純曲げを受ける長方形角筒最大モーメントの予測*

増 田 健 一^{*1}, 陳 玳 珩^{*2}Prediction of Maximum Moment of Rectangular Tubes
Subjected to Pure BendingKenichi MASUDA^{*3} and Dai-heng CHEN^{*3} Department of Mechanical Engineering, Tokyo University of Science,
1-3 Kagurazaka, Shinjuku-ku, Tokyo, 162-8601 Japan

In this paper, the collapse behaviors of rectangular tube subjected to pure bending are studied by using the finite element method. Such bending collapse has been studied for a long time, including the landmark study by Kecman. According to these studies, there are two types of collapses. The first type is a collapse due to buckling at the compression flange. The second type is a collapse due to plastic yielding at the flanges. However, there may be another collapse. For a rectangular tube in which the web is wider than the flange, it is found that collapse due to buckling at the compression web may occur. Further, an approximation prediction methods is proposed for estimating the maximum bending moment of rectangular tubes in which the web buckling is also taken into account. Its validity is verified by comparing with the numerical results by FEM under various conditions.

Key Words: FEM, Pure Bending, Rectangular Tube, Buckling, Effective Width

1. 緒 言

角筒の純曲げにおける最大モーメントの予測は Kecman⁽¹⁾ によって提案され、近年までこの手法が用いられており⁽²⁾, エネルギー吸収部材に関する単行本としてもまとめられている⁽³⁾. Kecman の手法⁽¹⁾では、角筒の純曲げにおける最大モーメントの値を、薄肉の場合は底面の座屈に伴う最大荷重から予測し、厚肉の場合は底面の全断面を降伏応力とすることから予測したものである。しかしながら、開断面の梁曲げでは圧縮側側面部分の座屈による崩壊が指摘されている⁽⁴⁾ ことから、側面の幅が大きい縦長断面を有する長方形角筒では側面の座屈に伴う最大荷重から最大モーメントが生じ曲げ崩壊に至る場合も存在することが推測される。そこで、そのような角筒幾何形状も考慮した角筒の純曲げ崩壊に関する研究は必要であると考え、本研究では、有限要素法による数値シミュレーション解析を行い、FEM の数値解析結果に基づいて、曲げ崩壊に及ぼす角筒幾何特性・材料特性の影響を明らかにしながら、角筒の純曲げ崩壊のメカニズムについて

検討を行い、最大モーメントの評価法を提案する。

なお、純曲げ崩壊に関する FEM 解析結果の有効性の検証として著者ら⁽⁵⁾ は先に、アルミニウム合金材を用いて円筒の純曲げ実験を行った Kyriakides ら⁽⁶⁾ の研究に対して、有限要素法による円筒曲げの数値シミュレーション解析を行い、Kyriakides らの実験結果との比較によって数値解析手法の有効性を確認している。

2. 解 析 方 法

有限要素法汎用ソフト MSC.Marc を用い、図 1 に示す長さ L 、肉厚 t 、横断面の上面と底面の幅 c_1 、高さとなる側面の幅 c_2 の薄肉角筒の左端を剛体板に固定する。右端には Guarracino⁽⁷⁾ と同様に端部のめぐれを防ぐために、肉厚 $5t$ の蓋を設け、蓋部分に z 軸回りの回転変位を与える。材料モデルに関しては、等方・均質な弾塑性材料とし、塑性降伏条件としてミーゼスの降伏条件を用いて、角筒の曲げに伴う大変形解析を行う。応力-ひずみ関係は縦弾性係数 E 、降伏応力 σ_y の弾完全塑性材を用い、本研究では、 $E = 72.4 \text{ GPa}$ 、ポアソン比 $\nu = 0.3$ とする。

非線形挙動の定式化としてアップデテッドラグランジュ法を用いて大変形挙動を考慮し、平衡方程式を満たすための修正計算法としてニュートン・ラプソン

* 原稿受付 2009 年 6 月 25 日。

^{*1} 正員、東京理科大学工学部 (〒162-8601 東京都新宿区神楽坂 1-3)。^{*2} 正員、フェロー、東京理科大学工学部。
E-mail: masudak@rs.kagu.tus.ac.jp

法を採用している。モデル化に際しては、曲げ変形が滑らかに生じるように、横断面一辺の長さに対して20分割、軸方向には、各分割要素がほぼ正方形となるように分割して、四辺形双一次厚肉シェル要素を用いて有限要素離散化している。

また、角筒曲げの最大モーメントは両端の境界条件の影響も受け角筒の長さによって異なる場合があるが、本研究では、両端の境界条件の影響をほぼ受けないように、十分長い角筒を用い、解析において長さ比 $L/c_1 > 6$ としている。

Fig. 1 Analyzed model of rectangular tube subjected to pure bending

3. 解析結果および検討

3.1 Kecman の提案式と FEM の結果との比較

まず、Kecman^{(1), (3)} が提案する最大モーメント M_{max} の予測式を示す。角筒における曲げ崩壊時の圧縮側の面に生じる座屈応力 σ_{buc} は次式

$$\sigma_{buc} = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(5.23 + 0.16 \frac{a}{b} \right) \left(\frac{t}{a} \right)^2 \quad (1)$$

で示され、ここで a が圧縮側と引っ張り側の面の幅、 b が側面の高さであり、 $a = c_1 + t$, $b = c_2 + t$ である。

Fig. 2 Schematic representation of axial stress distribution proposed by Kecman⁽³⁾: (a) $\sigma_{buc} < \sigma_Y$; (b) $\sigma_{buc} \geq 2\sigma_Y$

角筒の純曲げにおける最大モーメント M_{max} は、座屈応力 σ_{buc} と降伏応力 σ_Y の大小関係によって次の3つの場合に分けて予測される⁽³⁾。

(1) $\sigma_{buc} < \sigma_Y$ の場合

この場合、圧縮側の底面に弾性座屈が発生し、座屈の後、圧縮側の両角部での応力がさらに降伏応力まで上昇する。Kecman はこのことを考慮するために次式

$$a_e = a \left(0.7 \frac{\sigma_{buc}}{\sigma_Y} + 0.3 \right) \quad (2)$$

で定義される有効幅 a_e を導入し、断面における応力分布を図2(a)のように仮定する。ここで y_1 は合力0の条件から得られた圧縮側底面から中立軸までの距離であり、

$$\frac{y_1}{b} = \frac{a+b}{a_e + a + 2b} \quad (3)$$

となる。これによって角筒最大モーメント M_{max} は次式

$$M_{max} = \sigma_Y \cdot t \cdot b^2 \cdot \frac{2a+b+a_e \cdot (3\frac{a}{b}+2)}{3(a+b)} \quad (4)$$

で評価できる。

(2) $\sigma_{buc} \geq 2\sigma_Y$ の場合

この場合、断面における応力分布を図2(b)のように仮定する。すなわち、角筒最大モーメント M_{max} は、断面の完全塑性モーメント M_p に等しいものとする。

$$M_{max} = M_p = \sigma_Y \cdot t \left[a(b-t) + 0.5(b-2t)^2 \right] \quad (5)$$

(3) $\sigma_Y \leq \sigma_{buc} < 2\sigma_Y$ の場合

この場合、Kecman はまず、 $\sigma_{buc} = \sigma_Y$ のとき、上面と底面が降伏応力 σ_Y の弾性モーメント M_e となるとした。 M_e は次式

$$M_e = \sigma_Y \cdot t \cdot b \cdot \left(a + \frac{b}{3} \right) \quad (6)$$

である。そして、座屈応力が $\sigma_Y \leq \sigma_{buc} < 2\sigma_Y$ の場合の最大モーメント M_{max} は、完全塑性モーメント M_p と弾性モーメント M_e の線形補間から定める。

$$M_{max} = M_e + (M_p - M_e) \frac{\sigma_{buc} - \sigma_Y}{\sigma_Y} \quad (7)$$

図3に、Kecman⁽¹⁾ が提案した式(4), (5), (7)から得られる最大モーメント M_{max} の予測と、今回数値解析によって得られた長方形角筒に対する最大モーメントとを比較するため、アスペクト比 $c_2/c_1 = 1$ と $c_2/c_1 = 2$ の角筒 ($c_1 = 50\text{mm}$, $c_2 = 50\text{mm}$, $L = 300\text{mm}$, $\sigma_Y/E = 1/1000$ と、 $c_1 = 50\text{mm}$, $c_2 = 100\text{mm}$, $L = 300\text{mm}$, $\sigma_Y/E = 1/1000$) に対して、底面の肉厚比 t/c_1 と最大モーメント M_{max} を $\sigma_Y c_1 c_2 t$ で除して無次元化した値との関係を示す。図からわかるように、アスペクト比 c_2/c_1 が大きい、つまり縦長断面を有する角筒の場合で肉厚比 t/c_1 が小さい範囲においては、Kecman⁽¹⁾

の予測と FEM の結果との間に特に大きな誤差が生じている。このことから、Kecman の提案式が適用できない範囲が存在することが理解できる。そこで、長方形角筒の最大モーメント M_{max} を正確に予測するには、種々の角筒幾何特性、および材料特性に対して、その曲げ崩壊のメカニズムを明らかにしなければならない。

Fig. 3 Relation of t/c_1 and $M_{max}/(\sigma_Y c_1 c_2 t)$ by present FE analysis and Kecman's theory⁽¹⁾

3.2 Kecman が指摘した 2 つの崩壊メカニズムについて 正方形断面となるアスペクト比 $c_2/c_1=1$ の場合について、まず、 $\sigma_Y \leq \sigma_{buc}$ の範囲における崩壊メカニズムの確認を行う。図 4 に、 $\sigma_{buc} = 1.52\sigma_Y$ となる角筒 ($t = 0.9\text{mm}$, $c_1 = 50\text{mm}$, $c_2 = 50\text{mm}$, $\sigma_Y/E = 1/1000$) について、角筒の曲率 $\kappa = \theta/L$ とモーメント M との関係を示し、曲率と圧縮側の面中央部の点 B および側壁の高さ 1/4 の位置 C (図 4 中に示した横断面の模擬図を参照) での軸方向圧縮応力と降伏応力との比 σ_x/σ_Y (図では圧縮応力を正とする) との関係も合わせて示す。図 4 からわかるように、まず、最大モーメントの値は同図に示した Kecman の予測式 (7) の値とよく一致している。また、曲げモーメントが最大となるまでに、底面中央部の点 B の σ_x/σ_Y は上昇しその値は 1 に達し、また、側壁部分の σ_x/σ_Y の値も上昇し続ける。図 4 の①、②のときに当たる、崩壊断面における軸方向応力分布を図 5 に示す。図から、最大モーメントが生じるときの応力 (②) は、最大モーメントが生じる前の応力 (①) に比べて、すべての周方向位置において、その絶対値は増加していることがわかる。また、最大モーメント時の応力分布は同図に示した Kecman の予測方法とよく一致していることがわかる。これらのことから、正方形断面となるアスペクト比 $c_2/c_1=1$ で $\sigma_Y \leq \sigma_{buc}$ の範囲では座屈は生じず、底面の応力分布は一樣でその値は降伏応力となり、側

面の応力分布は線形とした弾性モーメントと完全塑性モーメントを用いた Kecman の予測方法から最大モーメントを予測することができる。

Fig. 4 Relations of θ/L and M, σ_x for elastic perfectly plastic square tube with $t = 0.9\text{mm}$, $c_1 = 50\text{mm}$, $c_2 = 50\text{mm}$

Fig. 5 Axial stress distribution at the collapse cross-section of the square tube shown in Fig. 4

次に、正方形断面となるアスペクト比 $c_2/c_1=1$ で $\sigma_Y > \sigma_{buc}$ の範囲における崩壊メカニズムの確認を行う。図 6 に、 $\sigma_{buc} = 0.31\sigma_Y$ となる角筒 ($t = 0.4\text{mm}$, $c_1 = 50\text{mm}$, $c_2 = 50\text{mm}$, $\sigma_Y/E = 1/1000$) について、角筒の曲率 $\kappa = \theta/L$ とモーメント M との関係を示し、曲率と圧縮側の面中央部の点 B および側壁の高さ 1/4 の位置 C (図 6 中に示した横断面の模擬図を参照) での軸方向圧縮応力と降伏応力との比 σ_x/σ_Y (図では圧縮応力を正とする) との関係も合わせて示す。図 6 からわかるように、まず、最大モーメントの値は同図に示した Kecman の予測式 (4) の値と良く一致している。

Fig. 6 Relations of θ/L and M, σ_x for elastic perfectly plastic square tube with $t = 0.4\text{mm}$, $c_1 = 50\text{mm}$, $c_2 = 50\text{mm}$

Fig. 7 Axial stress distribution at the collapse cross-section of the square tube shown in Fig.6

また、底面中央部の点 B の軸方向応力の値は式 (1) で示した座屈応力の値に達すると弾性座屈が生じ減少するが、側壁部分の点 C での応力は上昇し続ける。その後、圧縮側の合力が最大となるときに対応して最大モーメントが現れる。図 7 に図 6 の①、②の時点における崩壊断面の軸方向応力分布を示す。図 7 から、底面に座屈が生じることで底面中央部は応力が低下するが、圧縮側角部では座屈が生じないため応力は上昇する。座屈直後は底面中央部での応力減少に比べて角部付近での応力上昇の割合が大きいため、座屈後も圧縮側の合力は大きくなりモーメントは上昇する。また、最大モーメント時まで側壁部分に座屈は生じていないので、側壁部分の応力分布は線形的に変化する。図 7 には、Kecman が提案する底面に有効幅の概念を適用

した応力分布も合わせて示している。図から FEM の結果 (②) と Kecman の提案した応力分布はよく一致していることがわかる。このことから、 $\sigma_Y > \sigma_{buc}$ の範囲で正方形断面となるアスペクト比 $c_2/c_1=1$ の場合は Kecman が指摘するように底面に座屈が生じ、圧縮側角部に高い応力集中が生じることで、圧縮側の合力が最大となり、最大モーメントが生じる。底面座屈が生じた後に、圧縮側の合力が最大となる場合、底面に有効幅の概念を適用することで応力分布の予測が可能となり最大モーメントの値を予測することができる。

3.3 Kecman の指摘と異なる崩壊メカニズムについて

アスペクト比 c_2/c_1 が大きい場合、Kecman の指摘とは異なり $\sigma_Y < \sigma_{buc}$ で底面に座屈が生じない場合、側壁に座屈が生じ崩壊するもの、 $\sigma_Y > \sigma_{buc}$ で底面に座屈が生じる場合に側壁にも座屈が生じ崩壊するものが確認された。図 8 に、 $\sigma_{buc} = 2.83\sigma_Y, c_2/c_1 = 5$ となる角筒 ($t = 0.5\text{mm}$, $c_1 = 20\text{mm}$, $c_2 = 100\text{mm}$, $\sigma_Y/E = 1/1000$) について、角筒の曲率 $\kappa = \theta/L$ とモーメント M との関係を示し、曲率と圧縮側の面中央部の点 B および側壁の高さ 1/4 の位置 C (図 8 中に示した横断面の模擬図を参照) での軸方向圧縮応力と降伏応力との比 σ_x/σ_Y (図では圧縮応力を正とする) との関係も合わせて示す。図 8 からわかるように、まず、最大モーメントの値は同図に示した Kecman の予測式 (5) の値を大きく下回る。また、底面中央部の点 B の軸方向応力は最大モーメントが生じるまで上昇し、降伏応力との比 (σ_x/σ_Y) は 1 に達するが、圧縮側側壁部分の点 C での軸方向応力は最大モーメントが生じる前に減少に転じることが見てとれる。この原因は側壁座屈によるものと考えられる。図 9 に図 8 の①、②の時点における崩壊断面の軸方向応力分布を示す。図 9 から、最大モーメントが生じる②の時点において、底面の応力は一樣で、降伏応力との比の絶対値は 1 となっているが、側壁部分では応力上昇が見られない。図 9 には、Kecman が提案する応力分布も合わせて示している。図中の矢印で示すように、FEM の結果は側壁座屈により応力上昇が見られないことから、Kecman の提案した全断面塑性モーメントによる応力分布と側壁部分において両者の間には大きな誤差が生じていると考えられる。このことから、 $\sigma_Y < \sigma_{buc}$ で、アスペクト比 c_2/c_1 の値が大きい場合は底面座屈は生じず、側壁座屈が生じその側壁座屈に伴う最大荷重によって、最大モーメントが生じる。

図 10 に、 $\sigma_{buc} = 0.30\sigma_Y, c_2/c_1 = 2$ となる角筒 ($t = 0.4\text{mm}$, $c_1 = 50\text{mm}$, $c_2 = 100\text{mm}$, $\sigma_Y/E = 1/1000$) について、角筒の曲率 $\kappa = \theta/L$ とモーメント M との関

Fig. 8 Relations of θ/L and M, σ_x for elastic perfectly plastic rectangular tube with $t = 0.5\text{mm}$, $c_1 = 20\text{mm}$, $c_2 = 100\text{mm}$

Fig. 9 Axial stress distribution at the collapse cross-section of the rectangular tube shown in Fig.8

係を示し、曲率と圧縮側の面中央部の点 B および側壁の高さ 1/4 の位置 C (図 10 中に示した横断面の模擬図を参照) での軸方向圧縮応力と降伏応力との比 σ_x/σ_y (図では圧縮応力を正とする) との関係も合わせて示す。図 10 からわかるように、まず、最大モーメントの値は同図に示した Kecman の予測式 (4) の値を大きく下回る。また、底面中央部の点 B の軸方向応力の値は式 (1) で示した弾性座屈の値に達すると弾性座屈が生じ減少に転じ、圧縮側側壁部分の点 C での軸方向応力も最大モーメントが生じる前に減少に転じることが見てとれ、この原因は側壁座屈によるものと考えられる。その後、圧縮側の合力が最大になるときに対応して最大モーメントが生じる。図 11 に図 10 の①、②の時点における崩壊断面の軸方向応力分布を示す。図

Fig. 10 Relations of θ/L and M, σ_x for elastic perfectly plastic rectangular tube with $t = 0.5\text{mm}$, $c_1 = 20\text{mm}$, $c_2 = 100\text{mm}$

Fig. 11 Axial stress distribution at the collapse cross-section of the rectangular tube shown in Fig.10

11 から、底面および側面に座屈が生じることで、底面中央部および圧縮側側壁の角部から離れた位置での応力は減少し、角部に高い応力集中が生じていることが見てとれる。図 11 には、Kecman が提案する底面に有効幅の概念を適用した応力分布も合わせて示している。図から FEM の結果は側壁座屈による応力低下が見られるが、Kecman の提案した応力分布は側壁座屈を考慮していないため、図中の矢印で示すように、両者の間には大きな誤差が生じている。このことから、 $\sigma_y > \sigma_{buc}$ で、アスペクト比 c_2/c_1 の値が大きい場合は底面および側面に座屈が生じ圧縮側角部に高い応力集中が生じることで、圧縮側の合力が最大となり、最

大モーメントが生じる。

3.4 側壁座屈を考慮した最大モーメントの評価方法

法 図 12 に、 $\sigma_{buc} < \sigma_Y$ の範囲における底面座屈が生じる場合の Kecman の提案する応力分布と今回提案する側壁座屈も生じる場合を考慮した圧縮側合力が最大となるときの応力分布を示す。図 (b) からわかるように、側壁座屈の考慮の仕方として、圧縮側側壁部分にも有効幅の概念を適用し、その有効幅はアスペクト比には依存せず底面の有効幅と同じ幅とする。有効幅 a_e が底面と側壁の幅に依存しないとした理由は、Karman⁽⁸⁾ が提案するように、有効幅の領域に発生する応力は幅 a_e の板の座屈応力に等しいと仮定し、元の底面・側壁の幅に関係しないとしていることを参考にした。中立軸の位置 y_1 は Kecman の式 (3) を適用し、圧縮側の合力と引張り側の合力がゼロになる条件から引張り側の応力の大きさを表す係数 α が得られる。つまり、圧縮側の合力： $2\sigma_Y t(a_e - t)$ と引張り側の合力： $\alpha\sigma_Y t(a - 2t) + \alpha\sigma_Y t(b - y_1)$ より、

$$\alpha = \frac{2(a_e - t)}{a + b - y_1 - 2t} \quad (8)$$

が得られる。

Fig. 12 Axial stress distribution in the range of $\sigma_{buc} < \sigma_Y$: (a) by Kecman's method ; (b) by present method

図 13 には $\sigma_{buc} < \sigma_Y$ の範囲における底面座屈が生じる場合の最大モーメント時（圧縮側の合力が最大となる）の崩壊断面の応力分布を比較するため、 $t = 0.4\text{mm}$, $c_1 = 50\text{mm}$, $\sigma_Y/E = 1/1000$ の角筒曲げ最大モーメント時の応力分布について、FEM の結果、Kecman の手法と今回の手法を合わせて示す。これらの図からわかるように、アスペクト比 c_2/c_1 の値が大きい (a)(b) では FEM の結果と側壁座屈を考慮した今回の手法はよく一致し、アスペクト比 c_2/c_1 の値が小さい (d) では FEM の結果と Kecman の手法がよく一致している。

図 14 に、 $\sigma_{buc} \geq \sigma_Y$ の範囲における底面座屈が生じない場合の Kecman の提案する応力分布と今回提案

Fig. 13 Axial stress distribution by present FE analysis, Kecman's theory and proposal method :with (a) $c_2/c_1=2$; (b) $c_2/c_1=1.6$; (c) $c_2/c_1=1$; (d) $c_2/c_1=0.6$

する底面座屈は生じないが側壁座屈が生じる場合を考慮した圧縮側合力が最大となるときの応力分布を示す。図 (b) からわかるように、側壁座屈の考慮の仕方としては $\sigma_{buc} < \sigma_Y$ のときと同様に圧縮側側壁部分に有効幅の概念を適用し、その有効幅はアスペクト比には依存せず底面の有効幅の式 (2) を用いる。中立軸の位置 y_1 は Kecman の式 (3) を適用し、圧縮側の合力と引張り側の合力がゼロになる条件から引張り側の応力の大きさを表す係数 β が得られる。つまり、圧縮側の合力： $\sigma_Y t(a - 2t) + \sigma_Y t a_e$ と引張り側の合力： $\beta\sigma_Y t(a - 2t) + \beta\sigma_Y t(b - y_1)$ より、

$$\beta = \frac{a + a_e - 2t}{a + b - y_1 - 2t} \quad (9)$$

が得られる。

Fig. 14 Axial stress distribution in the range of $\sigma_{buc} \geq \sigma_Y$: (a) by Kecman's method ; (b) by present method

図 15 には、 $\sigma_{buc} \geq \sigma_Y$ の範囲における底面座屈が生じない場合の最大モーメント時（圧縮側の合力が最大となる）の崩壊断面の応力分布を比較するため、 $t = 0.5\text{mm}$, $c_1 = 20\text{mm}$, $\sigma_Y/E = 1/1000$ の角筒曲げ最大モーメント時の応力分布について、FEM の結果、Kecman の手法と今回の手法を合わせて示す。これらの図からわかるように、アスペクト比 c_2/c_1 の値が大きい (a) では FEM の結果と側壁座屈を考慮した今回の手法はよく一致し、アスペクト比 c_2/c_1 の値が小さい (b) では FEM の結果と Kecman の手法がよく一致している。

Fig. 15 Axial stress distribution by present FE analysis, Kecman' theory and proposal method :with (a) $c_2/c_1=5$; (b) $c_2/c_1=2$

次に今回の手法による最大モーメントの評価式を示す。まず、 $\sigma_{buc} < \sigma_Y$ の範囲における最大モーメントの評価式を示す。引張り側側壁部分は 1 点に集中荷重が作用するとした場合その位置 G は

$$G = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}b + y_1 \right) \quad (10)$$

となる。よって最大モーメント時にそれぞれの部分に作用するモーメントは次のように表される。

引張り側側壁に作用するモーメント：

$$\frac{1}{2} \alpha \sigma_Y t (b - y_1) \times G \times 2$$

引張り側上面に作用するモーメント：

$$\alpha \sigma_Y t (a - 2t) \times \frac{1}{2} (b - t)$$

圧縮側側壁に作用するモーメント：

$$\sigma_Y \frac{a_e}{2} t \times \left(\frac{b}{2} - \frac{a_e}{4} \right) \times 2$$

圧縮側底面に作用するモーメント：

$$\sigma_Y (a_e - 2t) t \times \frac{1}{2} (b - t)$$

よって側壁座屈が生じる場合の最大モーメントは次式

$$M_{\max} = \frac{1}{2} \sigma_Y t \left\{ \alpha (a - 2t) (b - t) + 2\alpha (b - y_1) G + (a_e - 2t) (b - t) + 2a_e \left(\frac{b}{2} - \frac{a_e}{4} \right) \right\} \quad (11)$$

となる。ここに y_1, α, G は式 (3), (8), (10) の値である。以上のことから、 $\sigma_{buc} < \sigma_Y$ の範囲における最大モーメントは、

$$M_{\max} = \text{Min}(\text{eq. (4), eq. (11)}) \quad (12)$$

によって評価される。

次に $\sigma_{buc} \geq \sigma_Y$ の範囲における最大モーメントの評価式を示す。側壁座屈が生じる場合の最大モーメントは結果のみ示すと次式

$$M_{\max} = \frac{1}{2} \sigma_Y t \left\{ \beta (a - 2t) (b - t) + 2\beta (b - y_1) G + (a - 2t) (b - t) + 2a_e \left(\frac{b}{2} - \frac{a_e}{4} \right) \right\} \quad (13)$$

となる。ここに y_1, β, G は式 (3), (9), (10) の値である。以上のことから、 $\sigma_{buc} \geq \sigma_Y$ の範囲における最大モーメントは、次式

$$M_{\max} = \text{Min}(\text{eq. (5), eq. (7), eq. (13)}) \quad (14)$$

によって評価される。

図 16 には角筒曲げ最大モーメントの値に関して FEM の結果、Kecman の提案式と今回の提案式を比較するため $t=0.4\text{mm}$ と $t=0.5\text{mm}$ の角筒に対して c_2/c_1 と $M_{\max}/(\sigma_Y c_1 c_2 t)$ との関係を示す。この図からわかるように、Kecman の提案式と今回の提案式から得られる $M_{\max}/(\sigma_Y c_1 c_2 t)$ の小さいほうの値は FEM の結果とよく一致する。図 17 には最大モーメントの値に関して FEM の結果、Kecman の手法と今回提案した手法を比較するため、アスペクト比 $c_2/c_1=2$ で $\sigma_Y/E = 1/1000$ と $\sigma_Y/E = 1/500$ の角筒に対して t/c_1 と $M_{\max}/(\sigma_Y c_1 c_2 t)$ との関係を示す。この図からわかるように、Kecman の手法と今回提案した手法から得られる $M_{\max}/(\sigma_Y c_1 c_2 t)$ の小さいほうの値は FEM の結果とよく一致する。図 18 には種々の肉厚比 t/c_1 とアスペクト比 c_2/c_1 に対して、FEM から得られる $M_{\max}$ に対して、今回提案した式による予測値との誤差が Kecman の予測値との誤差よりも大きい場合を○のプロットで示し、今回の提案式と Kecman の提案式との比較により得られる側壁座屈が生じるかどうかの境界線も合わせて示している。この図からわかるように、得られた境界線は精度良く崩壊モードを分けている。また、今回提案した式を用いることで●のプロットで示したような角筒幾何、材料の場合に対しても精度良く最大モーメントの値を予測することが可能である。

4. 結 言

本研究では、有限要素法による弾塑性数値解析を行い、角筒の曲げ崩壊に関する検討を行った。その結果、以下の点が明らかになった。

- (1) 角筒純曲げにおける最大モーメントは、Kecman が指摘する完全塑性モーメントと弾性モーメント

Fig. 16 Relation of c_2/c_1 and $M_{max}/(\sigma_Y c_1 c_2 t)$ by present FE analysis, Kecman's theory and proposal method

Fig. 18 Mode map in $(t/c_1, c_2/c_1)$

Fig. 17 Relation of t/c_1 and $M_{max}/(\sigma_Y c_1 c_2 t)$ by present FE analysis, Kecman's theory and proposal method

を用いることによって得られるもの、底面の座屈に伴う最大荷重によって得られるものの他に、側壁座屈に伴う最大荷重によって得られるものが存在する。

- (2) 側面に座屈が生じる場合の圧縮側合力が最大となるとき、の応力分布は、底面に適用した有効幅と同じ幅の有効幅を側面にも適用することで精度のよい結果が得られる。
- (3) 今回の提案式と Kecman の提案式を用いることで、種々のアスペクト比に対応した長方形角筒の最大モーメントの値および崩壊モードを予測することが可能である。

文 献

- (1) Kecman, D., Bending collapse of rectangular and square section tubes, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol.25, (1983), pp.623-36.
- (2) Kim, T. H., Reid, S. R., Bending collapse of thin-walled rectangular section columns, *Computers and Structures*, Vol.79, (2001), pp.1897-1911.
- (3) Lu, G., Yu, T. X., *Energy absorption of structures and materials*, (2003), Section 5, Crc Pr I Llc.
- (4) Parh, M. S. and Lee, B. C., Prediction of bending collapse behaviours of thin-walled open section beams *Thin-Walled Structures*, Vol.25, No.3, (1996), pp.185-206.
- (5) Chen, D., Masuda, K. and Ozaki, S., Study on Elastoplastic Pure Bending Collapse of Cylindrical Tubes, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.74, No.740(2008), pp.520-527.
- (6) Kyriakides, S. and Ju G. T., Bifurcation and localization instabilities in cylindrical shells under bending- I, II. Experiments, Predictions *International Journal of Solids and Structures*, Vol.29, (1992), pp.1117-1171.
- (7) Guarracino, F., On the analysis of cylindrical tubes under flexure: theoretical formulations, experimental data and finite element analyses, *Thin-Walled Structures*, Vol.41, (2003), pp.127-147.
- (8) Karman, V.T., Sechler, E.E. and Donnell, H.L., Strength of thin plates in compression, *Trans ASME*, Vol.54, (1932), pp.53-57.