長さの異なる二個の平行き裂を有する圧電厚板の
非定常電気熱弾性応答*上 田 整^{*1}, 石 井 彰 人^{*2}Transient Thermoelectromechanical Response of a Piezoelectric Strip
with Two Parallel Cracks of Different LengthsSei UEDA^{*3} and Akito ISHII^{*3} Department of Mechanical Engineering, Osaka Institute of Technology,
5-16-1 Omiya, Asahi-ku, Osaka-shi, Osaka, 535-8585 Japan

In this study, the theoretical analysis of a transient piezothermoelastic problem is developed for a piezoelectric strip with two parallel cracks of different lengths under thermal shock loading condition. The crack faces are supposed to be insulated thermally and electrically. By using both the Laplace transform and the Fourier transform, the thermal and electromechanical problems are reduced to two systems of singular integral equations, respectively, which are solved numerically. A numerical method is employed to obtain the time dependent solutions by way of a Laplace inversion technique. The intensity factors versus time for various geometric parameters are calculated.

Key Words: Stress Intensity Factor, Elasticity, Thermal Shock, Fracture Mechanics, Piezoelectric Material, Two Parallel Cracks, Integral Transform

1. 結 言

温度変化に起因する熱変形や熱応力を適切に制御できる知的材料システム^{(1),(2)}の開発には, 熱的環境下にある圧電材料を対象とした電気熱弾性破壊力学的挙動の解明が重要であり, 単一き裂を有する圧電厚板の定常特異電気熱弾性場が理論解析されている^{(3)~(5)}. また, 材料内には多数のき裂が存在するため, 破壊挙動に及ぼすき裂間相互干渉の影響を解明することも重要である. このため, 著者らは, 共線等長二き裂⁽⁶⁾, 平行等長二き裂⁽⁷⁾, 長さの異なる平行二き裂⁽⁸⁾を有する圧電厚板の電気熱弾性破壊力学的挙動を解明している. 一方, 知的材料システムは急激な温度変化を伴う場合があり, 非定常破壊力学的挙動に関する研究例^{(9)~(11)}も報告されている. しかし, いずれも単一き裂を対象としたもので, 複数き裂の非定常相互干渉に注目した研究例は見当たらないようである.

そこで本報では, 前報⁽⁸⁾を拡張し, 長さの異なる二個の平行き裂を有する圧電厚板を対象に, 厚板上面の温度が瞬間的に変化する場合を考え, き裂先端の非定常特異電気熱弾性場を理論解析した. 解析には,

Laplace-Fourier 積分変換法および熱弾性変位ポテンシャル法を用い, 問題の解を特異積分方程式の解に帰着して解く方法を採用した^{(12),(13)}. また, 数値解析には, Gauss-Jacobi の数値積分公式⁽¹⁴⁾を用い, Laplace 像空間における解を得た. さらに, 数値 Laplace 逆変換法⁽¹⁵⁾を適用し, 非定常応力・電束密度拡大係数に及ぼす幾何学的形状の影響を明らかにした.

2. 問題の設定と基礎式

Fig.1 Two parallel cracks in a piezoelectric strip.

図1に示す直角座標系 (x, y, z) において, 厚さ $h = h_1 + h_2$ の圧電厚板を考え, $z = \pm h_0$ 面上に長さ $2c$ および $2\mu c$ ($\mu \geq 0$)のき裂が自由表面に平行に存在するものとし, 平面ひずみを仮定する. 初期温度 T_I の圧電厚板の上面($z = h_1$ 面)温度が時刻 $t = 0$ で T_I から $T_I + T_0$ に変化し, 下面($z = -h_2$ 面)温度は T_I に

* 原稿受付 2009年9月10日.

^{*1} 正員, 大阪工業大学工学部(〒535-8585 大阪市旭区大宮5-16-1).^{*2} 学生員, 大阪工業大学大学院工学研究科.

E-mail: ueda@med.oit.ac.jp

保持されている問題を設定し、分極方向を z 軸方向とする。なお、弾性定数を c_{jk} 、圧電定数を e_{jk} 、誘電定数を ϵ_{jj} 、熱弾性定数を λ_{jj} 、熱伝導率を κ_x, κ_z 、焦電定数を p_z とし、下添字 x, y, z は座標軸方向を示すものとする。

温度を $T_i(x, z, t)$ 、変位ベクトルの成分を $u_{xi}(x, z, t)$ 、 $u_{zi}(x, z, t)$ 、静電ポテンシャルを $\phi_i(x, z, t)$ とすると、応力テンソルの成分 $\sigma_{xxi}(x, z, t)$ 、 $\sigma_{zzi}(x, z, t)$ 、 $\sigma_{zxi}(x, z, t)$ および電束密度ベクトルの成分 $D_{xi}(x, z, t)$ 、 $D_{zi}(x, z, t)$ ($i = 0, 1, 2$) は次のように与えられる⁽¹⁶⁾。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xxi} &= c_{11} \frac{\partial u_{xi}}{\partial x} + c_{13} \frac{\partial u_{zi}}{\partial z} + e_{31} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} - \lambda_{11} T_i \\ \sigma_{zzi} &= c_{13} \frac{\partial u_{xi}}{\partial x} + c_{33} \frac{\partial u_{zi}}{\partial z} + e_{33} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} - \lambda_{33} T_i \\ \sigma_{zxi} &= c_{44} \left(\frac{\partial u_{xi}}{\partial z} + \frac{\partial u_{zi}}{\partial x} \right) + e_{15} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \\ D_{xi} &= e_{15} \left(\frac{\partial u_{xi}}{\partial z} + \frac{\partial u_{zi}}{\partial x} \right) - \epsilon_{11} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \\ D_{zi} &= e_{31} \frac{\partial u_{xi}}{\partial x} + e_{33} \frac{\partial u_{zi}}{\partial z} - \epsilon_{33} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} + p_z T_i \end{aligned} \right\} \quad (i = 0, 1, 2) \quad (1)$$

ここに、下添字 $i = 0, 1, 2$ はそれぞれ $-h_0 \leq z \leq h_0$ 、 $h_0 \leq z \leq h_1$ 、 $-h_2 \leq z \leq -h_0$ の領域の場を表す。

熱伝導方程式は次式となる。

$$\kappa^2 \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2} = \frac{1}{\lambda_0} \frac{\partial T_i}{\partial t} \quad (i = 0, 1, 2) \quad (2)$$

ここに、 $\kappa^2 = \kappa_x / \kappa_z$ 、 λ_0 は温度伝導率である。また、文献⁽¹⁶⁾を考慮すると変位および静電ポテンシャルに関する場の支配方程式は

$$\left. \begin{aligned} c_{11} \frac{\partial^2 u_{xi}}{\partial x^2} + c_{44} \frac{\partial^2 u_{xi}}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2 u_{zi}}{\partial x \partial z} \\ + (e_{31} + e_{15}) \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial z} &= \lambda_{11} \frac{\partial T_i}{\partial x} \\ c_{44} \frac{\partial^2 u_{zi}}{\partial x^2} + c_{33} \frac{\partial^2 u_{zi}}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2 u_{xi}}{\partial x \partial z} \\ + e_{15} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} + e_{33} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial z^2} &= \lambda_{33} \frac{\partial T_i}{\partial z} \\ e_{15} \frac{\partial^2 u_{xi}}{\partial x^2} + e_{33} \frac{\partial^2 u_{xi}}{\partial z^2} + (e_{15} + e_{31}) \frac{\partial^2 u_{zi}}{\partial x \partial z} \\ - \epsilon_{11} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} - \epsilon_{33} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial z^2} &= -p_z \frac{\partial T_i}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (i = 0, 1, 2) \quad (3)$$

θ_{0i} , θ_{1i} , c_i ($i = 1, 2$) を次式で定義すると

$$(\theta_{0i}, \theta_{1i}, c_i) = \begin{cases} (h_0, h_1, c) & (i = 1) \\ (-h_0, -h_2, \mu c) & (i = 2) \end{cases} \quad (4)$$

本問題の温度場に関する境界条件式は

$$\left. \begin{aligned} \partial T_0(x, \theta_{0i}, t) / \partial z &= 0 & (|x| < c_i) \\ T_0(x, \theta_{0i}, t) &= T_i(x, \theta_{0i}, t) & (|x| \geq c_i) \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2) \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \partial T_0(x, \theta_{0i}, t) / \partial z &= \partial T_i(x, \theta_{0i}, t) / \partial z & (|x| \geq 0) \\ T_i(x, \theta_{1i}, t) &= \begin{cases} T_I + T_0 H(t) & (i = 1) \\ T_I & (i = 2) \end{cases} & (|x| \geq 0) \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2) \quad (6)$$

ここに、 $H(t)$ は Heaviside の単位階段関数である。次に、電気弾性場に関する境界条件式は⁽¹⁷⁾

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zz0}(x, \theta_{0i}, t) &= 0 & (|x| < c_i) \\ u_{z0}(x, \theta_{0i}, t) &= u_{zi}(x, \theta_{0i}, t) & (|x| \geq c_i) \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2) \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zx0}(x, \theta_{0i}, t) &= 0 & (|x| < c_i) \\ u_{x0}(x, \theta_{0i}, t) &= u_{xi}(x, \theta_{0i}, t) & (|x| \geq c_i) \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2) \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} D_{z0}(x, \theta_{0i}, t) &= 0 & (|x| < c_i) \\ \phi_0(x, \theta_{0i}, t) &= \phi_i(x, \theta_{0i}, t) & (|x| \geq c_i) \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2) \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zz0}(x, \theta_{0i}, t) &= \sigma_{zzi}(x, \theta_{0i}, t) & (|x| \geq 0) \\ \sigma_{zx0}(x, \theta_{0i}, t) &= \sigma_{zxi}(x, \theta_{0i}, t) & (|x| \geq 0) \\ D_{z0}(x, \theta_{0i}, t) &= D_{zi}(x, \theta_{0i}, t) & (|x| \geq 0) \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2) \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{zzi}(x, \theta_{1i}, t) &= 0 & (|x| \geq 0) \\ \sigma_{zxi}(x, \theta_{1i}, t) &= 0 & (|x| \geq 0) \\ D_{zi}(x, \theta_{1i}, t) &= 0 & (|x| \geq 0) \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2) \quad (11)$$

3. 温度場解析

温度場 $T_i(x, z, t)$ ($i = 0, 1, 2$) を次のように置く。

$$T_i(x, z, t) = T_I + T^{(1)}(z, t) + T_i^{(2)}(x, z, t) \quad (i = 0, 1, 2) \quad (12)$$

ここに、非擾乱温度場 $T^{(1)}(z, t)$ は文献⁽⁹⁾より、以下のようなになる。

$$\begin{aligned} T^{(1)}(z, t) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2T_0}{n\pi} \sin \left[\frac{n\pi(h_1 - z)}{h} \right] \\ &\times \exp \left(- \frac{\lambda_0 n^2 \pi^2 t}{h^2} \right) + \frac{T_0}{h} [h - (h_1 - z)] \end{aligned} \quad (13)$$

また、擾乱温度場 $T_i^{(2)}(x, z, t)$ ($i = 0, 1, 2$) に関する支配方程式および境界条件式は

$$\kappa^2 \frac{\partial^2 T_i^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_i^{(2)}}{\partial z^2} = \frac{1}{\lambda_0} \frac{\partial T_i^{(2)}}{\partial t} \quad (i = 0, 1, 2) \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \partial T_0^{(2)}(x, \theta_{0i}, t) / \partial z &= -\partial T^{(1)}(\theta_{0i}, t) / \partial z \\ &\quad (|x| < c_i) \\ T_0^{(2)}(x, \theta_{0i}, t) &= T_i^{(2)}(x, \theta_{0i}, t) \\ &\quad (|x| \geq c_i) \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2) \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \partial T_0^{(2)}(x, \theta_{0i}, t) / \partial z &= \partial T_i^{(2)}(x, \theta_{0i}, t) / \partial z \\ &\quad (|x| \geq 0) \\ T_i^{(2)}(x, \theta_{1i}, t) &= 0 \\ &\quad (|x| \geq 0) \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2) \quad (16)$$

式(14)に Laplace-Fourier 積分変換法を適用して, Laplace 像空間における擾乱温度場の一般解を求めると(12)

$$T_n^{(2)*}(x, z, p) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} D_{nj}(s, p) \exp(|s| \kappa_{nj} z) \times \exp(-isx) ds \quad (n = 0, 1, 2) \quad (17)$$

式中の $D_{nj}(s, p)$ ($n = 0, 1, 2, j = 1, 2$) は境界条件式より決定される未知関数, 上添字 * は Laplace 像空間の諸量を示し, $\kappa_{nj} = \kappa_{nj}(s, p)$ ($n = 0, 1, 2, j = 1, 2$) は

$$\left. \begin{aligned} \kappa_{n1} &= -\tau, \quad \kappa_{n2} = \tau \\ \tau &= \tau(s, p) = \left(\kappa^2 + \frac{p}{s^2 \lambda_0} \right)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (n = 0, 1, 2) \quad (18)$$

新しい未知関数 $G_{k0}(x, p)$ ($k = 1, 2$) を次のように導入する(13).

$$G_{k0}(x, p) = \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [T_0^{(2)*}(x, \theta_{0k}, p) - T_k^{(2)*}(x, \theta_{0k}, p)] \\ \quad (|x| < c_k) \\ 0 \\ \quad (|x| \geq c_k) \end{aligned} \right\} \quad (k = 1, 2) \quad (19)$$

従って, Laplace 変換された境界条件式(16)を考慮すると, 混合境界条件式(15)の第1式より, 未知関数 $G_{10}(\xi, p), G_{20}(\mu\xi, p)$ に関する次の連立特異積分方程式が得られる.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\kappa}{2\pi} \int_{-c}^c \left[\left(\frac{1}{\xi - x} + M_{011} \right) G_{10}(\xi, p) \right. \\ \left. - \mu M_{012} G_{20}(\mu\xi, p) \right] d\xi &= \frac{\partial}{\partial z} T^{(1)*}(h_0, p) \\ \frac{\kappa}{2\pi} \int_{-c}^c \left[- \left(\frac{1}{\xi - x} + \mu M_{022} \right) G_{20}(\mu\xi, p) \right. \\ \left. + M_{021} G_{10}(\xi, p) \right] d\xi &= \frac{\partial}{\partial z} T^{(1)*}(-h_0, p) \end{aligned} \right\} \quad (|x| < c) \quad (20)$$

式中の積分核 $M_{0nk} = M_{0nk}(\xi, x, p)$ ($n, k = 1, 2$) は次式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} M_{011} &= \int_0^\infty \left\{ \frac{\tau \rho_1}{\kappa \rho_0} \{1 + \exp[-2s\tau(h_2 + h_0)]\} - 1 \right\} \\ &\quad \times \sin[s(\xi - x)] ds \\ M_{012} &= \int_0^\infty \frac{\tau \rho_2}{\kappa \rho_0} [\exp(-2s\tau h_0) + \exp(-2s\tau h_1)] \\ &\quad \times \sin[s(\mu\xi - x)] ds \\ M_{021} &= \int_0^\infty \frac{\tau \rho_1}{\kappa \rho_0} [\exp(-2s\tau h_0) + \exp(-2s\tau h_2)] \\ &\quad \times \sin[s(\xi - \mu x)] ds \\ M_{022} &= \int_0^\infty \left\{ \frac{\tau \rho_2}{\kappa \rho_0} \{1 + \exp[-2s\tau(h_1 + h_0)]\} - 1 \right\} \\ &\quad \times \sin[s\mu(\xi - x)] ds \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} \rho_0 &= \rho_0(s, p) = 1 - \exp(-2s\tau h) \\ \rho_k &= \rho_k(s, p) = 1 + \exp[-2s\tau(h_k - h_0)] \end{aligned} \right\} \quad (k = 1, 2) \quad (22)$$

積分核 $M_{011}(\xi, x, p), M_{022}(\mu\xi, \mu x, p)$ は収束の悪い半無限区間積分であり, 数値解析を容易にするために, 積分核 $M_{011}(\xi, x, p), M_{022}(\mu\xi, \mu x, p)$ を以下のように変形する.

$$\begin{aligned} M_{011}(\xi, x, p) &= M_{011}^\infty(\xi, x, p) \\ &\quad + \int_0^\infty \frac{\tau}{\kappa \rho_0} \{ \exp[-2|s|\tau(h_1 - h_0)] \\ &\quad + \exp[-2|s|\tau(h_2 + h_0)] \\ &\quad + 2 \exp[-2|s|\tau(h_1 + h_2)] \} \sin[s(\xi - x)] ds \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} M_{022}(\mu\xi, \mu x, p) &= M_{022}^\infty(\mu\xi, \mu x, p) \\ &\quad + \int_0^\infty \frac{\tau}{\kappa \rho_0} \{ \exp[-2|s|\tau(h_1 + h_0)] \\ &\quad + \exp[-2|s|\tau(h_2 - h_0)] \\ &\quad + 2 \exp[-2|s|\tau(h_1 + h_2)] \} \sin[s\mu(\xi - x)] ds \end{aligned} \quad (24)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} M_{011}^\infty(\xi', x', p) \\ M_{022}^\infty(\xi', x', p) \end{aligned} \right\} = \int_0^\infty \left(\frac{\tau}{\kappa} - 1 \right) \sin[s(\xi' - x')] ds$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \left(\frac{\xi'}{|\xi'|} + \frac{x'}{|x'|} \right) \frac{1}{|x'| - |\xi'|} (1 - \exp \vartheta_1) - \frac{1}{2} \left(\frac{\xi'}{|\xi'|} - \frac{x'}{|x'|} \right) \frac{1}{|x'| + |\xi'|} (1 - \exp \vartheta_2) \\ + \int_{\sqrt{p/\kappa^2 \lambda_0}}^{\infty} \left(1 - \frac{\tau'}{s} \right) \left[\frac{\xi'}{|\xi'|} \sinh(s|\xi'|) + \frac{x'}{|x'|} \cosh(s|x'|) \right] \exp(-s|x'|) ds - \frac{\pi}{2} \frac{x'}{|x'|} \sqrt{\frac{p}{\kappa^2 \lambda_0}} \\ (|\xi'| < |x'|) \\ - \frac{1}{2} \left(\frac{\xi'}{|\xi'|} + \frac{x'}{|x'|} \right) \frac{1}{|\xi'| - |x'|} (1 - \exp \vartheta_3) - \frac{1}{2} \left(\frac{\xi'}{|\xi'|} - \frac{x'}{|x'|} \right) \frac{1}{|\xi'| + |x'|} (1 - \exp \vartheta_2) \\ - \int_{\sqrt{p/\kappa^2 \lambda_0}}^{\infty} \left(1 - \frac{\tau'}{s} \right) \left[\frac{\xi'}{|\xi'|} \cosh(s|x'|) + \frac{x'}{|x'|} \sinh(s|\xi'|) \right] \exp(-s|\xi'|) ds + \frac{\pi}{2} \frac{\xi'}{|\xi'|} \sqrt{\frac{p}{\kappa^2 \lambda_0}} \\ (|\xi'| > |x'|) \end{array} \right. \quad (25)$$

上式中,

$$\xi' = \left\{ \begin{array}{l} \xi \quad (k=1) \\ \mu\xi \quad (k=2) \end{array} \right\}, x' = \left\{ \begin{array}{l} x \quad (n=1) \\ \mu x \quad (n=2) \end{array} \right\} \\ \vartheta_i = \left\{ \begin{array}{l} -\sqrt{\frac{p}{\kappa^2 \lambda_0}} (|x'| - |\xi'|) \quad (i=1) \\ -\sqrt{\frac{p}{\kappa^2 \lambda_0}} (|x'| + |\xi'|) \quad (i=2) \\ -\sqrt{\frac{p}{\kappa^2 \lambda_0}} (|\xi'| - |x'|) \quad (i=3) \end{array} \right\} \quad (26) \\ \tau' = \tau'(s, p) = \left(s^2 - \frac{p}{\kappa^2 \lambda_0} \right)^{1/2}$$

また, Laplace 変換された混合境界条件式 (15) の第 2 式より, 次の補足の条件式が得られる.

$$\int_{-c}^c G_{k0}(\xi', p) d\xi' = 0 \quad (k=1, 2) \quad (27)$$

特異積分方程式 (20) および補足の条件式 (27) を Gauss-Jacobi の数値積分公式⁽¹⁴⁾ を用いて数値解析することにより, $G_{k0}(\xi', p)$ ($k=1, 2$) が求まる. さらに, 式 (17) の未知関数 $D_{ij}(s, p)$ ($i=0, 1, 2, j=1, 2$) を得られた $G_{k0}(\xi', p)$ ($k=1, 2$) を用いて表すと, Laplace 像空間における擾乱温度場 $T_i^{(2)*}(x, z, p)$ ($i=0, 1, 2$) が次のように決定される.

$$T_i^{(2)*}(x, z, p) = -\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \int_0^{\infty} \frac{1}{s} R_{ijk}(s, p) \\ \times \exp[s(\kappa_{ij}z + \tau h_{ij})] ds \\ \times \int_{-c}^c G_{k0}(\xi', p) \sin[s(\xi' - x)] d\xi' \quad (i=0, 1, 2) \quad (28)$$

式中の関数 $R_{ijk}(s, p)$ および定数 h_{ij} ($i=0, 1, 2, j, k=1, 2$) はそれぞれ付録に示す. 式 (28) に数値 Laplace 逆変換法⁽¹⁵⁾ を適用すると, 実空間での擾乱温度場 $T_i^{(2)}(x, z, t)$ ($i=0, 1, 2$) が求まる.

4. 電気熱弾性場解析

非擾乱温度場 $T^{(1)*}(z, p)$ は, 特異電気弾性場を誘起しないため, 擾乱温度場 $T_i^{(2)*}(x, z, p)$ ($i=0, 1, 2$) に起因する電気熱弾性場に注目する. 変位ベクトルの成分 $u_{zi}^* = u_{zi}^*(x, z, p)$, $u_{xi}^* = u_{xi}^*(x, z, p)$ および静電ポテンシャル $\phi_i^* = \phi_i^*(x, z, p)$ ($i=0, 1, 2$) を次式で表す.

$$\left. \begin{array}{l} u_{zi}^* = u_{zi}^{(1)*} + u_{zi}^{(2)*} \\ u_{xi}^* = u_{xi}^{(1)*} + u_{xi}^{(2)*} \\ \phi_i^* = \phi_i^{(1)*} + \phi_i^{(2)*} \end{array} \right\} \quad (i=0, 1, 2) \quad (29)$$

ここに, $u_{zi}^{(1)*} = u_{zi}^{(1)*}(x, z, p)$, $u_{xi}^{(1)*} = u_{xi}^{(1)*}(x, z, p)$, $\phi_i^{(1)*} = \phi_i^{(1)*}(x, z, p)$ は式 (3) における温度場 $T_i^*(x, z, p)$ を擾乱温度場 $T_i^{(2)*}(x, z, p)$ とした非同次方程式の特解, $u_{zi}^{(2)*} = u_{zi}^{(2)*}(x, z, p)$, $u_{xi}^{(2)*} = u_{xi}^{(2)*}(x, z, p)$, $\phi_i^{(2)*} = \phi_i^{(2)*}(x, z, p)$ ($i=0, 1, 2$) は式 (3) において温度場を零とした同次方程式の一般解である.

特解は熱弾性変位ポテンシャル法により, 次のように求まる.

$$u_{zn}^{(1)*} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_{4nj}^{(1)}}{s|s|} F_{nj} \Theta_{nj} \exp(-isx) ds \\ (n=0, 1, 2) \quad (30)$$

$$u_{xn}^{(1)*} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_{5nj}^{(1)}}{s^2} F_{nj} \Theta_{nj} \exp(-isx) ds \\ (n=0, 1, 2) \quad (31)$$

$$\phi_n^{(1)*} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_{6nj}^{(1)}}{s|s|} F_{nj} \Theta_{nj} \exp(-isx) ds \\ (n=0, 1, 2) \quad (32)$$

ここに, 定数 $p_{mnj}^{(1)}$ ($m=4, 5, 6, n=0, 1, 2, j=1, 2$) は前報⁽⁷⁾ の付録 2 と同様であり, 関数 $F_{nj} = F_{nj}(s, p)$, $\Theta_{nj} = \Theta_{nj}(s, p)$ ($n=0, 1, 2, j=1, 2$) は

$$F_{nj} = \sum_{k=1}^2 R_{njk}(s, p) \int_{-c}^c G_{k0}(\xi', p) \exp(is\xi') d\xi' \quad (n=0, 1, 2, j=1, 2) \quad (33)$$

$$\Theta_{nj} = \exp[|s|(\kappa_{nj}z + \tau h_{nj})] \quad (n=0, 1, 2, j=1, 2) \quad (34)$$

また、一般解は Fourier 変換法により、次のように求まる⁽¹²⁾。

$$u_{zn}^{(2)*} = \frac{i}{2\pi} \sum_{j=1}^6 \int_{-\infty}^{\infty} p_{4nj}^{(2)} A_{nj}(s, p) \exp(|s|\gamma_{nj}z) \times \exp(-isx) ds \quad (n=0, 1, 2) \quad (35)$$

$$u_{xn}^{(2)*} = \frac{i}{2\pi} \sum_{j=1}^6 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|s|}{s} p_{5nj}^{(2)} A_{nj}(s, p) \exp(|s|\gamma_{nj}z) \times \exp(-isx) ds \quad (n=0, 1, 2) \quad (36)$$

$$\phi_n^{(2)*} = -\frac{i}{2\pi} \sum_{j=1}^6 \int_{-\infty}^{\infty} p_{6nj}^{(2)} A_{nj}(s, p) \exp(|s|\gamma_{nj}z) \times \exp(-isx) ds \quad (n=0, 1, 2) \quad (37)$$

ここに、 $A_{nj}(s, p)$ ($n=0, 1, 2, j=1, 2, \dots, 6$) は境界条件式より決定される未知関数、定数 γ_{nj} ($n=0, 1, 2, j=1, 2, \dots, 6$) は、前報⁽⁸⁾の付録 2 の特性方程式の根であり、 $\text{Re}[\gamma_{0j}] < \text{Re}[\gamma_{0j+1}]$, $\text{Re}[\gamma_{1j}] < \text{Re}[\gamma_{1j+1}]$, $\text{Re}[\gamma_{2j}] > \text{Re}[\gamma_{2j+1}]$ ($j=1, 2, \dots, 5$) である。また、定数 $p_{mnj}^{(2)}$ ($m=4, 5, 6, n=0, 1, 2, j=1, 2, \dots, 6$) は前報⁽⁸⁾の付録 2 に示す。式 (30)~(32)、式 (35)~(37) を構成方程式 (1) に代入することにより、応力テンソルの成分 σ_{zzn} , σ_{zxn} および電束密度ベクトルの成分 D_{zn} ($n=0, 1, 2$) が求まる。

温度場解析と同様、問題の解を特異積分方程式の解に導くため、次の新しい未知関数 $G_{km}(x, p)$ ($k=1, 2, m=1, 2, 3$) を導入する⁽¹³⁾。

$$G_{k1}(x, p) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} [u_{z0}^*(x, \theta_{0k}, p) - u_{zk}^*(x, \theta_{0k}, p)] & (|x| < c_k) \\ 0 & (|x| \geq c_k) \end{cases} \quad (k=1, 2) \quad (38)$$

$$G_{k2}(x, p) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} [u_{x0}^*(x, \theta_{0k}, p) - u_{xk}^*(x, \theta_{0k}, p)] & (|x| < c_k) \\ 0 & (|x| \geq c_k) \end{cases} \quad (k=1, 2) \quad (39)$$

$$G_{k3}(x, p) = \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x} [\phi_0^*(x, \theta_{0k}, p) - \phi_k^*(x, \theta_{0k}, p)] & (|x| < c_k) \\ 0 & (|x| \geq c_k) \end{cases} \quad (k=1, 2) \quad (40)$$

Laplace 変換された境界条件式 (10), (11) を考慮すると、混合境界条件式 (7) ~ (9) の第 1 式より、未知関数 $G_{km}(\xi', p)$ ($k=1, 2, m=1, 2, 3$) に関する 6 本の連立特異積分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-c}^c \left\{ \left[\frac{Z_{j11}^{(1)\infty}}{\xi-x} + M_{j11}^{(1)} \right] G_{11}(\xi', p) + M_{j12}^{(1)} G_{12}(\xi', p) \right. \\ & \quad \left. + \left[\frac{Z_{j13}^{(1)\infty}}{\xi-x} + M_{j13}^{(1)} \right] G_{13}(\xi', p) \right. \\ & \quad \left. + \mu \sum_{m=1}^3 M_{j2m}^{(1)} G_{2m}(\xi', p) \right\} d\xi \\ & = \begin{cases} \sigma_{zz0}^T(x', h_0, p) & (j=1) \\ D_{z0}^T(x', h_0, p) & (j=3) \end{cases} \quad (|x| < c) \quad (41) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-c}^c \left\{ M_{211}^{(1)} G_{11}(\xi', p) + \left[\frac{Z_{212}^{(1)\infty}}{\xi-x} + M_{212}^{(1)} \right] G_{12}(\xi', p) \right. \\ & \quad \left. + M_{213}^{(1)} G_{13}(\xi', p) + \mu \sum_{m=1}^3 M_{22m}^{(1)} G_{2m}(\xi', p) \right\} d\xi \\ & = \sigma_{zx0}^T(x', h_0, p) \quad (|x| < c) \quad (42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-c}^c \left\{ \sum_{m=1}^3 M_{j1m}^{(2)} G_{1m}(\xi', p) + \mu M_{j22}^{(2)} G_{22}(\xi', p) \right. \\ & \quad \left. + \left[\frac{Z_{j21}^{(2)\infty}}{\xi-x} + \mu M_{j21}^{(2)} \right] G_{21}(\xi', p) \right. \\ & \quad \left. + \left[\frac{Z_{j23}^{(2)\infty}}{\xi-x} + \mu M_{j23}^{(2)} \right] G_{23}(\xi', p) \right\} d\xi \\ & = \begin{cases} \sigma_{zz0}^T(x', -h_0, p) & (j=1) \\ D_{z0}^T(x', -h_0, p) & (j=3) \end{cases} \quad (|x| < c) \quad (43) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-c}^c \left\{ \sum_{m=1}^3 M_{21m}^{(2)} G_{1m}(\xi', p) + \mu M_{221}^{(2)} G_{21}(\xi', p) \right. \\ & \quad \left. + \left[\frac{Z_{222}^{(2)\infty}}{\xi-x} + \mu M_{222}^{(2)} \right] G_{22}(\xi', p) + \mu M_{223}^{(2)} G_{23}(\xi', p) \right\} d\xi \\ & = \sigma_{zx0}^T(x', -h_0, p) \quad (|x| < c) \quad (44) \end{aligned}$$

式中の積分核 $M_{jkm}^{(n)} = M_{jkm}^{(n)}(\xi', x')$ ($j, m=1, 2, 3, n, k=1, 2$) は前報⁽⁷⁾の式 (44) 中の t' を ξ' に置き換えたものであり、定数 $Z_{jkm}^{(n)\infty}$ ($j, m=1, 2, 3, n, k, l=1, 2$) は前報⁽⁷⁾の付録 3 と同様である。また、積分方程式右辺の $\sigma_{zz0}^T = \sigma_{zz0}^T(x', \pm h_0, p)$, $\sigma_{zx0}^T = \sigma_{zx0}^T(x', \pm h_0, p)$ および $D_{z0}^T = D_{z0}^T(x', \pm h_0, p)$ は、擾乱温度場 $T_i^{(2)*}(x, z, p)$ ($i=0, 1, 2$) に起因し、き裂が存在しない厚板の $z = \pm h_0$ 面上での熱応力・電束密度成分に相当するもので、次のように得られる。

$$\sigma_{zz}^{T*} = \lim_{z \rightarrow \pm h_0} \frac{p_{10j}^{(2)}}{2\pi} \sum_{j=1}^6 \int_{-\infty}^{\infty} |s| \Gamma_{1j} \exp(-isx) ds - \lim_{z \rightarrow \pm h_0} \frac{ip_{10j}^{(1)}}{2\pi} \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s} \Gamma_{2j} \exp(-isx) ds \quad (45)$$

$$\sigma_{zx}^{T*} = \lim_{z \rightarrow \pm h_0} \frac{ip_{20j}^{(2)}}{2\pi} \sum_{j=1}^6 \int_{-\infty}^{\infty} s \Gamma_{1j} \exp(-isx) ds + \lim_{z \rightarrow \pm h_0} \frac{p_{20j}^{(1)}}{2\pi} \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|s|} \Gamma_{2j} \exp(-isx) ds \quad (46)$$

$$D_{z0}^{T*} = \lim_{z \rightarrow \pm h_0} \frac{p_{30j}^{(2)}}{2\pi} \sum_{j=1}^6 \int_{-\infty}^{\infty} |s| \Gamma_{1j} \exp(-isx) ds - \lim_{z \rightarrow \pm h_0} \frac{ip_{30j}^{(1)}}{2\pi} \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s} \Gamma_{2j} \exp(-isx) ds \quad (47)$$

上式中, $\Gamma_{kj} = \Gamma_{kj}(s, p)$ ($k = 1, 2, j = 1, 2, \dots, 6$) は

$$\Gamma_{1j} = \begin{cases} d_{0j}^T(s, p) \exp[|s| \gamma_{0j}(h_0 + z)] & (j = 1, 2, 3) \\ d_{0j}^T(s, p) \exp[-|s| \gamma_{0j}(h_0 - z)] & (j = 4, 5, 6) \end{cases} \\ \Gamma_{2j} = F_{0j}(s, p) \exp[|s|(\tau h_{0j} + \kappa_{0j} z)] \quad (j = 1, 2) \quad (48)$$

ここに, 関数 $d_{0j}^T(s)$ ($j = 1, 2, \dots, 6$) は前報⁽⁷⁾ の付録 3 と同様である. また, Laplace 変換された混合境界条件式 (7) ~ (9) の第 2 式より, 次の補足の条件式が得られる.

$$\int_{-c}^c G_{km}(\xi', p) d\xi' = 0 \quad (k = 1, 2, m = 1, 2, 3) \quad (49)$$

特異積分方程式 (20), (41) ~ (44) および補足の条件式 (27), (49) を Gauss-Jacobi の数値積分公式⁽¹⁴⁾ を用いて数値解析するために, 解の特異性を考慮し, $G_{km}(\xi', p)$ を滑らかな関数 $\Phi_{km}(\xi', p)$ ($k = 1, 2, m = 0, 1, 2, 3$) を用いて次のように置く.

$$G_{km}(\xi', p) = \frac{c_k}{[(c_k + \xi')(c_k - \xi')]^{1/2}} \Phi_{km}(\xi', p) \quad (k = 1, 2, m = 0, 1, 2, 3) \quad (50)$$

従って, き裂先端の特異挙動を評価すると⁽¹⁸⁾, 応力拡大係数 $K_I^\pm(t), K_{II}^\pm(t)$ および電束密度拡大係数 $K_D^\pm(t)$ が次のように得られる.

$$K_\eta^\pm(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} K_\eta^{\pm*}(p) \exp(pt) dp \quad (\eta = I, II, D) \quad (51)$$

ここに, Br は Bromwich の積分路であり, 上添字 $\pm$ はそれぞれ $z = \pm h_0$ 面上のき裂に関する諸量を示し,

$K_\eta^{\pm*}(p)$ ($\eta = I, II, D$) は

$$\left. \begin{aligned} K_I^{\pm*}(p) &= (\pi c_k)^{1/2} [Z_{1k11}^\infty \Phi_{k1}(c_k, p) + Z_{1k31}^\infty \Phi_{k3}(c_k, p)] \\ K_{II}^{\pm*}(p) &= (\pi c_k)^{1/2} Z_{2k21}^\infty \Phi_{k2}(c_k, p) \\ K_D^{\pm*}(p) &= (\pi c_k)^{1/2} [Z_{3k11}^\infty \Phi_{k1}(c_k, p) + Z_{3k31}^\infty \Phi_{k3}(c_k, p)] \end{aligned} \right\} \quad (k = 1, 2) \quad (52)$$

式 (51) に数値 Laplace 逆変換法⁽¹⁵⁾ を適用すると, 無次元化された非定常応力拡大係数 $[K_I(t), K_{II}(t)]/\lambda_{33} T_0 (\pi c)^{1/2}$, 非定常電束密度拡大係数 $K_D(t)/p_{z0} T_0 (\pi c)^{1/2}$ の時間的挙動が求まる.

5. 数値結果および考察

数値計算例には, 次に示すセレン化カドミウムの電気熱弾性特性を用いた⁽²⁾.

$$\left. \begin{aligned} c_{11} &= 7.41 \times 10^{10} [\text{Pa}], \quad c_{33} = 8.36 \times 10^{10} [\text{Pa}] \\ c_{44} &= 1.32 \times 10^{10} [\text{Pa}], \quad c_{13} = 3.93 \times 10^{10} [\text{Pa}] \\ e_{31} &= -0.160 [\text{C/m}^2], \quad e_{33} = 0.347 [\text{C/m}^2] \\ e_{15} &= -0.138 [\text{C/m}^2] \\ \epsilon_{11} &= 0.825 \times 10^{-10} [\text{C/Vm}] \\ \epsilon_{33} &= 0.903 \times 10^{-10} [\text{C/Vm}] \\ \lambda_{11} &= 0.621 \times 10^6 [\text{Pa/K}] \\ \lambda_{33} &= 0.551 \times 10^6 [\text{Pa/K}] \\ p_z &= -2.94 \times 10^{-6} [\text{C/Km}^2] \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

熱伝導率に関しては, $\kappa^2 = \kappa_x/\kappa_z = 1/1.5$ と仮定した.

まず, 温度場 $T_i(x, z, t)$ ($i = 0, 1, 2$) について検討する. 図 2 は, き裂長さ比 $c/h = 0.5$, き裂間隔比 $h_0/h = 0.2$, き裂位置を表すパラメータ $h_2/h = 0.5$, 裂長さの相異を表すパラメータ $\mu = 0.5$ とした場合の $z = \pm h_0$ 面上における無次元化された温度分布 $(T_i - T_I)/T_0$ ($i = 0, 1, 2$) を示したグラフであり, $F = t\lambda_0/c^2$ は Fourier 数である. F の増大に伴い温度は増大する. 上側き裂の場合, き裂上下面の温度差およびき裂先端近傍の温度勾配は $F \approx 0.5$ 近傍で最も大となる. また, 下側き裂の場合, 上側き裂と比較して温度上昇が緩やかであり, き裂上下面の温度差も小である.

Fig.2 The temperatures on the crack faces and the crack extended lines.

次に、電気熱弾性場について検討する。図3～5は図2の温度場によって発生する $z = \pm h_0$ 面上における無次元化された応力成分 $(\sigma_{zz0}^T, \sigma_{zx0}^T)/\lambda_{33}T_0$ および電束密度成分 D_{z0}^T/p_zT_0 を示したグラフである。 $F = 0.5$ の値は、 $F \rightarrow \infty$ の静的値に対し、著しく大きな値となる。

最後に図6～8は、 $c/h = 0.5$, $h_0/h = 0.2$, $h_2/h = 0.5$ とした場合の無次元化された応力拡大係数 K_I, K_{II} および電束密度拡大係数 K_D の時間的挙動に及ぼすき裂長さの相異を表すパラメータ μ の影響を示したグラフである。上側き裂に注目すると、時間の経過に伴い(F の増大に伴い)、 $|K_I^+|, K_{II}^+$ および $|K_D^+|$ は急激に増大し、最大値を取り、静的値に漸近する。図6において、 $F > 3.5$ では、 $K_I^+(\mu = 1.0)$ が負となり、き裂

は閉口するため物理的な意味を失うが、単一き裂を対象とした前報⁽¹⁰⁾に示されるような正の K_I を誘起する電気的負荷が同時に作用する場合などの破壊挙動の解明には有効な結果となる。

単一き裂が下側き裂位置付近にある場合⁽¹⁰⁾、応力・電束密度拡大係数は時間の経過に伴い単調に増大するのに対し、き裂が二個になることで下側き裂の応力・電束密度拡大係数も極値を取って静的値に漸近する。

等長き裂の場合、 K_{II} は、加熱初期には上側き裂と下側き裂で大きな差があるが、静的値は一致しており、非定常解析の重要性が明らかである。また、 K_I, K_D の $\mu = 0.5, 1.0$ における絶対値を比較すると、静的値と極大値が逆転する傾向が見られる。

Fig.3 σ_{zx0}^T due to the temperatures shown in Fig.2.

Fig.4 σ_{zx0}^T due to the temperatures shown in Fig.2.

Fig.5 D_{z0}^T due to the temperatures shown in Fig.2.

Fig.6 The effect of μ on the stress intensity factors K_I .

Fig.7 The effect of μ on the stress intensity factors K_{II} .

Fig.8 The effect of μ on the electric displacement intensity factors K_D .

6. 結 言

本報は、長さの異なる二個の平行き裂を有する圧電厚板に熱衝撃負荷が作用した場合の応力・電束密度拡大係数を理論解析したものである。数値結果より、(1) 衝撃的に熱的負荷が作用する場合、拡大係数は加熱初期に極値をとる傾向を示しており、 μ を増大させることによりき裂進展を抑制することができる。(2) 上側き裂に注目すると熱的負荷における拡大係数はき裂間相互干渉により低下し、その影響は幾何学的形状に依存する。(3) き裂が二個になることで、き裂間相互干渉の影響により下側き裂の拡大係数も、加熱初期に極値を有するため注意が必要である。

付 録

関数 $R_{ijk} = R_{ijk}(s, p)$ および定数 h_{ij} ($i = 0, 1, 2, j = 1, 2, k = 1, 2$) は

$$\left. \begin{aligned} R_{011} &= -\rho_1 \exp(-2s\tau h_2)/2\rho_0 \\ R_{012} &= \rho_2/2\rho_0, \quad R_{021} = \rho_1/2\rho_0 \\ R_{022} &= -\rho_2 \exp(-2s\tau h_1)/2\rho_0 \\ R_{11k} &= [R_{01k} \exp(-2s\tau h_0) - R_{02k}]/\rho_1 \\ R_{22k} &= [R_{02k} \exp(-2s\tau h_0) - R_{01k}]/\rho_2 \\ R_{12k} &= -R_{11k}, \quad R_{21k} = -R_{22k} \end{aligned} \right\} \quad (k = 1, 2) \quad (54)$$

$$\left. \begin{aligned} h_{01} &= h_{02} = -h_0, \quad h_{11} = h_{22} = h_0 \\ h_{12} &= -2h_1 + h_0, \quad h_{21} = -2h_2 + h_0 \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

文 献

- (1) Rao, S. S. and Sunar, M., Piezoelectricity and Its Use in Disturbance Sensing and Control of Flexible Structures : A Survey, *Applied Mechanics Review*, Vol.47 (1994), pp.113-123.
- (2) Ashida, F. and Tauchert, T. R., Transient Response of a Piezothermoelastic Circular Disk under Axisymmetric Heating, *Acta Mechanica*, Vol.128 (1998), pp.1-14.
- (3) Niraula, O. P. and Noda, N., Thermal Stress Analysis in Thermopiezoelectric Strip with an Edge Crack, *Journal of Thermal Stresses*, Vol.25 (2002), pp.389-405.
- (4) Ueda, S. and Ikawa, K., The Crack Problem in Piezoelectric Strip under Thermoelectric Loading, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.72, No.715 (2006), pp.309-316.
- (5) Ueda, S. and Tani, Y., Thermoelectroelastic Response of a Piezoelectric Material Strip with a Normal Crack, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.72, No.722 (2006), pp.1487-1494.
- (6) Ueda, S. and Tani, Y., Thermal Stress Intensity Factors for Two Coplanar Cracks in a Piezoelectric Strip, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.73, No.736 (2007), pp.1410-1416.
- (7) Ueda, S. and Ikawa, K., Thermoelectromechanical Interaction between Two Parallel Cracks in a Piezoelectric Strip, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.74, No.738 (2008), pp.216-223.
- (8) Ueda, S., Ishii, A., Kondo, H. and Ikawa K., Thermoelectromechanical Response of a Piezoelectric Strip with Two Parallel Cracks of Different Lengths, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.74, No.744 (2008), pp.1134-1141.
- (9) Wang, B. L. and Mai, Y. W., A Cracked Piezoelectric Material Strip under Transient Thermal Loading, *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol.69 (2002), pp.539-546.
- (10) Ueda, S. and Ikawa, K., Transient Response of a Cracked Piezoelectric Strip under Thermoelectric Loading, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.72, No.720 (2006), pp.1169-1176.
- (11) Ueda, S. and Kondo, H., Thermal Shock Response of a Parallel Crack in a Functionally Graded Piezoelectric Material Plate, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.73, No.727 (2007), pp.387-394.
- (12) Sneddon, I. N. and Lowengrub, M., *Crack Problems in the Classical Theory of Elasticity*, (1969), John Wiley & Sons, Inc., New York.
- (13) Erdogan, F. and Wu, B. H., Crack Problems in FGM Layers under Thermal Stresses, *Journal of Thermal Stresses*, Vol.19 (1996), pp.237-265.
- (14) Erdogan, F., Gupta, G. D. and Cook, T. S., *Methods of Analysis and Solution of Crack Problems*, (Edited by G.C.Sih), (1972), p. 368, Noordhoff, Leyden.
- (15) Miller, M. K. and Guy, W. T., Numerical Inversion of the Laplace Transform by Use of Jacobi Polynomials, *SIAM Journal of Numerical Analysis*, Vol.3 No.4 (1966), pp.624-635.
- (16) Hou, P., Luo, W. and Leung, A. Y. T., A Point Heat Source on the Surface of a Semi-Infinite Transversely Isotropic Piezothermoelastic Material, *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol.75 No.1 (2008), pp.011013.1-011013.8.
- (17) Wang, B. L. and Mai, Y. W., Impermeable Crack and Permeable Crack Assumptions, Which One Is More Realistic?, *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol.71 (2004), pp.575-578.
- (18) Watanabe, K., Ashida, F. and Ueda, S., *Mathematical Analyses in Elasticity for New Applications*, (2007), pp.163-179, Yokendo Ltd.