表面応力と表面弾性特性を考慮した表面グリーン関数*
(Stroh形式の三次元等方性弾性体への適用)古 口 日 出 男^{*1}Surface Green Function Considering Surface
Stresses and Surface Elasticity
(Application to Three-Dimensional Isotropic
Elastic Materials of Stroh Formalism)Hideo KOGUCHI^{*2}^{*2} Department of Mechanical Engineering, Nagaoka University of Technology,
1603-1 Kamitomioka, Nagaoka-shi, Niigata, 940-2188 Japan

Surface stress and surface elasticity are related to an organization of surface pattern and reconstruction of surface atoms. Recently, nanotechnology such as quantum dot and carbon nano fiber is developed and is used for new advanced devices and industrial products. When the size of material reduces to a nanometer level, a ratio of surface to volume increases. Then, surface stress and surface elasticity influence on mechanical response near surface for an external force on the surface. Stroh formalism is very useful for analyzing the stress and displacement in anisotropic materials. When the Stroh formalism is applied to isotropic materials, the eigen matrix derived from equilibrium equation yields a triple root of i (i : imaginary unit), and then an independent eigen vector corresponding to the eigen value can not be determined. It is very hard to derive a three-dimensional solution for isotropic materials using Stroh formalism. In this paper, surface Green function for isotropic materials is derived using Stroh formalism. The derived Green function without surface stress nor surface elasticity agrees with the solution of Boussinesq. The surface Green function is used for analyzing the displacement fields in amorphous silicon considering surface stress and surface elasticity. It was found that the displacements considering surface stress and elasticity were less than those not considering them.

Key Words: Elasticity, Micromechanics, Molecular Dynamics, Surface Green Function, Surface Stress, Surface Elasticity

1. 緒 言

等方性弾性体に対する三次元弾性論の歴史は古く、これまでに多くの理論解析が行われ、工学・工業への有益な知見を与えている。また、弾性論による結果は数値解析の検証に用いられ、新しい解析手法の開発にも役立っている。これまでの多くの弾性解析では二次元弾性論の Airy の応力関数を初めとして、三次元弾性論では Dugall, Boussinesq, Papcovich-Neuber の変位関数を用いることが多い⁽¹⁾。解析対象の問題を適切に解くための応力関数、変位関数を決めることができれば、半ば問題が解けたことになる。これには多くの知識を要し、問題により式が非常に長大なものになることがある。

微小ひずみの三次元弾性論では、平衡方程式および

応力-ひずみの関係式から変位に関する連立微分方程式を導出し、境界条件を満足するように変位場を決定する。その際に調和関数からなる変位関数を用いる。一方、異方性弾性体で用いられている Stroh 形式による解法では、変位方程式をマトリックス形式で表し、二次元弾性論の場合には変位と応力関数の組み合わせに対する解を誘導する⁽²⁾。一方、Stroh 形式の三次元弾性解析ではマトリックス形式の変位方程式と応力表示式から直接変位ベクトルの解を求める。

Stroh 形式の定式化では、異方性体の場合には問題が生じないが、等方性体になるとマトリックス形式の変位方程式が特異となり、独立した変位ベクトルの解を求めることができなくなる。このためこれまでも幾つかの研究が行われているが、多くの場合二次元解析である⁽³⁾⁽⁵⁾。三次元解析の例としては、三次元無限弾性体に集中力が作用する場合の解析がある⁽⁶⁾。

一方、筆者は表面応力および表面弾性特性を考慮して半無限異方性弾性体の表面グリーン関数を導出した

* 原稿受付 2009 年 10 月 23 日。

^{*1} 正員, フェロー, 長岡技術科学大学工学部(〒940-2188 長岡市上富岡町 1603-1)。

E-mail: koguchi@mech.nagaokaut.ac.jp

(7). しかし、その式は等方性弾性体に対して用いることができない。最近、Heらは非圧縮性の半無限等方性弾性体の表面に表面応力を考慮したグリーン関数を導出している⁽⁸⁾。彼らは、Fourier変換された変位方程式を解いて、変位場を導出している。本論文では変位方程式のマトリックスに対して独立な変位ベクトルを導いて、表面応力および表面弾性を考慮した表面グリーン関数を導く。この表面グリーン関数は表面特性を考慮しない場合、従来の Boussinesqらの解と一致することを示す⁽¹⁾。さらに、この表面グリーン関数を用いて非晶質材料の表面に集中荷重が作用する場合の変位場を調べ、表面応力および表面弾性特性の変位場に対する影響を明らかにする。

2. 解析方法

2.1 基礎式 物体力がない場合の平衡方程式は次のように表される。

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad \dots\dots\dots(1)$$

この式に弾性体の構成方程式 $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl}$ を代入し、さらにひずみ ϵ_{kl} を変位で表すと、次式が得られる。なお、 σ_{ij} はバルクの応力である。

$$C_{ijkl}u_{k,lj} = 0 \quad \dots\dots\dots(2)$$

ここで、 u_i は変位、 C_{ijkl} は弾性定数テンソルで、等方性弾性体の場合、 $C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$ である。 δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。

式(2)を二次元 Fourier 変換すると、次式が得られる。

$$C_{i\alpha k\beta}\eta_\alpha\eta_\beta\hat{u}_k + i(C_{i\alpha k3} + C_{i3k\alpha})\eta_\alpha\hat{u}_{k,3} - C_{i3k3}\hat{u}_{k,33} = 0 \quad \dots\dots\dots(3)$$

ここで、二次元 Fourier 変換は次式で定義される。

$$\begin{aligned} \hat{f}(\eta_1, \eta_2, x_3) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, x_3) e^{i(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2)} dx_1 dx_2 \\ f(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\eta_1, \eta_2, x_3) e^{-i(\eta_1 x_1 + \eta_2 x_2)} d\eta_1 d\eta_2 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(4)$$

式(3)は $\hat{u}_k$ の二階常微分方程式であり、この方程式の一般解は次式のように置くことができる。

$$\hat{\mathbf{u}}(\eta_1, \eta_2, x_3) = \mathbf{a}(\eta_1, \eta_2) e^{-ipx_3} \quad \dots\dots\dots(5)$$

ここで、 p は次式の固有値、 $\mathbf{a}$ は固有値に対する固有ベクトルである。

$$\{Q + p(R + R^T) + p^2 T\} \mathbf{a} = 0 \quad \dots\dots\dots(6)$$

ここで、 $Q_{ik} = C_{ijks}n_jn_s$, $R_{ik} = C_{ijks}n_jm_s$, $T_{ik} = C_{ijks}m_jm_s$ である。また、 $\mathbf{n} = [n_1, n_2, 0]^T = [\cos\theta, \sin\theta, 0]^T$, $\mathbf{m} = [0, 0, 1]^T$, $\eta_1 = pn_1$, $\eta_2 = pn_2$ である。

等方性弾性体の場合、式(6)は次式ようになる。

$$\begin{bmatrix} \mu\xi_2^2 + k_2n_1^2 & k_1n_1n_2 & k_1n_1p \\ k_1n_1n_2 & \mu\xi_1^2 + k_2n_1^2 & k_1n_2p \\ k_1n_1p & k_1n_2p & \mu + k_2p^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = 0 \quad \dots\dots(7)$$

ここで、 $\xi_m = n_m^2 + p^2$ ($m=1,2$), $k_1 = \lambda + \mu$, $k_2 = \lambda + 2\mu$ である。また、

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda n_1 \\ 0 & 0 & \lambda n_2 \\ \mu n_1 & \mu n_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 2\mu \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} k_2n_1^2 + \mu n_2^2 & k_1n_1n_2 & 0 \\ k_1n_1n_2 & k_2n_2^2 + \mu n_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(8)$$

である。式(6)の固有ベクトル $\mathbf{a}$ の非自明解は、式(7)の係数行列を 0 にする固有値 p を求めることにより導出できる。ここで、係数行列の行列式の値を求めると、 $(1+p^2)^3\mu^2(\lambda+2\mu)$ が得られる。これより、式(7)の固有値は $p = \pm i$ の三重根であることがわかる。式(5)の変位の式で $p > 0$, $x_3 < 0$ で変位が有限であるためには、 $p = i$ である必要がある。 $p = i$ を式(7)に代入すると、次式が得られる。

$$k_1 \begin{bmatrix} n_1^2 & n_1n_2 & in_1 \\ n_1n_2 & n_2^2 & in_2 \\ in_1 & in_2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = 0 \quad \dots\dots\dots(9)$$

この式を満足する固有ベクトル $\mathbf{a}$ は、幾つかある。

$$\begin{cases} \mathbf{a}_1^* = (-i, 0, n_1) \\ \mathbf{a}_2^* = (0, -i, n_2) \\ \mathbf{a}_3^* = (n_2, -n_1, 0) \\ \mathbf{a}_4^* = (n_1, n_2, i) \end{cases} \quad \dots\dots\dots(10)$$

しかし、これらのベクトルは互いに独立ではない。これらの中から二つ選ぶことができる。 p の重根に対するもう一つの独立な固有ベクトルを導くために、式(5)を p で微分した式を式(5)に加えた式を考える。

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{c} e^{-ipx_3} + ipx_3 \mathbf{g} e^{-ipx_3} \quad \dots\dots\dots(11)$$

ここで、間違わないように $\mathbf{a}$ を $\mathbf{c}$ に置き換えた。この式を式(3)に代入し整理すると、次式のようになる。

$$\begin{aligned} &\{Q + p(R + R^T) + p^2 T\}(\mathbf{c} + ipx_3 \mathbf{g}) \\ &- \{(\mathbf{R} + \mathbf{R}^T) + 2pT\} \mathbf{g} = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(12)$$

この式に $p = i$ を代入し、マトリックス形で表すと次式が得られる。

$$k_1 \begin{bmatrix} n_1^2 & n_1n_2 & in_1 \\ n_1n_2 & n_2^2 & in_2 \\ in_1 & in_2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 + ipx_3 g_1 \\ c_2 + ipx_3 g_2 \\ c_3 + ipx_3 g_2 \end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} 2i\mu & 0 & k_1 n_1 \\ 0 & 2i\mu & k_1 n_2 \\ k_1 n_1 & k_1 n_2 & 2ik_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{Bmatrix} = 0 \quad \dots\dots\dots(13)$$

式(13)中の x_3 は変数であることから、 $\mathbf{g}$ は式(13)の第一項目にある行列との積を0にする必要がある。このようなベクトルは幾つかあるが、ここでは式(10)の中の $\mathbf{a}_i^*$ を $\mathbf{g}$ に選ぶと、式(13)は次式のようになる。

$$k_1 \begin{bmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 & in_1 \\ n_1 n_2 & n_2^2 & in_2 \\ in_1 & in_2 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2i\mu & 0 & k_1 n_1 \\ 0 & 2i\mu & k_1 n_2 \\ k_1 n_1 & k_1 n_2 & 2ik_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ i \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots(14)$$

式(14)を展開すると次式が得られる。

$$n_1 c_1 + n_2 c_2 + ic_3 = 2i\mu / k_1 + i \quad \dots\dots\dots(15)$$

この式を満足するベクトル $\mathbf{c}$ は、 $\mathbf{c} = (0, 0, 2\mu/k_1 + i) = (0, 0, 3-4\nu)$ である。これより、 $p=i$ の重根に対する独立な固有ベクトルとして $\mathbf{a}_3^* = \mathbf{c} + ipx_3 \mathbf{g} = (ipx_3 n_1, ipx_3 n_2, 3-4\nu - \rho x_3)$ が得られる。これより、変位の一般解は次式のように書くことができる。

$$\hat{\mathbf{u}}(\eta_1, \eta_2, x_3) = \mathbf{A} \langle e^{-ip\rho x_3} \rangle \mathbf{q} \quad \dots\dots\dots(16)$$

ここで、

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1^{*T} \quad \mathbf{a}_2^{*T} \quad \mathbf{a}_3^{*T}] \\ = [\mathbf{a}_1^T \quad \mathbf{a}_2^T \quad \mathbf{a}_3^T] = \begin{bmatrix} -i & 0 & ipn_1 x_3 \\ 0 & -i & ipn_2 x_3 \\ n_1 & n_2 & 3-4\nu - \rho x_3 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(17)$$

また、 $\mathbf{q}$ は未定係数ベクトルで、境界条件から決定される。なお、式(10)のベクトル $\mathbf{a}_3^*$ はベクトル $\mathbf{a}_1^*$ 、 $\mathbf{a}_2^*$ から作ることができる。

2・2 表面応力と表面弾性特性を考慮した境界条件

つぎに、表面応力と表面弾性特性を考慮した境界条件について説明する。

1) 表面に対して接線方向の境界条件

$$\sigma_{i\alpha} v_i - \tau_{\alpha\beta, \beta} = t_\alpha \quad \dots\dots\dots(18)$$

2) 表面に対して法線方向の境界条件

$$\sigma_{i3} v_i - \tau_{\mu\beta} \kappa_{\mu\beta} v_3 = t_3 \quad \dots\dots\dots(19)$$

ここで、 v_i は法線ベクトル、 $\tau_{\alpha\beta}$ は表面応力、 $\kappa_{\mu\beta}$ は曲率テンソル、 t_i は作用力ベクトル、ギリシャ文字 α, β, μ 等は1,2, アルファベット i, j, k 等は1,2,3をとる。

また、表面応力と表面弾性定数の間には次の関係がある。

$$\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha\beta}^0 + d_{\alpha\beta\gamma\lambda} \varepsilon_{\gamma\lambda}^s \quad \dots\dots\dots(20)$$

ここで、 $\tau_{\alpha\beta}^0$ は表面ひずみが無い時の表面応力、 $d_{\alpha\beta\gamma\lambda}$

は表面弾性定数、 $\varepsilon_{\gamma\lambda}^s$ は表面ひずみである。

式(20)を式(18)、(19)に、曲率 $\kappa_{\mu\beta}$ に $\partial^2 u_3 / \partial x_\mu \partial x_\beta |_{x_3=0}$ を代入し、二次の微小項を無視すると、次式が得られる。

$$\begin{cases} C_{\alpha 3 k \beta} u_{k, \beta} + C_{\alpha 3 k 3} u_{k, 3} - d_{\alpha \beta \gamma \lambda} u_{\gamma, \lambda \beta} = t_\alpha \\ \left(C_{33 k \alpha} u_{k, \alpha} + C_{33 k 3} u_{k, 3} - \tau_{\alpha \beta}^0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right) \Big|_{x_3=0} v_3 = t_3 \end{cases} \quad \dots\dots\dots(21)$$

ここで、 $\mathbf{v} = (0, 0, 1)$ である。

式(21)をFourier変換すると次式が得られる。

$$\begin{cases} \hat{t}_\alpha = -i\eta_\beta C_{\alpha 3 k \beta} \hat{u}_k + C_{\alpha 3 \beta 3} \hat{u}_{k, 3} + d_{\alpha \beta \gamma \lambda} \eta_\lambda \eta_\beta \hat{u}_\gamma \\ \hat{t}_3 = -i\eta_\alpha C_{33 k \alpha} \hat{u}_k + C_{33 k 3} \hat{u}_{k, 3} + \tau_{\alpha \beta}^0 \eta_\alpha \eta_\beta \hat{u}_3 \end{cases} \quad \dots\dots\dots(22)$$

この式に式(16)を代入し、 $\eta_1 = \rho n_1$ 、 $\eta_2 = \rho n_2$ と置くと、次式が得られる。

$$\begin{cases} \hat{t}_\alpha = -i\rho \{ (C_{\alpha j k s} m_j n_s + p C_{\alpha j k s} m_j m_s) a_k q_k \\ \quad + ip d_{\alpha \beta \gamma \lambda} n_\beta n_\lambda a_\gamma q_\gamma \} e^{-ip\rho x_3} + C_{\alpha j k s} m_j m_s a_{k, 3} q_k e^{-ip\rho x_3} \\ \hat{t}_3 = -i\rho (C_{3 j k s} m_j n_s + p C_{3 j k s} m_j m_s \\ \quad + ip \tau_{\alpha \beta}^0 n_\alpha n_\beta m_k) a_k q_k e^{-ip\rho x_3} + C_{3 j k s} m_j m_s a_{k, 3} q_k e^{-ip\rho x_3} \end{cases} \quad \dots\dots\dots(23)$$

ここで、 ρ はFourier変換の変数 η_1 、 η_2 を極座標系で表した際の動径方向の変数である。式(23)はマトリックス形式で次式のように書くことができる。

$$\hat{\mathbf{t}} = -i\rho (\mathbf{B} + i\rho \mathbf{F}) \langle e^{-ip\rho x_3} \rangle \mathbf{q} \quad \dots\dots\dots(24)$$

ここで、

$$\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{b}_3] \quad \dots\dots\dots(25)$$

$$\mathbf{b}_k = (\mathbf{R}^T + i\mathbf{T}) \mathbf{a}_k + \mathbf{T} \mathbf{a}_{k, 3} \frac{i}{\rho} \quad \dots\dots\dots(26)$$

ベクトル $\mathbf{b}_k$ は、式(26)に式(17)の $\mathbf{a}_1^T$ 、 $\mathbf{a}_2^T$ 、 $\mathbf{a}_3^T$ を代入することにより、次式のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \mu \begin{Bmatrix} 1+n_1^2 \\ n_1 n_2 \\ 2in_1 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \mu \begin{Bmatrix} n_1 n_2 \\ 1+n_2^2 \\ 2in_2 \end{Bmatrix}, \\ \mathbf{b}_3 &= 2\mu \begin{Bmatrix} (1-2\nu+\rho x_3)n_1 \\ (1-2\nu+\rho x_3)n_2 \\ i(2-2\nu+\rho x_3) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(27)$$

いま、表面応力および表面弾性定数は等方性を仮定する。表面弾性定数を $d_{\alpha\beta\gamma\lambda} = \Lambda^s \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\lambda} + \mu^s (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\lambda} + \delta_{\alpha\lambda} \delta_{\beta\gamma})$ とおくと、 $\mathbf{F}$ は次式のように書くことができる。

$$\mathbf{F} = \mu \begin{bmatrix} \bar{\Lambda}_2 n_1^2 + \bar{\mu}^s n_2^2 & \bar{\Lambda}_1 n_1 n_2 & 0 \\ \bar{\Lambda}_1 n_1 n_2 & \bar{\mu}^s n_1^2 + \bar{\Lambda}_2 n_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\tau}^0 \end{bmatrix} \mathbf{a} \quad \dots\dots\dots(28)$$

Fig. 1 An isotropic half-space

ここで, $\bar{\Lambda}_1 = (\Lambda^* + \mu^*)/\mu$, $\bar{\Lambda}_2 = (\Lambda^* + 2\mu^*)/\mu$, $\bar{\tau}^0 = \tau_{11}^0/\mu = \tau_{22}^0/\mu = \tau^0/\mu$, $\tau_{12}^0 = 0$ である。

3. 表面グリーン関数の導出

3.1 半無限等方性弾性の表面グリーン関数 (表面応力および表面弾性特性を含まない場合) いま, 図1に示すように原点に集中荷重が作用する場合の境界条件は, 次式で与えられる。

$$\mathbf{t}(x_1, x_2, 0) = \mathbf{f}\delta(x_1, x_2) \quad (29)$$

ここで, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ である。

この式を Fourier 変換し, 式(24)に代入すると $\mathbf{q}$ が求まり, $\mathbf{q}$ を式(16)に代入すると次式が得られる。

$$\hat{\mathbf{u}}(\eta_1, \eta_2, x_3) = \frac{i}{\rho} \mathbf{A} \langle e^{\rho x_3} \rangle (\mathbf{B} + i\rho \mathbf{F})^{-1} \hat{\mathbf{f}} \quad (30)$$

この式を Fourier 逆変換することにより, 表面グリーン関数を求めることができる。

いま, 表面応力および表面弾性特性を含まない場合の解を求めてみる。式(30)で $\mathbf{F} = 0$ とした時の変位の解 $\hat{\mathbf{u}}$ は, 以下ようになる。

$$\begin{aligned} \hat{u}_1 = \frac{i}{\mu\rho} e^{\rho x_3} & \left[f_1 \frac{i}{2} (v - 2 - x_3\rho \cos^2 \theta + v \cos 2\theta) \right. \\ & \left. + f_2 \frac{i}{4} (2v - x_3\rho) \sin 2\theta - f_3 \frac{1}{2} (-1 + 2v - x_3\rho) \cos \theta \right] \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \hat{u}_2 = \frac{i}{\mu\rho} e^{\rho x_3} & \left[f_1 \frac{i}{4} (2v - x_3\rho) \sin 2\theta \right. \\ & \left. + f_2 \frac{i}{4} (2v - 4 - x_3\rho + (x_3\rho - 2v) \cos 2\theta) \right. \\ & \left. - f_3 \frac{1}{2} (-1 + 2v - x_3\rho) \sin \theta \right] \end{aligned} \quad (32)$$

$$\hat{u}_3 = \frac{i}{\mu\rho} e^{\rho x_3} \left[f_1 \frac{1}{2} (2v - 1 + x_3\rho) \cos \theta \right.$$

$$\left. + f_2 \frac{1}{2} (2v - 1 + x_3\rho) \sin \theta + f_3 \frac{i}{2} (2v - 2 + x_3\rho) \right] \quad (33)$$

これらの式を式(4)の第二式に代入し, Fourier 逆変換を行う。その際, $x_1 = r \cos \theta_0$, $x_2 = r \sin \theta_0$ と置くと, 変位は次式を積分すれば得られる。

$$\mathbf{u} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \hat{\mathbf{u}} e^{-i\rho r \cos(\theta - \theta_0)} \rho d\theta d\rho \quad (34)$$

はじめに, θ に関する積分を行う。式(31)-(33)に含まれる θ に関する積分を行うため, 付録の公式(A-1)を用いる。積分を行った結果を以下に示す。

$$\begin{aligned} u_1 = \frac{1}{8\pi} \int_0^\infty e^{\rho x_3} & [J_0(r\rho) \{ f_1 \{ 4 + (-2v + \rho x_3) \\ & \times (1 + \cos 2\theta_0) \} + f_2 (-2v + \rho x_3) \sin 2\theta_0 \} + 2J_1(r\rho) \\ & \times \{ f_3 (1 - 2v + \rho x_3) \cos \theta_0 + \frac{2v - \rho x_3}{r\rho} \\ & \times (f_1 \cos 2\theta_0 + f_2 \sin 2\theta_0) \}] d\rho \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} u_2 = \frac{1}{8\pi} \int_0^\infty e^{\rho x_3} & [J_0(r\rho) \{ f_1 \{ 4 + (-2v + \rho x_3) \\ & \times (1 - \cos 2\theta_0) \} + f_2 (-2v + \rho x_3) \sin 2\theta_0 \} + 2J_1(r\rho) \\ & \times \{ f_3 (1 - 2v + \rho x_3) \sin \theta_0 - \frac{2v - \rho x_3}{r\rho} \\ & \times (f_2 \cos 2\theta_0 - f_1 \sin 2\theta_0) \}] d\rho \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} u_3 = \frac{1}{8\pi} \int_0^\infty e^{\rho x_3} & [J_0(r\rho) f_3 \{ -2 + 2v + \rho x_3 \} \\ & - J_1(r\rho) (f_1 \cos \theta_0 + f_2 \sin \theta_0) (-1 + 2v + \rho x_3)] d\rho \end{aligned} \quad (37)$$

ここで, $J_n(r)$ は n 次の第一種ベッセル関数である。

次に, 付録の式(A-2)を用いて ρ について積分する。その結果, 上記の変位の式は積分でき, 次式が得られる。

$$\begin{aligned} u_1 = \frac{1}{4\pi\mu} & \left[\left\{ \frac{1}{R} + \frac{x_1^2}{R^3} + (1 - 2v) \left\{ \frac{1}{R + |x_3|} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{x_1^2}{R(R + |x_3|)^2} \right\} \right\} f_1 + \frac{(2R^2v - 2Rx_3 - x_3|x_3|)x_1x_2}{R^3(R + |x_3|)^2} f_2 \\ & \left. + \left\{ \frac{x_3}{R^3} + \frac{1 - 2v}{R(R + |x_3|)} \right\} x_1f_3 \right] \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} u_2 = \frac{1}{4\pi\mu} & \left[\left\{ \frac{2R^2v - 2Rx_3 - x_3|x_3|}{R^3(R + |x_3|)^2} \right\} x_1x_2f_1 \right. \\ & \left. + \left\{ \frac{1}{R} + \frac{x_2^2}{R^3} + (1 - 2v) \left\{ \frac{1}{R + |x_3|} - \frac{x_2^2}{R(R + |x_3|)^2} \right\} \right\} f_2 \right. \end{aligned}$$

$$+ \left\{ \frac{x_3}{R^3} + \frac{1-2\nu}{R(R+|x_3|)} \right\} x_2 f_3 \dots\dots\dots (39)$$

$$u_3 = \frac{1}{4\pi\mu} \left[f_1 x_1 \left\{ \frac{x_3}{R^3} - \frac{(1-2\nu)}{R(R+|x_3|)} \right\} \right. \\ \left. + f_2 x_2 \left\{ \frac{x_3}{R^3} - \frac{(1-2\nu)}{R(R+|x_3|)} \right\} + f_3 \left\{ \frac{2(1-\nu)}{R} - \frac{x_3|x_3|}{R^3} \right\} \right] \dots\dots\dots (40)$$

これらの変位の式から得られた変位場は Boussinesq, Papkovitch-Neuber らの変位関数による結果と一致した。

3・2 表面応力および表面弾性特性を考慮した表面グリーン関数 つぎに、表面応力および表面弾性特性を考慮した等方性弾性体の表面グリーン関数を導出する。この場合の変位の解 $\hat{u}$ は、以下ようになる。

$$\hat{u}_1 = \frac{f_1}{\mu\rho} \left\{ \frac{x_3 \cos^2 \theta}{\bar{\Lambda}_2(3-4\nu)} + \frac{\sin^2 \theta}{1+\bar{\mu}_s\rho} + \frac{C_0 \cos^2 \theta}{h_0} \right\} \\ + \frac{f_2}{\mu\rho} \left\{ \frac{x_3 \cos \theta \sin \theta}{\bar{\Lambda}_2(3-4\nu)} - \frac{\cos \theta \sin \theta}{1+\bar{\mu}_s\rho} + \frac{C_0 \cos \theta \sin \theta}{h_0} \right\} \\ + \frac{f_3}{\mu\rho} \frac{iC_1 \cos \theta}{h_0} \dots\dots\dots (41)$$

$$\hat{u}_2 = \frac{f_1}{\mu\rho} \left\{ \frac{x_3 \cos \theta \sin \theta}{\bar{\Lambda}_2(3-4\nu)} - \frac{\cos \theta \sin \theta}{1+\bar{\mu}_s\rho} + \frac{C_0 \cos \theta \sin \theta}{h_0} \right\} \\ + \frac{f_2}{\mu\rho} \left\{ \frac{x_3 \sin^2 \theta}{\bar{\Lambda}_2(3-4\nu)} + \frac{\cos^2 \theta}{1+\bar{\mu}_s\rho} + \frac{C_0 \sin^2 \theta}{h_0} \right\} \\ + \frac{f_3}{\mu\rho} \frac{iC_1 \sin \theta}{h_0} \dots\dots\dots (42)$$

$$\hat{u}_3 = \frac{1}{\mu\rho h_0} (i f_1 C_2 \cos \theta + i f_2 C_2 \sin \theta + f_3 C_3) \dots\dots\dots (43)$$

ここで、

$$h_0 = \bar{\Lambda}_2(4\nu-3)\bar{\tau}^0\rho^2 + 4(\nu-1)(\bar{\Lambda}_2 + \bar{\tau}^0)\rho - 4 \dots\dots\dots (44)$$

$$C_0 = 2x_3 \{ 2(\nu-1)\bar{\tau}^0\rho - \bar{\Lambda}_2(2\nu-1)\rho - 2 \} \\ + \bar{\Lambda}_2(4\nu-3) \{ 4(\nu-1) + (4\nu-3)\bar{\tau}^0\rho \} \dots\dots\dots (45)$$

$$C_1 = -2 + 4\nu - x_3\rho(2 + \bar{\Lambda}_2\rho) \dots\dots\dots (46)$$

$$C_2 = 2 - 4\nu - x_3\rho(2 + \rho\bar{\tau}^0) \dots\dots\dots (47)$$

$$C_3 = 4(\nu-1) + \bar{\Lambda}_2(4\nu-3)\rho + x_3\rho(2 + \bar{\Lambda}_2\rho) \dots\dots\dots (48)$$

これらの式を式(34)に代入し、Fourier 逆変換を行うと、次式が得られる。

$$u_1 = \frac{1}{2\pi\mu} \left[f_1 \left\{ \frac{x_3}{\bar{\Lambda}_2(3-4\nu)} \left(\frac{1+2\cos^2\theta_0}{R+|x_3|} - \frac{\cos^2\theta_0}{R} \right) \right. \right.$$

$$+ \int_0^\infty e^{\rho x_3} \left\{ \frac{C_0}{h_0} \left(\frac{J_1(r\rho)}{r\rho} - J_2(r\rho) \cos^2 \theta_0 \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{1+\bar{\mu}_s\rho} \left(\frac{J_1(r\rho)}{r\rho} - J_2(r\rho) \sin^2 \theta_0 \right) \right\} \Bigg] d\rho \dots\dots\dots (49)$$

$$+ f_2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 \left\{ \frac{-x_3}{\bar{\Lambda}_2(3-4\nu)} \left(\frac{1}{R} - \frac{2}{R+|x_3|} \right) + \right. \\ \left. \int_0^\infty e^{\rho x_3} \left(\frac{1}{1+\bar{\mu}_s\rho} - \frac{C_0}{h_0} \right) J_2(r\rho) d\rho \right\} \\ + f_3 \cos \theta_0 \int_0^\infty e^{\rho x_3} \frac{C_1}{h_0} J_1(r\rho) d\rho \Bigg] \dots\dots\dots (50)$$

$$u_2 = \frac{1}{2\pi\mu} \left[f_1 \sin \theta_0 \cos \theta_0 \left\{ \frac{-x_3}{\bar{\Lambda}_2(3-4\nu)} \left(\frac{1}{R} - \frac{2}{R+|x_3|} \right) \right. \right. \\ \left. + \int_0^\infty e^{\rho x_3} \left(\frac{1}{1+\bar{\mu}_s\rho} - \frac{C_0}{h_0} \right) J_2(r\rho) d\rho \right. \\ \left. + \frac{f_2}{\mu\rho} \left\{ \frac{x_3}{\bar{\Lambda}_2(3-4\nu)} \left(\frac{1+2\sin^2\theta_0}{R+|x_3|} - \frac{\sin^2\theta_0}{R} \right) \right. \right. \\ \left. + \int_0^\infty e^{\rho x_3} \left\{ \frac{C_0}{h_0} \left(\frac{J_1(r\rho)}{r\rho} - J_2(r\rho) \sin^2 \theta_0 \right) \right. \right. \\ \left. + \frac{1}{1+\bar{\mu}_s\rho} \left(\frac{J_1(r\rho)}{r\rho} - J_2(r\rho) \cos^2 \theta_0 \right) \right\} \Bigg] d\rho \Bigg] \\ + f_3 \sin \theta_0 \int_0^\infty e^{\rho x_3} \frac{C_1}{h_0} J_1(r\rho) d\rho \Bigg] \dots\dots\dots (51)$$

$$u_3 = \frac{1}{2\pi\mu} \int_0^\infty e^{\rho x_3} \left[f_1 \frac{C_2}{h_0} J_1(r\rho) \cos \theta_0 \right. \\ \left. + f_2 \frac{C_2}{h_0} J_1(r\rho) \sin \theta_0 + f_3 \frac{C_3}{h_0} J_0(r\rho) \right] d\rho \dots\dots\dots (52)$$

本研究では表面に集中荷重が作用している場合を解析したが、式(29)の $\mathbf{t}$ に様々な分布荷重を想定することができる。その分布荷重を Fourier 変換した関数を式(31)-(33)に代入し、Fourier 逆変換すれば変位場を得ることができる。

4. 解 析 例

本研究では等方性弾性体として非晶質シリコンを考える。非晶質シリコンの表面特性は分子動力学法で求められている⁽⁹⁾。その値を参考にして以下のような物性値を用いた。ヤング率 166GPa、ポアソン比 0.26、表面応力 $\tau^0=1.5\text{J/m}$ 、表面弾性特性 $\Lambda^s=5.5\text{N/m}$ 、 $\mu^s=2.7\text{N/m}$ を用いた。加えた集中荷重は $(f_1, f_2, f_3)=(1\text{N}, 1\text{N}, 1\text{N})$ である。

図2に f_1 に対する u_1 、 u_3 および f_3 に対する u_1 、 u_3 の $x_3=-1\text{nm}$ における x_1 軸上の分布を示す。図中には上述

(a) Displacement u_1 for f_1

(b) Displacement u_1 for f_3

(c) Displacement u_3 for f_1

の非晶質シリコン (a-Si) の表面応力と表面弾性特性を用いた場合、表面弾性定数の符号を反転した値を用いた場合 (表面応力の符号は変えない)、表面応力と表面弾性特性を考慮しなかった場合の結果を示してある。図中の○印は表面応力と表面弾性特性を考慮しない場合の結果である。これらの図から、変位は表面応

(d) Displacement u_3 for f_3

Fig.2 Distributions of displacement along the x_1 -coordinate at $x_3=-1$ nm

力と表面弾性特性を考慮すると考慮しない場合の結果より小さくなることがわかる。また、 x_3 方向に力を加えた場合、表面弾性定数の値を変えても、変位分布はほとんど変化しない。これより表面に垂直な方向の力に対する応答には表面応力の影響が大きいと言える。これは異方性弾性体の結果⁽⁷⁾と同じである。一方、 x_1 方向に力を加えた場合、表面弾性定数の符号反転の影響が見られる。このように面内力と面外力で表面応力、表面弾性特性の変位に対する影響が異なることがわかる。

(a) Displacement u_1 for f_1 (no surface stress nor elasticity)

(b) Displacement u_1 for f_1 ($A^s=-5.5$ N/m, $\mu^s=-2.7$ N/m)

(c) Displacement u_3 for f_3 (no surface stress nor elasticity)

(d) Displacement u_3 for f_3 ($A^s=-5.5\text{N/m}$, $\mu^s=-2.7\text{N/m}$)

Fig.3 Contor plots of displacement at $x_2=0.0\text{nm}$

つぎに、 $x_2=0$ の断面における f_1 および f_3 に対する変位 u_1 , u_3 の等高線図を図 3 に示す。これらの図から表面特性が物体内部の変位に対する影響がわかる。図 3(a) と (b) を比較すると、両者は比較的似ており、変位の大きさもほぼ同じである。図 2(a) と同様に若干違いがある程度と言える。しかし、図 3(c) と (d) を比較すると表面応力の影響で変位 u_3 が物体内部で小さくなっており、影響は表面から 10nm 以上に及んでいることがわかる。影響範囲は異方性弾性体のそれ⁽⁷⁾より大きいようである。

本研究は科学研究費(基盤研究(B)課題番号 21360051)の援助のもとで行われたものである。ここに謝意を表する。

5. 結 言

本論文では、Stroh 形式を用いて表面応力および表面弾性特性を考慮した等方性弾性体の表面グリーン関数を導出し、非晶質シリコンの表面に集中荷重が作用した場合の変位場に対する表面応力および表面弾性特性の影響を調べた。その結果、以下のことがわかった。

- (1) Stroh 形式を用いて導出された等方性弾性体の表面グリーン関数は、等方性三次元弾性論における変位関数を用いて得られた関数と一致した。
- (2) 非晶質シリコンの表面に集中力が作用する場合の変位場より、表面応力および表面弾性特性を考慮することに

より材料が硬くなることがわかった。また、表面に垂直な力に対する変位場については、表面応力の影響が 10nm を越えることがわかった。

文 献

- (1) Nakahara, I., Shibuya, T., Tsuchida, E., Kasano, H., Tsuji, T. and Inoue, H., *Handbook of Elasticity*, (2001), pp.281-470, Asakura.
- (2) Ting, T.C.T., *Anisotropic Elasticity*, (1996), pp.243-315, Oxford.
- (3) Wang, Y. M. and Ting, T.C., The Stroh formalism for anisotropic materials that possess an almost extraordinary degenerate matrix N , *International Journal of Solids and Structures*, Vol.34, No.4(1997), pp.401-413.
- (4) Ting, T.C.T, Existence of an extraordinary degenerate matrix N for anisotropic elastic materials, *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol.49, No.3(1996), pp.405-417.
- (5) Ting, T.C.T., Anatomy of Green's function for line forces and dislocations in anisotropic media and in degenerate materials, *Physica Scripta*, Vol.44, (1992), pp.137-144.
- (6) Ting, T.C.T., *Anisotropic Elasticity*, (1996), pp.524-526, Oxford.
- (7) Koguchi, H., Surface green function with surface stresses and surface elasticity using Stroh's formalism, *ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol.75, No.6(2008), pp.0610141-06101412.
- (8) He, L.H. and Lim, C.W., Surface Green function for a soft elastic half-space: Influence of surface stress, *International Journal of Solids and Structures*, Vol.43, No.1(2006), pp.132-143.
- (9) Izumi, S., Hara, S., Kumagai, T. and Sakai, S., A method for calculating surface stress surface elastic constants by molecular dynamics: application to the surface of crystal and amorphous silicon, *Thin Solid Films*, Vol.467, No.1-2(2004), pp.253-260.

付 録

式の変形に用いた積分公式を以下に示す。

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{-ir\rho\cos\varphi} d\varphi &= 2\pi J_0(r\rho), \quad \int_0^{2\pi} \sin\varphi e^{-ir\rho\cos\varphi} d\varphi = 0 \\ \int_0^{2\pi} \cos\varphi e^{-ir\rho\cos\varphi} d\varphi &= -2\pi i J_1(r\rho) \\ \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi e^{-ir\rho\cos\varphi} d\varphi &= -2\pi J_2(r\rho) \\ &= -2\pi \left\{ J_0(r\rho) - \frac{2}{r\rho} J_1(r\rho) \right\} \dots\dots\dots(A-1) \end{aligned}$$

また、 ρ に関する積分には次の積分公式を用いる。ただし、 $x_3 \leq 0$ である。

$$\begin{aligned} \int_0^\infty J_0(r\rho) e^{\rho x_3} d\rho &= \frac{1}{R}, \quad \int_0^\infty \rho J_0(r\rho) e^{\rho x_3} d\rho = \frac{|x_3|}{R^3} \\ \int_0^\infty J_1(r\rho) e^{\rho x_3} d\rho &= \frac{r}{R(R+|x_3|)}, \\ \int_0^\infty \rho J_1(r\rho) e^{\rho x_3} d\rho &= \frac{r}{R^3}, \\ \int_0^\infty J_1(r\rho) \rho^{-1} e^{\rho x_3} d\rho &= \frac{r}{R+|x_3|} \dots\dots\dots(A-2) \end{aligned}$$

ここで、 $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ である。