots (2)$$

により与えられる⁽³⁾。また、 $\bar{\sigma}_{ij}$ と $\bar{\epsilon}_{ij}$ は相互作用場
 であり、これらの間には、 Ω の体積含有率 f を介し

て、

$$\bar{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}\bar{\epsilon}_{kl} = -f\sigma_{ij}^0$$

$$= -fC_{ijkl}(S_{klmn}\epsilon_{mn}^* - \epsilon_{kl}^*)$$

$$\therefore \bar{\epsilon}_{ij} = -f(S_{ijkl}\epsilon_{kl}^* - \epsilon_{ij}^*) \quad \dots\dots\dots (3)$$

なる関係がある⁽²⁾。式(3)を等価式(1)に代入し、静
 水圧成分と偏差成分とに分けると、それぞれ、

$$3K[\epsilon_{ii}^0 + (1-f)(S_{iikl}\epsilon_{kl}^* - \epsilon_{ii}^*)]$$

$$= 3K^*[\epsilon_{ii}^0 + (1-f)(S_{iikl}\epsilon_{kl}^* - \epsilon_{ii}^*) + \epsilon_{ii}^*]$$

$$\quad \dots\dots\dots (4\cdot a)$$

$$2\mu\left\{\epsilon_{ij}^0 + (1-f)\left[\left(S_{ijkl} - \frac{1}{3}S_{mmkl}\right)\epsilon_{kl}^* - \epsilon_{ij}^*\right]\right\}$$

$$= 2\mu^*\left\{\epsilon_{ij}^0 + (1-f)\left[\left(S_{ijkl} - \frac{1}{3}S_{mmkl}\right)\epsilon_{kl}^*\right.\right.$$

$$\left.\left. - \epsilon_{ij}^*\right] + \epsilon_{ij}^*\right\} \quad \dots\dots\dots (4\cdot b)$$

となる。ここで K と K^* はそれぞれ母材と Ω の体積
 弾性係数、 μ と μ^* は剛性率であり、 ϵ_{ij}^0 などは偏差成
 分を表す。さらに、Eshelby テンソル S_{ijkl} は、著者ら
 によって定義された強化基材のアスペクト比のみの関
 数である形状因子 $H_i^e, H_j^{e(12)}$ と母材のポアソン比 ν
 とに分けられ、

$$S_{1111} = H_1^e + \frac{1}{2(1-\nu)}[(H_1^e - H_2^e) + (H_3^e - H_{31}^e)]$$

$$\quad \dots\dots\dots (5\cdot a)$$

$$S_{1122} = \frac{\nu}{1-\nu}H_1^e - \frac{1}{2(1-\nu)}(H_1^e - H_2^e) \quad \dots\dots (5\cdot b)$$

$$S_{2211} = \frac{\nu}{1-\nu}H_2^e - \frac{1}{2(1-\nu)}(H_1^e - H_2^e) \quad \dots\dots (5\cdot c)$$

$$S_{1212} = \frac{1}{2}(H_1^e + H_2^e) - \frac{1}{2(1-\nu)}(H_1^e - H_2^e)$$

$$\quad \dots\dots\dots (5\cdot d)$$

なる形に整理することができる。他の成分については
 両辺の下付添字(1, 2, 3)を循環置換したものとなり、
 循環置換で得られないものはゼロである。

式(5)の Eshelby テンソルを等価式(4)に代入し
 た後、この代数方程式を解いて等価固有ひずみ ϵ_{ij}^* を
 求め、それをさらに、

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \epsilon_{ij}^0 + f\epsilon_{ij}^* \quad \dots\dots\dots (6)$$

なる関係に代入すると巨視的全ひずみ $\bar{\epsilon}_{ij}$ が求められ
 る。前報⁽¹³⁾では、この巨視的平均ひずみ $\bar{\epsilon}_{ij}$ と作用応
 力 σ_{ij}^0 との関係を、垂直成分については、

$$\begin{Bmatrix} \bar{\epsilon}_{11} \\ \bar{\epsilon}_{22} \\ \bar{\epsilon}_{33} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{12}}{E_{22}} & -\frac{\nu_{13}}{E_{33}} \\ -\frac{\nu_{21}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{33}} \\ -\frac{\nu_{31}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{32}}{E_{22}} & \frac{1}{E_{33}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^0 \\ \sigma_{22}^0 \\ \sigma_{33}^0 \end{Bmatrix}$$

$$\quad \dots\dots\dots (7\cdot a)$$

と定めた。なお、巨視的弾性定数の対称性から、

Fig.1 Composite material containing ellipsoidal rein-
 forcements

$$\frac{\bar{\nu}_{21}}{\bar{E}_{11}} = \frac{\bar{\nu}_{12}}{\bar{E}_{22}}, \quad \frac{\bar{\nu}_{32}}{\bar{E}_{22}} = \frac{\bar{\nu}_{23}}{\bar{E}_{33}}, \quad \frac{\bar{\nu}_{13}}{\bar{E}_{33}} = \frac{\bar{\nu}_{31}}{\bar{E}_{11}} \dots (8)$$

なる関係がある。また、せん断成分については、

$$\begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_{23} \\ \bar{\varepsilon}_{31} \\ \bar{\varepsilon}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\bar{\mu}_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\bar{\mu}_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\bar{\mu}_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{23}^0 \\ \sigma_{31}^0 \\ \sigma_{12}^0 \end{Bmatrix} \dots (7 \cdot b)$$

と定めた。このとき、巨視的弾性係数 $\bar{E}_{11}$ と巨視的ポアソン比 $\bar{\nu}_{12}$ は、それぞれ、

$$\frac{\bar{E}_{11}}{E} = \frac{1}{1 - \frac{2(1-\nu)f}{3(1-f)D_1} \left[\frac{3}{2}(1-2\nu)D_{II} + (1+\nu)\xi_1 \right]} \dots (9 \cdot a)$$

$$\bar{\nu}_{12} = \frac{\nu + \frac{2(1-\nu)f}{3(1-f)D_1} \left[\frac{3}{2}(1-2\nu)D_{II} + (1+\nu)\eta_3 \right]}{1 - \frac{2(1-\nu)f}{3(1-f)D_1} \left[\frac{3}{2}(1-2\nu)D_{II} + (1+\nu)\xi_2 \right]} \dots (9 \cdot b)$$

また、巨視的体積弾性係数は、

$$\frac{\bar{K}}{K} = \frac{1}{1 - \frac{3(1-\nu)fD_{II}}{(1-f)D_1}} \dots (10)$$

巨視的剛性率 $\bar{\mu}_{23}$ は、

$$\frac{\bar{\mu}_{23}}{\mu} = \frac{1}{1 - \frac{2(1-\nu)f}{(1-f)(D_{IV} + S_1)}} \dots (11)$$

と求められている⁽¹³⁾。ここで f は強化基材の体積含有率、 E は母材の縦弾性係数である。 $\bar{E}_{22}$ 、 $\bar{E}_{33}$ と $\bar{\nu}_{23}$ 、 $\bar{\nu}_{31}$ 及び $\bar{\mu}_{31}$ 、 $\bar{\mu}_{12}$ は、式(9)と式(11)の両辺の下付添字(1, 2, 3)を循環置換することで得られる。これらの式中で下付添字が通常の数値で表されている係数は、それぞれ、

$$\xi_1 = F_1 + 2(1-2\nu)G_1 + 2D_{III} \dots (12 \cdot a)$$

$$\eta_1 = F_1 - (1-2\nu)G_1 - D_{III} \dots (12 \cdot b)$$

$$F_1 = \frac{2}{3}(1+\nu)(1-2\nu) \left[(1-3H_1^e)^2 - \frac{1}{3}H_{III}^e \right] + 3L_1R_1 \dots (12 \cdot c)$$

$$G_1 = (1-3H_1^e)(D_{IV} + 3R_1) - \frac{2}{9}(1-2\nu)H_{III}^e - H_{IV}^e \dots (12 \cdot d)$$

$$S_1 = \frac{2}{3}(1-\nu)(1-3H_1^e) - 2(H_2^e - H_{23}^e) - H_1^e + \frac{2}{3} \dots (12 \cdot e)$$

$$R_1 = \frac{2}{9}(1-2\nu)(1-3H_1^e) + (H_2^e - H_{23}^e) - \frac{1}{3}H_1^e \dots (12 \cdot f)$$

である。 ξ_2 、 η_3 などの他の成分は上式の下付添字(1, 2, 3)を循環置換することで求められる。

また、下付添字が時計数字で表されている $H_1^e \sim H_{IV}^e$ は形状因子のみの関数であり、これらを構成する形状因子の下付添字(1, 2, 3)を循環置換しても変化しないもの、例えば、

$$H_1^e = (H_1^e - H_{12}^e) + (H_2^e - H_{23}^e) + (H_3^e - H_{31}^e) \dots (13)$$

などであり、前報で定義されている⁽¹³⁾。

さらに、 D_1 なども成分に依存しない係数であり、

$$D_1 = L_1D_{II} - 2(1-2\nu)D_V \dots (14 \cdot a)$$

$$D_{II} = (D_{IV})^2 - \left[\frac{3}{2}H_{II}^e + \frac{2}{27}(1-2\nu)^2H_{III}^e + \frac{2}{3}(1-2\nu)H_{IV}^e \right] \dots (14 \cdot b)$$

$$D_{III} = L_1D_{IV} - \frac{1}{9}(1+\nu)(1-2\nu)H_{III}^e \dots (14 \cdot c)$$

$$D_{IV} = L_{II} + H_1^e - 1 \dots (14 \cdot d)$$

$$D_V = \frac{1}{9}(1+\nu) \left[(L_{II} - 1)H_{III}^e + \frac{2}{3}(1-2\nu)H_V^e + 3H_{VI}^e \right] \dots (14 \cdot e)$$

$$D_{VI} = -D_1 + \left[L_{II} + \frac{1}{3}(1-2\nu) \right] D_{III} \dots (14 \cdot f)$$

で与えられる。また、これらの式に含まれる L_1 などは次式で与えられる。

$$L_1 = \frac{3(1-\nu)}{1-f}L_K - 2(1-2\nu) \dots (15 \cdot a)$$

$$L_{II} = \frac{2(1-\nu)}{1-f}L_\mu - \frac{1}{3}(1-2\nu) \dots (15 \cdot b)$$

$$L_K = \frac{K^*}{K^* - K} \dots (15 \cdot c)$$

$$L_\mu = \frac{\mu^*}{\mu^* - \mu} \dots (15 \cdot d)$$

2.3 巨視的複素弾性率の一般解 式(9)～式

(11)に含まれる母材と強化基材の弾性定数を複素弾性率に置き換える。すなわち、

$$E \longrightarrow E^c = E'(1 + i \tan \delta_E) \dots (16 \cdot a)$$

$$K \longrightarrow K^c = K'(1 + i \tan \delta_K) \dots (16 \cdot b)$$

$$\mu \longrightarrow \mu^c = \mu'(1 + i \tan \delta_\mu) \dots (16 \cdot c)$$

$$K^* \longrightarrow K^{*c} = K^{*'}(1 + i \tan \delta_K^*) \dots (16 \cdot d)$$

$$\mu^* \longrightarrow \mu^{*c} = \mu^{*'}(1 + i \tan \delta_\mu^*) \dots (16 \cdot e)$$

なる置き換えを行う。また、強化基材のポアソン比を μ^* とおき、母材のポアソン比とともに表現を変えて、

$$\nu \longrightarrow \nu^c = \nu' + i\nu'' \dots (17 \cdot a)$$

$$\nu^* \longrightarrow \nu^{*c} = \nu^{*'} + i\nu^{*''} \dots (17 \cdot b)$$

と置き換える。このとき、複素弾性率の実部 $\bar{E}_{II}^R$ と虚部 $\bar{E}_{II}^I$ は、

$$\frac{\bar{E}_{II}^R}{E'} = \frac{1}{\varphi_1} \left[1 - \frac{f}{1-f} (\varphi_1^R + \varphi_1^I \tan \delta_E) \right] \dots (18 \cdot a)$$

$$\frac{\bar{E}_{11}^I}{E'} = \frac{1}{\varphi_1} \left[\tan \delta_E - \frac{f}{1-f} (\varphi_1^R \tan \delta_E - \varphi_1^I) \right] \quad \dots\dots\dots (18 \cdot b)$$

となり、複素ポアソン比の実部 $\bar{\nu}_{12}^R$ と虚部 $\bar{\nu}_{12}^I$ は、

$$\bar{\nu}_{12}^R = \frac{1}{\varphi_2} \left[\nu' + \frac{f}{1-f} (\psi_3^R - \nu' \varphi_2^R - \nu'' \varphi_2^I) - \left(\frac{f}{1-f} \right)^2 (\psi_3^R \varphi_2^R + \psi_3^I \varphi_2^I) \right] \quad \dots\dots\dots (19 \cdot a)$$

$$\bar{\nu}_{12}^I = \frac{1}{\varphi_2} \left[\nu'' + \frac{f}{1-f} (\psi_3^I + \nu' \varphi_2^I - \nu'' \varphi_2^R) + \left(\frac{f}{1-f} \right)^2 (\psi_3^R \varphi_2^I - \psi_3^I \varphi_2^R) \right] \quad \dots\dots\dots (19 \cdot b)$$

となる。ここで、

$$\varphi_1 = \left(1 - \frac{f}{1-f} \varphi_1^R \right)^2 + \left(\frac{f}{1-f} \varphi_1^I \right)^2 \quad \dots\dots\dots (20)$$

である。また、複素体積弾性率の実部 $\bar{K}^R$ と虚部 $\bar{K}^I$ および複素剛性率の実部 $\bar{\mu}_{23}^R$ と虚部 $\bar{\mu}_{23}^I$ は、それぞれ、

$$\frac{\bar{K}^R}{K'} = \frac{1 - \frac{3f}{1-f} (k^R + k^I \tan \delta_K)}{\left(1 - \frac{3f}{1-f} k^R \right)^2 + \left(\frac{3f}{1-f} k^I \right)^2} \quad \dots\dots\dots (21 \cdot a)$$

$$\frac{\bar{K}^I}{K'} = \frac{\tan \delta_K - \frac{3f}{1-f} (k^R \tan \delta_K - k^I)}{\left(1 - \frac{3f}{1-f} k^R \right)^2 + \left(\frac{3f}{1-f} k^I \right)^2} \quad \dots\dots\dots (21 \cdot b)$$

$$\frac{\bar{\mu}_{23}^R}{\mu'} = \frac{1 - \frac{2f}{1-f} (\chi_1^R + \chi_1^I \tan \delta_\mu)}{\left(1 - \frac{2f}{1-f} \chi_1^R \right)^2 + \left(\frac{2f}{1-f} \chi_1^I \right)^2} \quad \dots\dots\dots (22 \cdot a)$$

$$\frac{\bar{\mu}_{23}^I}{\mu'} = \frac{\tan \delta_\mu - \frac{2f}{1-f} (\chi_1^R \tan \delta_\mu - \chi_1^I)}{\left(1 - \frac{2f}{1-f} \chi_1^R \right)^2 + \left(\frac{2f}{1-f} \chi_1^I \right)^2} \quad \dots\dots\dots (22 \cdot b)$$

となる。他の成分については、式(18)～式(20)と式(22)の両辺の下付添字を循環置換することで求められる。ここで、循環置換によって変化する係数は、

$$\begin{aligned} \varphi_1^R &= \frac{D_{11}^R}{\varphi_0} \left[N_{(6)} D_{11}^R + (3-4\nu') \nu'' D_{11}^I + \frac{2}{3} N_{(5)} \xi_1^R \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{3} \nu' \nu'' \xi_1^I \right] + \frac{D_{11}^I}{\varphi_0} \left[N_{(6)} D_{11}^I - (3-4\nu') \nu'' D_{11}^R \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} N_{(5)} \xi_1^I - \frac{4}{3} \nu' \nu'' \xi_1^R \right] \quad \dots\dots\dots (23 \cdot a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1^I &= \frac{D_{11}^R}{\varphi_0} \left[N_{(6)} D_{11}^I - (3-4\nu') \nu'' D_{11}^R + \frac{2}{3} N_{(5)} \xi_1^I \right. \\ &\quad \left. - \frac{4}{3} \nu' \nu'' \xi_1^R \right] - \frac{D_{11}^I}{\varphi_0} \left[N_{(6)} D_{11}^R + (3-4\nu') \nu'' D_{11}^I \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} N_{(5)} \xi_1^R + \frac{4}{3} \nu' \nu'' \xi_1^I \right] \quad \dots\dots\dots (23 \cdot b) \end{aligned}$$

$$\varphi_0 = (D_{11}^R)^2 + (D_{11}^I)^2 \quad \dots\dots\dots (23 \cdot c)$$

$$\begin{aligned} \psi_1^R &= \frac{D_{11}^R}{\varphi_0} \left[N_{(6)} D_{11}^R + (3-4\nu') \nu'' D_{11}^I + \frac{2}{3} N_{(5)} \eta_1^R \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{3} \nu' \nu'' \eta_1^I \right] + \frac{D_{11}^I}{\varphi_0} \left[N_{(6)} D_{11}^I - (3-4\nu') \nu'' D_{11}^R \right. \end{aligned}$$

$$\left. + \frac{2}{3} N_{(5)} \eta_1^I - \frac{4}{3} \nu' \nu'' \eta_1^R \right] \quad \dots\dots\dots (24 \cdot a)$$

$$\begin{aligned} \psi_1^I &= \frac{D_{11}^R}{\varphi_0} \left[N_{(6)} D_{11}^I - (3-4\nu') \nu'' D_{11}^R + \frac{2}{3} N_{(5)} \eta_1^I \right. \\ &\quad \left. - \frac{4}{3} \nu' \nu'' \eta_1^R \right] - \frac{D_{11}^I}{\varphi_0} \left[N_{(6)} D_{11}^R + (3-4\nu') \nu'' D_{11}^I \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} N_{(5)} \eta_1^R + \frac{4}{3} \nu' \nu'' \eta_1^I \right] \quad \dots\dots\dots (24 \cdot b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k^R &= \frac{D_{11}^R}{\varphi_0} [(1-\nu') D_{11}^R + \nu'' D_{11}^I] \\ &\quad + \frac{D_{11}^I}{\varphi_0} [(1-\nu') D_{11}^I - \nu'' D_{11}^R] \quad \dots\dots\dots (25 \cdot a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k^I &= \frac{D_{11}^R}{\varphi_0} [(1-\nu') D_{11}^I - \nu'' D_{11}^R] \\ &\quad - \frac{D_{11}^I}{\varphi_0} [(1-\nu') D_{11}^R + \nu'' D_{11}^I] \quad \dots\dots\dots (25 \cdot b) \end{aligned}$$

$$\chi_1^R = \frac{(1-\nu')(D_{11}^R + S_{11}^R) - \nu''(D_{11}^I + S_{11}^I)}{\chi_1} \quad \dots\dots\dots (26 \cdot a)$$

$$\chi_1^I = \frac{-\nu''(D_{11}^R + S_{11}^R) - (1-\nu')(D_{11}^I + S_{11}^I)}{\chi_1} \quad \dots\dots\dots (26 \cdot b)$$

$$\chi_1 = (D_{11}^R + S_{11}^R)^2 + (D_{11}^I + S_{11}^I)^2 \quad \dots\dots\dots (26 \cdot c)$$

である。これらの式中の係数 ξ_1^R などは、式(12)の係数の実部と虚部であり、

$$\xi_1^R = F_1^R + 2[(1-2\nu') G_1^R + 2\nu'' G_1^I] + 2D_{11}^R \quad \dots\dots\dots (27 \cdot a)$$

$$\xi_1^I = F_1^I + 2[(1-2\nu') G_1^I - 2\nu'' G_1^R] + 2D_{11}^I \quad \dots\dots\dots (27 \cdot b)$$

$$\eta_1^R = F_1^R - [(1-2\nu') G_1^R + 2\nu'' G_1^I] - D_{11}^R \quad \dots\dots\dots (27 \cdot c)$$

$$\eta_1^I = F_1^I - [(1-2\nu') G_1^I - 2\nu'' G_1^R] - D_{11}^I \quad \dots\dots\dots (27 \cdot d)$$

$$\begin{aligned} F_1^R &= \frac{2}{3} N_{(4)} \left[(1-3H_1^e)^2 - \frac{1}{3} H_{11}^e \right] \\ &\quad + 3(L_1^R R_1^R - L_1^I R_1^I) \quad \dots\dots\dots (27 \cdot e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_1^I &= -\frac{2}{3} (1+4\nu') \nu'' \left[(1-3H_1^e)^2 - \frac{1}{3} H_{11}^e \right] \\ &\quad + 3(L_1^R R_1^I + L_1^I R_1^R) \quad \dots\dots\dots (27 \cdot f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_1^R &= (1-3H_1^e)(D_{11}^R + 3R_1^R) \\ &\quad - \frac{2}{9} (1-2\nu') H_{11}^e - H_{11}^e \quad \dots\dots\dots (27 \cdot g) \end{aligned}$$

$$G_1^I = (1-3H_1^e)(L_1^I + 3R_1^I) + \frac{4}{9} \nu'' H_{11}^e \quad \dots\dots\dots (27 \cdot h)$$

$$\begin{aligned} R_1^R &= \frac{2}{9} (1-2\nu')(1-3H_1^e) + (H_2^e - H_{23}^e) - \frac{1}{3} H_1^e \\ &\quad \dots\dots\dots (27 \cdot i) \end{aligned}$$

$$R_1^I = -\frac{4}{9} \nu'' (1-3H_1^e) \quad \dots\dots\dots (27 \cdot j)$$

$$\begin{aligned} S_1^R &= \frac{2}{3} (1-\nu')(1-3H_1^e) - 2(H_2^e - H_{23}^e) - H_1^e + \frac{2}{3} \\ &\quad \dots\dots\dots (27 \cdot k) \end{aligned}$$

$$S_1^I = -\frac{2}{3}\nu''(1-3H_1^e) \cdots (27 \cdot 1)$$

で与えられる。また、成分に依存しない係数 D_1^R , D_{11}^I などは、式(14)の係数 $D_1 \sim D_{IV}$ の実部と虚部であり、

$$\begin{aligned} D_1^R &= (L_1^R D_{11}^R - L_1^I D_{11}^I) - \frac{2}{9} N_{(4)} \left[(L_{11}^R - 1) H_{11}^e \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} (1-2\nu') H_V^e + 3 H_{V1}^e \right] - \frac{2}{9} (1+4\nu') \nu'' \\ &\quad \times \left[L_{11}^I H_{11}^e - \frac{4}{3} \nu'' H_V^e \right] \cdots (28 \cdot a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_1^I &= (L_1^I D_{11}^R + L_1^R D_{11}^I) - \frac{2}{9} N_{(4)} \left[L_{11}^I H_{11}^e \right. \\ &\quad \left. - \frac{4}{3} \nu'' H_V^e \right] + \frac{2}{9} (1+4\nu') \nu'' \left[(L_{11}^R - 1) H_{11}^e \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} (1-2\nu') H_V^e + 3 H_{V1}^e \right] \cdots (28 \cdot b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{11}^R &= (D_{11}^R)^2 - (L_{11}^I)^2 - \frac{3}{2} H_{11}^e - \frac{2}{27} N_{(3)} H_{11}^e \\ &\quad - \frac{2}{3} (1-2\nu') H_{11}^e \cdots (28 \cdot c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{11}^I &= 2 D_{11}^R L_{11}^I + \frac{8}{27} (1-2\nu') \nu'' H_{11}^e + \frac{4}{3} \nu'' H_{11}^e \\ &\quad \cdots (28 \cdot d) \end{aligned}$$

$$D_{11}^R = D_{11}^R L_1^R - L_1^I L_{11}^I - \frac{1}{9} N_{(4)} H_{11}^e \cdots (28 \cdot e)$$

$$\begin{aligned} D_{11}^I &= D_{11}^R L_1^I + L_1^R L_{11}^I + \frac{1}{9} (1+4\nu') \nu'' H_{11}^e \\ &\quad \cdots (28 \cdot f) \end{aligned}$$

$$D_{11}^R = L_1^R + H_1^e - 1 \cdots (28 \cdot g)$$

$$D_{11}^I = L_1^I \cdots (28 \cdot h)$$

となる。 L_1^R などは式(15)の係数に対するものであり、

$$\begin{aligned} L_1^R &= \frac{3}{(1-f)} [(1-\nu') L_K^R + \nu'' L_K^I] - 2(1-2\nu') \\ &\quad \cdots (29 \cdot a) \end{aligned}$$

$$L_1^I = \frac{3}{(1-f)} [(1-\nu') L_K^I - \nu'' L_K^R] + 4\nu'' \cdots (29 \cdot b)$$

$$\begin{aligned} L_{11}^R &= \frac{2}{(1-f)} [(1-\nu') L_{\mu}^R + \nu'' L_{\mu}^I] - \frac{1}{3} (1-2\nu') \\ &\quad \cdots (29 \cdot c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{11}^I &= \frac{2}{(1-f)} [(1-\nu') L_{\mu}^I - \nu'' L_{\mu}^R] + \frac{2}{3} \nu'' \\ &\quad \cdots (29 \cdot d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_K^R &= \frac{(g_K - 1) + \tan \delta_K^* (g_K \tan \delta_K^* - \tan \delta_K)}{(g_K - 1)^2 + (g_K \tan \delta_K^* - \tan \delta_K)^2} g_K \\ &\quad \cdots (29 \cdot e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_K^I &= \frac{\tan \delta_K - \tan \delta_K^*}{(g_K - 1)^2 + (g_K \tan \delta_K^* - \tan \delta_K)^2} g_K \\ &\quad \cdots (29 \cdot f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{\mu}^R &= \frac{(g-1) + \tan \delta_{\mu}^* (g \tan \delta_{\mu}^* - \tan \delta_{\mu})}{(g-1)^2 + (g \tan \delta_{\mu}^* - \tan \delta_{\mu})^2} g \\ &\quad \cdots (29 \cdot g) \end{aligned}$$

$$L_{\mu}^I = \frac{\tan \delta_{\mu} - \tan \delta_{\mu}^*}{(g-1)^2 + (g \tan \delta_{\mu}^* - \tan \delta_{\mu})^2} g \cdots (29 \cdot h)$$

となる。ここで、

$$g = \frac{\mu^{*'}}{\mu'}, \quad g_K = \frac{N_{(2)}(N_{(1)}^* - 3\nu^{*'} \tan \delta_{\mu}^*)}{N_{(2)}^*(N_{(1)} - 3\nu'' \tan \delta_{\mu})} g \cdots (30)$$

であり、 $N_{(1)}$ などは次式で与えられる。

$$N_{(1)} = (1+\nu')(1-2\nu') - 2(\nu'')^2 \cdots (31 \cdot a)$$

$$N_{(2)} = (1-2\nu')^2 + 4(\nu'')^2 \cdots (31 \cdot b)$$

$$N_{(3)} = (1-2\nu')^2 - 4(\nu'')^2 \cdots (31 \cdot c)$$

$$N_{(4)} = (1+\nu')(1-2\nu') + 2(\nu'')^2 \cdots (31 \cdot d)$$

$$N_{(5)} = (1+\nu')(1-\nu') + (\nu'')^2 \cdots (31 \cdot e)$$

$$N_{(6)} = (1-\nu')(1-2\nu') - 2(\nu'')^2 \cdots (31 \cdot f)$$

$$N_{(1)}^* = (1+\nu^{*'})(1-2\nu^{*'}) - 2(\nu^{*''})^2 \cdots (31 \cdot g)$$

$$N_{(2)}^* = (1-2\nu^{*'})^2 + 4(\nu^{*''})^2 \cdots (31 \cdot h)$$

2.4 巨視的損失係数の一般解 式(18), 式(21),

式(22)の巨視的複素弾性率の実部と虚部の比を取ること、巨視的損失係数は、

$$\begin{aligned} \tan \bar{\delta}_{E11} &= \frac{\tan \delta_E - \frac{f}{1-f} (\varphi_1^R \tan \delta_E - \varphi_1^I)}{1 - \frac{f}{1-f} (\varphi_1^R + \varphi_1^I \tan \delta_E)} \\ &\quad \cdots (32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan \bar{\delta}_K &= \frac{\tan \delta_K - \frac{3f}{1-f} (k^R \tan \delta_K - k^I)}{1 - \frac{3f}{1-f} (k^R + k^I \tan \delta_K)} \\ &\quad \cdots (33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan \bar{\delta}_{\mu 23} &= \frac{\tan \delta_{\mu} - \frac{2f}{1-f} (\chi_1^R \tan \delta_{\mu} - \chi_1^I)}{1 - \frac{2f}{1-f} (\chi_1^R + \chi_1^I \tan \delta_{\mu})} \\ &\quad \cdots (34) \end{aligned}$$

となる。他の成分は下付添字の循環置換で得られる。

これまでの解析によって、図1の複合材料モデルに対する巨視的複素弾性率が式(18), 式(19), 式(22)のように求められた。これらの結果から、図1の複合材料の独立な巨視的複素弾性率の数は、巨視的弾性定数と同様に垂直成分が6個、せん断成分が3個の合計9個となることがわかる。巨視的複素弾性率の実部と虚部の比を取ることによって、巨視的損失係数が式(32)と式(34)のように求められた。しかしながら、これらに加えて、式(19)の巨視的複素ポアソン比に対する損失係数も同様に定義できる。これから求められた巨視的複素ポアソン比に関する損失係数は、3個の独立な成分を有するため、これらを含めると、結局、独立な巨視的損失係数の数は9個となることがわかる。なお、当然のことながら、強化基材の形状が対称性を有する場合には、独立な巨視的弾性定数の数は減少し、

例えば回転楕円体では5個、球では2個となることが証明されている⁽¹³⁾。したがって、巨視的複素弾性率と巨視的損失係数についてもこれらと同じ数となる。

3. 巨視的損失係数に対する検討

3.1 複素ポアソン比に対する検討 等方性の線形粘弾性体に対して、独立な弾性定数の数はいくつあるのかという疑問が常に付きまとう。等方性の線形弾性体の2個に対して、その実部と虚部を取ることで2倍の4個という答えがすぐに思い浮かぶ。しかしながら、L. E. Nielsen は、第一次近似としては損失係数の垂直成分 $\tan \delta_E$ とせん断成分 $\tan \delta_\mu$ は等しく独立な損失係数の数は1個であり、独立な弾性定数は合計3個としても良いと述べている⁽¹⁴⁾。弾性定数を μ , K 系で表したときには、

$$\tan \delta_E = \tan \delta_\mu + \frac{1 + \tan^2 \delta_\mu}{(1 + \nu') - \nu'' \tan \delta_\mu} \nu'' \quad \dots\dots\dots (35 \cdot a)$$

$$\tan \delta_K = \tan \delta_\mu + \frac{3(1 + \tan^2 \delta_\mu)}{N_{(1)} - 3\nu'' \tan \delta_\mu} \nu'' \quad \dots\dots\dots (35 \cdot b)$$

なる関係が成り立つため、 $\tan \delta_E = \tan \delta_K = \tan \delta_\mu$ であるときには、複素ポアソン比の虚部は $\nu'' = 0$ となることがわかる。したがって、独立な弾性定数の数は ν'' の値がゼロであるかどうかによって決まる。

本解析は複合材料の巨視的損失係数の解析であるが、強化基材が空孔である多孔質材料の巨視的損失係数を求めることで、この点を検討することができる。図2はその結果の一例で、球形強化基材を含む複合材

料の巨視的損失係数 $\tan \delta_\mu$ の解析結果である。図示したように、母材の $\tan \delta_\mu = 0.30$ 、強化基材の $\tan \delta_\mu^* = 0.10$ 、ポアソン比の実部は母材、強化基材ともに $\nu' = \nu'^* = 0.38$ 、強化基材のポアソン比の虚部を $\nu'' = 0$ としたものである。図の横軸は剛性率比 μ^*/μ' であり、 ν'' をパラメータとしている。なお、図中の破線については次節で述べる。

図より、複合材料の巨視的な損失係数 $\tan \delta_\mu / \tan \delta_\mu$ は、 ν'' のいかに拘わらず剛性率比 μ^*/μ' の減少につれて減少する傾向にあり、剛性率比 $\mu^*/\mu' = 1$ 付近で最小値を示した後、増加に転じていることがわかる。また、 ν'' が増加するにしたがって増加する傾向にあることもわかる。最終的に $\mu^*/\mu' = 0$ 、すなわち強化基材が空孔となったときの巨視的損失係数 $\tan \delta_\mu / \tan \delta_\mu$ の値は、 $\nu'' = 0$ のとき1に等しく、 $\nu'' > 0$ で1を越えていることがわかる。

複合材料の巨視的損失係数解析で良く用いられるモードひずみエネルギー法(MSE法)の考え方をを用いると、巨視的損失係数 $\tan \delta_{(MSE)}$ は、一般的に、

$$\tan \delta_{(MSE)} = \sum_{i=1}^n \tan \delta^i \cdot \frac{W_e^i}{W_e} \quad \dots\dots\dots (36)$$

と表される。ここで n は構成要素の数であり、 $\tan \delta^i$ はその内の i 番目の構成要素の損失係数、 W_e^i はこれが分担する弾性ひずみエネルギーである。また、 W_e は複合材料全体の弾性ひずみエネルギーである。MSE法は言わば弾性解析における複合則に相当するものであり、全ての形状の強化基材に適用できるものではなく、例えば、せん断変形では楕円柱あるいはボーン状の強化基材に対してのみ有効な結果を与える。しかしながら、強化基材が空孔である場合には、その弾性定数がゼロであるが故にこれが受け持つ弾性ひずみエネルギーはその形状に関わりなく常にゼロとなる。このため、多孔質材料の場合には、内部に含まれる空孔の形状に関わりなく式(36)は常に正しい結果を与えることになる。したがって、多孔質材料の巨視的損失係数は常に母材のそれと一致しなければならない。さらに、これは変形様式にも依存しないため、結局、多孔質材料では、

$$\frac{\tan \delta_E}{\tan \delta_E} = \frac{\tan \delta_K}{\tan \delta_K} = \frac{\tan \delta_\mu}{\tan \delta_\mu} = 1 \quad \dots\dots\dots (37)$$

でなければならない。改めて図2の結果を見ると、唯一正しい解を与えるのは $\nu'' = 0$ 、すなわちポアソン比の虚部がゼロの場合であることがわかる。したがって、前述のことより、線形粘弾性体の独立な弾性定数の数は3個ということになる。

図2の結果は球形の強化基材に対する結果であるた

Fig. 2 Macroscopic loss factor $\tan \delta_\mu$ for the composite containing spherical reinforcements

め、これが任意形状の楕円体空孔を含む多孔質材料にも当てはまるかどうかを念のため確認する。

式(32)～式(34)より、巨視的損失係数 $\tan \delta_{E11}$, $\tan \delta_K$ と $\tan \delta_{\mu 23}$ が母材のそれらと一致する条件は、 $\varphi^I = k^I = \chi^I = 0$ が同時に成立することであることがわかる。このため、強化基材が空孔の条件 $\mu^{*'} = 0$ を用いて φ^I , k^I , χ^I を求める。今、 $\mu^{*'} = 0$ のとき、式(30)より $g = g_K = 0$ となるため、これを式(29)に代入すると、 $L_K^R = K_K^R = L_\mu^R = L_\mu^I = 0$ および、

$$L_I^R = -2(1-2\nu') \quad (38 \cdot a)$$

$$L_I^I = 4\nu'' \quad (38 \cdot b)$$

$$L_{II}^R = -\frac{1}{3}(1-2\nu') \quad (38 \cdot c)$$

$$L_{II}^I = \frac{2}{3}\nu'' \quad (38 \cdot d)$$

となる。これを式(28)に代入すると、

$$\begin{aligned} D_I^I &= 4\nu'' D_{(1)} \\ &= 4\nu'' \left\{ D_{II}^R - \frac{2}{3}(1-2\nu') \left[D_{IV}^R + \frac{2}{9}(1-2\nu') \right. \right. \\ &\quad \times H_{III}^R + H_{IV}^R \left. \right] - \frac{1}{27} N_{(4)} (H_{III}^R - 2H_{IV}^R) - \frac{1}{27} (1+4\nu') \\ &\quad \times \left[(2-\nu') H_{III}^R - (1-2\nu') H_{IV}^R - \frac{9}{2} H_{VI}^R \right] \left. \right\} \\ &\quad \dots\dots\dots (39 \cdot a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{II}^I &= \frac{4}{3}\nu'' D_{(2)} \\ &= \frac{4}{3}\nu'' \left[D_{IV}^R + \frac{2}{9}(1-2\nu') H_{III}^R + H_{IV}^R \right] \dots\dots (39 \cdot b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{III}^I &= 4\nu'' D_{(3)} \\ &= 4\nu'' \left[D_{IV}^R - \frac{1}{3}(1-2\nu') - \frac{(1+4\nu')}{36} H_{III}^R \right] \\ &\quad \dots\dots\dots (39 \cdot c) \end{aligned}$$

$$D_{IV}^I = \frac{2}{3}\nu'' \quad (39 \cdot d)$$

を得る。また、式(27)に式(38)と式(39)を代入すると、

$$\begin{aligned} F_I^I &= 2\nu'' F_{(1)} = 2\nu'' \left\{ -\frac{1}{3}(1+4\nu') \left[(1-3H_I^R)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{3} H_{III}^R \right] - \frac{2}{3}(1-3H_I^R) L_I^R + 6R_I^R \right\} \dots\dots (40 \cdot a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_I^I &= \frac{2}{3}\nu'' G_{(1)} \\ &= \frac{2}{3}\nu'' \left[(1-3H_I^R)(-1+6H_I^R) + \frac{2}{3} H_{III}^R \right] \\ &\quad \dots\dots\dots (40 \cdot b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_I^I &= 2\nu'' \xi_{(1)} \\ &= 2\nu'' \left[F_{(1)} + \frac{2}{3}(1-2\nu') G_{(1)} - 2G_I^R + 4D_{(3)} \right] \\ &\quad \dots\dots\dots (40 \cdot c) \end{aligned}$$

となる。式(39)と式(40)を式(23・b)、式(25・b)と式

(26・b)に代入すると、 φ^I , k^I , χ^I は、

$$\begin{aligned} \varphi_I^I &= \frac{4\nu''}{3\varphi_0} \left\{ D_I^R \left[N_{(6)} D_{(2)} - \frac{3}{4}(3-4\nu') D_{II}^R + N_{(5)} \xi_{(1)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \nu' \xi_I^R \right] - D_{(1)} [3N_{(6)} D_{II}^R + 4(3-4\nu')(\nu'')^2 D_{(2)} \right. \\ &\quad \left. + 2N_{(5)} \xi_I^R + 8\nu'(\nu'')^2 \xi_{(1)} \right\} \dots\dots\dots (41 \cdot a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k^I &= \frac{\nu''}{\varphi_0} \left\{ \frac{4}{3} D_{(2)} [(1-\nu') D_I^R - 4(\nu'')^2 D_{(1)}] \right. \\ &\quad \left. - D_{II}^R [D_I^R + 4(1-\nu') D_{(1)}] \right\} \dots\dots\dots (41 \cdot b) \end{aligned}$$

$$\chi_I^I = \frac{2\nu''}{\chi_1} (H_2^R - H_{23}^R) \dots\dots\dots (41 \cdot c)$$

となり、いずれも ν'' で括れることがわかる。したがって、空孔の形状によらず、 $\varphi^I = k^I = \chi^I = 0$ の条件を同時に満足する解は $\nu'' = 0$ であることが証明できた。

3・2 Cramer の近似 独立な損失係数の数は1個であるという式(37)に対して、第二次近似としては、

$$\frac{\tan \delta_E}{\tan \delta_\mu} = \frac{1}{1 + \frac{\mu'}{3K}(1 + \tan^2 \delta_\mu)} \dots\dots\dots (42)$$

なる関係が成立すると言われている⁽¹⁵⁾。ここで K は複素量ではなく文字通り体積弾性係数である。これはCramerによって導かれたもので、通常の線形弾性において成り立つ関係式、

$$\frac{E}{G} = \frac{9K}{3K+G} \dots\dots\dots (43)$$

で E と G のみ複素量に置き換えて得られたものである⁽¹⁵⁾。すなわち、Cramerの近似は、 $\tan \delta_K = 0$ と置くことに他ならない。このとき、式(35・b)より、

$$2 \tan \delta_\mu (\nu'')^2 - 3\nu'' - (1+\nu')(1-2\nu') \tan \delta_\mu = 0 \dots\dots\dots (44)$$

なる関係が得られる。これを解くと、Cramerによるポアソン比の虚部 ν'' の条件は次式となる。

$$\nu'' = \frac{3}{4 \tan \delta_\mu} \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{8}{9}(1+\nu')(1-2\nu') \tan^2 \delta_\mu} \right] \dots\dots\dots (45)$$

図3は、式(45)から求めた ν' による ν'' の変化を示したもので、 $\tan \delta_\mu$ をパラメータとしている。図中の実線と破線は式(45)の2つの解を表している。線形弾性体におけるポアソン比の上限が0.5であることから、複素ポアソン比の動径は $\nu^c = \sqrt{(\nu')^2 + (\nu'')^2} \leq 0.5$ を満足しなければならない。図中の細線はこの範囲を示しており、式(45)の解の1つがこれを満足していることがわかる。既に示した図2の破線の結果は、このCramerによる ν'' の条件を用いたものである。図2より、この解析の範囲では多孔質材料の巨視的損失係数は $\tan \delta_\mu / \tan \delta_E = 0.97$ となっている。図4は

Fig. 3 Gramer's condition

Fig. 4 Macroscopic loss factor $\tan \bar{\delta}_E$ for the composite containing spherical reinforcements

同じ条件で求めた $\tan \bar{\delta}_E / \tan \delta_\mu$ の結果であり、Cramer の条件では 0.90 となることがわかる。

Cramer の近似は、 $\tan \delta_E$ と $\tan \delta_\mu$ が若干異なるという自らの実験結果を反映したものである。一方、本解析で $\nu''=0$ とした場合には、式(35)から常に $\tan \delta_E = \tan \delta_K = \tan \delta_\mu$ となり、 $\tan \delta_E$ と $\tan \delta_\mu$ とが異なるという実験事実は表せない。しかしながら、多孔質材料の条件式(37)は完全に満足することになる。本解析は線形粘弾性材料に対してのみ成り立つものであり、また、Cramer の近似は多孔質材料の条件式(37)を完全に満足するものではない。言え換えば、両者ともに近似が導入されていることになり、両方の条件を満足するものはない。

Fig. 5 Macroscopic loss factor $\tan \bar{\delta}_K$ for the composite containing spherical reinforcements

したがって、線形粘弾性体の複素ポアソン比に対して、Cramer の近似を用いるか、あるいは、その虚部の値をゼロと置くかは、いずれの近似が適切であるのかという判断に委ねられることになる。著者らの以前の解析⁽⁴⁾⁻⁽⁷⁾では、特に深く考えることなしに L. E. Nielsen の第一次近似⁽¹⁴⁾に対応する後者の方法を選択していたことは事実である。

最後に、図 5 に $\tan \bar{\delta}_K / \tan \delta_\mu$ の結果を示す。 $\tan \bar{\delta}_K$ の値は複素ポアソン比の虚部 ν'' の値によって大きく変化し、多孔質材料のときには Cramer の条件では 0.44 とかなり小さな値になることがわかる。これは、Cramer の条件が $\tan \delta_K=0$ と置いて求められたものであることに起因し、巨視的体積損失係数 $\tan \bar{\delta}_K$ を解析するにはこれが適用できないことを表している。

4. 結 言

本研究では、著者らによって求められている複合材料の巨視的弾性定数の一般解を用いて、この解に含まれる母材と強化基材の弾性定数を複素弾性率に置き換えることで、巨視的複素弾性率と巨視的損失係数の一般解を導出した。さらに、多孔質材料に着目することで得られた解を検討し、構成要素の複素ポアソン比の虚部をゼロと置くことで従来のモードひずみエネルギー法の考え方と一致する合理的な結果が得られることを明らかにした。また、実在材料の垂直モード損失係数とせん断モード損失係数とが異なるという実験事実を反映する Cramer の条件についても吟味し、これが

多孔質材料の垂直モードとせん断モードの巨視的損失係数に対して良い近似を与えることも明らかにした。

今後は、得られた一般解を用いて、強化基材の形状を調節することで巨視的損失係数の異方性の度合いを制御する方法を検討する予定である。また、等方性材料の複素ポアソン比に対して虚部をゼロとする場合とCramerの条件とについて検討してきたが、異方性材料の場合にはこれをどのように取り扱えばよいかが不明であり、今後の検討課題であると考えている。

文 献

- (1) Takashi, M. and Kunio, T., *Material System* (in Japanese), Vol. 6 (1987), pp. 21-48.
- (2) Mori, T. and Tanaka, K., *Acta Metallurgica*, Vol. 21 (1973), pp. 571-574.
- (3) Mura, T., *Micromechanics of Defects in Solids Second, Revised ed.*, (1987), pp. 177-187, Martinus Ni-jhoff Publishers.
- (4) Araki, S., Yamashita, H., Mizutani, N. and Sugimoto, A., *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol. 70, No. 698 (2004), pp. 1514-1521.
- (5) Araki, S., Sugimoto, A., Yamashita, H. and Ono, H., *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol. 75, No. 752 (2009), pp. 417-423.
- (6) Araki, S., Sugimoto, A. and Yamashita, H., *Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 53 (2004), pp. 3-17.
- (7) Araki, S., Sugimoto, A. and Yamashita, H., *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 73, No. 735 (2007), pp. 2918-2925.
- (8) Wakashima, K., *Journal of the Japan Society for Composite Material* (in Japanese), Vol. 2, No. 4 (1976), pp. 161-167.
- (9) Takao, Y., Chou, T. W. and Taya, M., *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 49 (1982), pp. 536-541.
- (10) Benveniste, Y., *Mechanics of Materials*, Vol. 6 (1987), pp. 147-157.
- (11) Zhao, Y. H. and Weng, G. J., *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 57 (1990), pp. 158-167.
- (12) Araki, S., Yamashita, H. and Minami, A., *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol. 71, No. 701 (2005), pp. 157-164.
- (13) Araki, S. and Yamashita, H., *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol. 74, No. 745 (2008), pp. 1227-1234.
- (14) Nielsen, L. E., *Mechanical Properties of Polymers* (Japanese ed.), (1969), pp. 135-192, Kagakudo-jin.
- (15) Cramer, W. S., *Journal of Polymer Science*, Vol. XXVI (1957), pp. 57-65.