材料非線形性を有する一次元棒における
応力波伝播解析へのセルオートマトンの応用*渡 辺 知 規^{*1}Numerical Analysis for Stress Wave Propagation of a Cylindrical Bar
with Material Nonlinearity by Cellular AutomatonTomonori WATANABE^{*2}^{*2} Graduate School of Engineering, Chiba University,
1-33 Yayoi-cho, Inage-ku, Chiba-shi, Chiba, 263-8522 Japan

We have investigated the properties of the numerical methods for analyzing the stress wave propagation which is caused by a longitudinal impact of a cylindrical bar by a one-dimensional model. It is shown that the one-dimensional model possesses some physical properties for the numerical calculation by applying an exponential function as the constitutive equation. We have treated the numerical method which keeps the physical properties intrinsically possessed by the system. Namely, we have focused on Cellular Automaton (CA) scheme which is derived from the integrable difference scheme by means of the ultra discrete limit. We have compared the CA scheme with the integrable difference scheme and the general-purpose methods such as Euler method and Leapfrog method on the efficiency of the calculation. The properties of the CA scheme for the present analysis are revealed. Especially, it is shown that the CA scheme can maintain a certain accuracy for the long time behavior of the stress wave propagation and the interaction between the waves.

Key Words: Numerical Analysis, Nonlinear Problem, Computational Mechanics, Exact Solution, Cellular Automaton

1. 緒 言

近年, 安心・安全への関心のいっそうの高まりとあ
いまって, 材料や構造物の衝撃荷重下での力学的挙動
の解明に向けた様々な研究が活発になされている⁽¹⁾⁽²⁾.
とりわけ, 基本的であり, 実用上も重要な部材である一
次元棒を対象とした研究では, 塑性波伝播を取り扱っ
た Karman 理論⁽³⁾をはじめ, 衝撃荷重下での応力波の
伝播解析について, これまでに多くの重要な知見が得
られている^{(1)~(3)}. しかしながら, 一般に, 材料は, 材
質や形状に非線形性を有しており, さらに, 応力波の
伝播には, スポーリング破壊などを誘起する要因のひ
とつとされる透過波や反射波との干渉なども生じるた
めに系が複雑になり, 取り扱いが非常に困難になるこ
とが知られている^{(1)~(7)}. よって, このような複雑さを
有する系に対して, いかに高精度で高効率な解析を行
なうのかということが, 現在, 大変重要な問題になっ
ている⁽⁷⁾. 特に, 開発や設計などへの実用を視野に入

れた解析では, 低コスト化・高効率化が不可欠となり,
それゆえ, 近似誤差が小さく, 信頼性のある数値的解
法が求められている.

一方, 現在, 複雑な現象を解析するための有力な
数値解析手法として, セルオートマトン (Cellular
Automaton, CA) が注目されている^{(8)~(13)}. CA とは,
端的に言う, 対象とする系の状態量である従属変数
の時間・空間発展の振舞いを, 従来のように運動方程
式などの微分方程式にもとづいて定めるのではなく,
あらかじめ与えた更新ルールによって決定していく解
析手法である. CA は, 時間・空間変数のみならず, 従
属変数まで離散化, すなわち, すべての変数がデジタル
化されているために, 計算の精度や効率の面におい
て, 計算機シミュレーションに適した手法であるとい
う特徴をもつ. さらに, CA は, 非常に単純な更新ル
ールであっても, 対象とする系全体においては, 極めて
複雑な振舞いを生み出すことができるという大きな特
徴も有している. それゆえに, CA は, 複雑な現象を
解析するための有力な手法のひとつとなっており, 反
応拡散系などの物理や化学の現象をはじめとして, 生
命や経済, 社会現象にいたるまで, 現在, さまざまな

* 原稿受付 2009 年 11 月 13 日.

^{*1} 正員, 千葉大学大学院工学研究科人工システム科学専攻
(〒263-8522 千葉市稲毛区弥生町 1-33).

E-mail: nabe@meneth.tn.chiba-u.ac.jp

分野で用いられている⁽⁸⁾。

さらに、近年では、CA の理論面において、数理学の分野において大きな発展がもたらされた^{(10)~(13)}。これまで、CA は、上述のとおり、複雑な対象を解析する上で非常に有効である反面、CA の更新ルールの妥当性については問題があった。特に物理現象を対象とする場合には、CA の更新ルールと運動方程式などの現象を支配する物理法則との関係が不明であるために、CA による解析結果については、物理的妥当性の観点から、非常に慎重な判断が要求されていた。事実、CA の研究者のひとりである Wolfram は、CA を用いて、さまざまな分野を対象にした研究を精力的に行なう一方で、CA 理論における 20 の問題のひとつとして、CA と微分方程式とのつながりについての問題提起を行なっている⁽⁹⁾。このような、CA の更新ルールと物理法則とのつながりに関する問題について、近年、数理学の分野において、超離散化という方法が発見され、CA を用いた解析結果に対するひとつの物理的妥当性が与えられるようになった^{(10)~(12)}。

したがって、このような超離散化の方法にもとづいてモデルの物理的妥当性を保持しつつ、CA のもつさまざまな特長を有効に活用することができれば、材料非線形性などを有する複雑な系での応力波の伝播解析に大きな進展をもたらすことができるのではないかと考えられる。

そこで、本研究では、種々の複雑さを有する系での応力波の伝播解析に資するための第一段階として、材料非線形性を有する一次元棒における応力波の伝播と干渉の解析を対象として、超離散化の方法にもとづく CA を応用し、計算スキームの妥当性を示すとともに、複雑さを有する系での応力波の伝播解析において、超離散化の方法にもとづく CA の有効性について明らかにすることを目的とする。

一般に、ある物理的モデルの数値解析にて、実際とは異なる結果が得られた場合、主たる原因が、現象をモデル化する際に伴う捨象の仕方にあるだけでなく、数値解析の際の近似の仕方によることがある。それゆえ、対象とする現象をモデルを用いて物理的に精確に理解するためには、モデル本来が持つ性質を適切に再現できる数値計算法と、その計算法の近似の精度を誤差を含めて明らかにし、数値解析の際の近似の仕方に起因する問題を最大限に排除する必要があると考えられる。

それゆえ、前報⁽⁷⁾では、一次元棒の典型的なモデルに対し、材料の構成則に指数関数型の構成則を応用することによって非線形波動の数値計算上有効で顕著な

特徴を付与することが可能となることを指摘し、実際に、闇雲に数値解析を行うのではなく、モデルに付与した特徴を最大限に活かし、精度よく、信頼性のある数値解析を行う方法を明らかにした。

そこで、本研究においても、前報⁽⁷⁾の結果をもとに、さらに、現在もなお活発に研究がすすめられている超離散化の方法を新たに取り入れるることにより、単なる応力波伝播解析への CA の応用というのではなく、対象とするモデルがもつ特徴を保持するという物理的妥当性を有した CA スキームを検討するという観点を重要視するものとする。このことは、特に、今後、実用への展開を視野に入れた場合などでは、精度や効率だけでなく物理的妥当性など、安全・安心のために何よりも信頼性のある数値的解法が求められる解析においては、非常に重要になるものと考えられる。

以上をまとめると、本研究の主たるポイントは以下の三つにある。

1. 対象とするモデルに非線形波動の数値計算上有用な特徴を付与するために、材料非線形性として指数関数型構成則を応用していること。
2. 信頼性のある妥当で有効な数値解析を行なうために、モデルに付与した特徴を最大限活用し、モデルが本来有する特徴を適切に再現する計算スキームを検討するというアプローチを行なっていること。
3. CA のもつさまざまな特長を有効に活用するために、超離散化の方法を応用していること。

次章では、まず、考察の準備として、本研究にて対象とする一次元棒の典型的なモデルに指数関数型構成則を応用した指数関数型モデルと、このモデルが持つ特徴、および、その特徴を保持する可積分差分スキームについて明らかにする。つぎに、第 3 章では、一次元棒のモデルや可積分差分スキームとのつながりを明確にしながら、本研究にて着目する CA を用いた数値解法である、UDCA スキームを導入する。第 4 章では、UDCA スキームのもつ特徴と精度、および、計算効率の観点から、UDCA スキームの物理的妥当性と有効性を明らかにし、応力波伝播解析における数値解法としての有用性についての検討を行う。

2. 指数関数型モデルと可積分差分スキーム

2.1 指数関数型モデル 本節では、本研究にて対象とする一次元棒の典型的なモデルに指数関数型構成則を応用した指数関数型モデルと、本研究にて取り扱う基礎方程式、および、指数関数型モデルの特徴として、孤立波の伝播と相互作用について明らかにする。

2.1.1 指数関数型モデルと基礎方程式

一次元棒を伝播する波の挙動を考える。棒の密度 ρ は一定とする。棒の軸方向に x 軸をとり、時刻 $t (\geq 0)$ のときの位置 $x (\geq 0)$ での変位と応力をそれぞれ、 $u(x, t)$ 、および、 $\sigma(x, t)$ とすると、運動方程式は、

$$\rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial x}, \quad (1)$$

となる⁽²⁾⁽³⁾。ここで、ひずみを、

$$\varepsilon(x, t) := \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \quad (2)$$

と定義し、数値計算を行うために、変数の離散化を行なう。すなわち、軸方向の位置 x について、離散間隔 l にて空間離散化を行い、任意の整数 n を用いて、 $x = nl$ とし、離散変数を

$$\sigma_n(t) := \sigma(nl, t), \quad \varepsilon_n(t) := \varepsilon(nl, t), \quad (3)$$

とおくと、式(1)について空間離散化した方程式として、

$$\rho \frac{d^2 \varepsilon_n(t)}{dt^2} = \frac{1}{l} \{ \sigma_{n+1}(t) - 2\sigma_n(t) + \sigma_{n-1}(t) \} \quad (4)$$

を得ることができる。

以上のようにして得た一次元棒の典型的なモデルの運動方程式(4)に対し、本研究では、前報⁽⁷⁾にならい、指数関数型構成則を応用する。すなわち、運動方程式(4)に対して、材料非線形性の影響を考慮するために、一次元棒の応力-ひずみ特性に、指数関数型構成則として、従来の様々な研究にて広く用いられている Voce 則⁽⁴⁾⁽⁵⁾などと同様に、

$$\sigma = a \{ 1 - \exp(-b\varepsilon) \} + c, \quad (5)$$

を用いるものとする。ただし、 a 、 b 、および、 c は定数とする。このように、本研究では、前報⁽⁷⁾と同じく、一次元棒の典型的なモデルに指数関数型構成則を応用したモデルを指数関数型モデルと呼び、運動方程式(4)と指数関数型構成則(5)から得られる方程式を指数関数型モデルの方程式とする。ただし、本研究の趣旨は、数値解法についての議論にあり、運動方程式の普遍的な特徴を考察することが目的であるので、空間離散化した運動方程式(4)に指数関数型構成則(5)を用いた方程式について、規格化としての変数変換：

$$V_n(t) := -\frac{\sigma_n(t) - c}{a}, \quad \tau := \sqrt{\frac{ab}{\rho l^2}} t, \quad (6)$$

を行なったのちに、次章以降での取り扱いの便宜上、改めて、 τ を t として書き表した方程式：

$$\frac{d^2}{dt^2} \log \{ 1 + V_n(t) \} = V_{n+1}(t) - 2V_n(t) + V_{n-1}(t), \quad (7)$$

を、本研究での基礎方程式として取り扱うものとする。

前報⁽⁷⁾によると、基礎方程式(7)は、指数関数型構成則(5)を応用することによって、非線形波動の数値解析上有用なさまざまな興味深い特徴が付与されることが明らかになっている。次項では、その特徴のひとつとして、孤立波の伝播と相互作用について明らかにする。

2.1.2 指数関数型モデルにおける孤立波の伝播と相互作用

指数関数型モデルのもつ顕著な特徴のひとつとして、基礎方程式(7)は、非線形方程式であるにもかかわらず、解析的に解くことができ、 N ソリトン解と呼ばれる厳密解を得ることができるということがある。事実、方程式(7)は、ソリトン方程式の一種として、多様な解をもつことが知られている⁽¹⁴⁾。実際に、方程式(7)の厳密解として、1 ソリトン解と呼ばれる解をもとめると、

$$V_n(t) = \sinh^2 k \operatorname{sech}^2(kn - \omega t), \quad (8)$$

となる⁽¹⁴⁾。ただし、ここで、 k は波数であり、周波数 ω は、分散関係式：

$$\omega = \pm \sinh k, \quad (9)$$

によって定まるものとする。解(8)は、第2.2節の図2にて具体的に例示するとおり、ソリトンと呼ばれる、安定に伝播する孤立波であることが知られている。

さらに、方程式(7)にて、注目すべきは、このような孤立波どうしが相互作用をしながら伝播する解も厳密に得ることができるということである。事実、具体例として、2 ソリトン解と呼ばれる解：

$$V_n(t) = \frac{d^2}{dt^2} \log f_n(t), \quad (10)$$

$$f_n(t) := 1 + \exp(2\theta_1) + \exp(2\theta_2) + a_{12} \exp\{2(\theta_1 + \theta_2)\}, \quad (11)$$

$$\theta_1 := k_1 n - \omega_1 t, \quad \theta_2 := k_2 n - \omega_2 t, \quad (12)$$

$$a_{12} := -\frac{\sinh^2(k_1 - k_2) - (\omega_1 - \omega_2)^2}{\sinh^2(k_1 + k_2) - (\omega_1 + \omega_2)^2}, \quad (13)$$

$$\omega_1 := \pm \sinh k_1, \quad \omega_2 := \pm \sinh k_2, \quad (14)$$

を得ることができる。解(10)が、方程式(7)を満たすことは、実際に代入をすることによって確かめることができる。

解(10)の振舞いを図1に示す。ただし、二つの孤立波の波数は、それぞれ、 $k_1 = 1.0$ 、および、 $k_2 = 0.8$ 、とした。図から、解(10)は、位置 n が正の向きに進む $k_1 = 1.0$ の孤立波と、負の向きに進む $k_2 = 0.8$ の孤立波が、時間の経過とともに、互いに相互作用を及ぼしあいながら接近をし、衝突をした後に、通過していく

様子を表していることがわかる。このような解の振舞いにおいて注意すべき特徴としては、基礎方程式 (7) からわかるとおり、系には、一般に、波の伝播とともに、波形を崩す働きをするとされる分散性と非線形性が存在するにもかかわらず、二つの孤立波が、安定に伝播し、しかも、衝突をしたにもかかわらず、その後も、安定に伝播しつづけているということである。このような振舞いは、特に、図において、衝突の前後における波の振幅の大きさに着目すると、波の振舞いには、振幅の重ね合わせの関係が成り立っておらず、したがって、ダランベールの解に代表されるような単純な線形の波の重ね合わせによるものとは異なり、非線形な相互作用によるものであることがわかる。このような波の特徴的な振舞いは、応力波の伝播と干渉の解析を行なっていくにあたっては、重要な意味をもつものと考えられ、信頼性のある数値解析を行なうためには、物理的妥当性の観点から、数値計算において、このような振舞いが保持されるかどうかを検討する必要があると考えられる。

以上、まとめると、運動方程式 (4) に材料非線形性を考慮することによって、方程式が、非線形方程式となるにもかかわらず、方程式 (7) では、解 (8) や解 (10) などの厳密解が得られるといった特徴があることが明らかになった。ここで注意すべきは、このような特徴は、構成則に指数関数型構成則を応用することによってはじめて得ることができることであり、さらに、決して自明ではないということである。したがって、このような、指数関数型構成則を応用することによって付与される自明でない顕著な特徴を、応力波伝播解析のための数値計算に活用することが、本研究での重要なポイントとなっている。ただし、ここで気をつけなくてはならないことは、本項にて記したように、たとえば、指数関数型構成則を応用することによって、運動方程式 (4) についての厳密解を得ることができたとしても、それは特殊な条件のもとでの解であり、任意の初期値に対する解の時間発展を解析的に得ることは、實際上、非常に困難であるということである⁽¹³⁾。それゆえに、方程式 (7) について信頼のおける数値計算法の開発は大変重要となっている⁽¹³⁾。

次節では、次章以降での考察の準備として、方程式 (7) が厳密解をもつという特徴を保持する可積分差分スキームを明らかにする。

2.2 可積分差分スキーム 基礎方程式 (7) について、可積分差分を行った式は、時間変数 t についての差分間隔を $\delta (> 0)$ としたとき、

$$\Delta_t^2 \log(1 + V_n^t) = \tilde{V}_{n+1}^t - 2\tilde{V}_n^t + \tilde{V}_{n-1}^t, \quad (15)$$

Fig. 1 Two soliton solution (10) for $k_1 = 1.0$ and $k_2 = 0.8$.

として与えられる⁽¹⁵⁾。ただし、時間変数 t について差分化をした $V_n(t)$ を V_n^t とし、 Δ_t は、任意の関数 $F(t)$ に対して、

$$\Delta_t F(t) = \delta^{-1} \left\{ F\left(t + \frac{\delta}{2}\right) - F\left(t - \frac{\delta}{2}\right) \right\}, \quad (16)$$

として作用する差分演算子であり、 $\tilde{V}_n^t$ は、

$$\tilde{V}_n^t := \delta^{-2} \log(1 + \delta^2 V_n^t), \quad (17)$$

として与えられる⁽¹⁵⁾。この方程式 (15) は、 $\delta \rightarrow +0$ で基礎方程式 (7) に一致することがわかる。

式 (15) の顕著な特徴としては、式 (15) は、非線形な差分方程式であるにもかかわらず、 N ソリトン解をもつということである⁽¹⁵⁾。一般に、差分化を行うにあたっては、たとえ、差分化を行う前の方程式について、厳密解を得ることができたとしても、差分化を行った後の方程式に対しては、厳密解を得ることができるとは限らない。しかしながら、式 (15) は厳密に解くことができる。実際に、厳密解である 1 ソリトン解として、

$$V_n^t = \sinh^2 K \operatorname{sech}^2(Kn - \Omega t), \quad (18)$$

を得ることができる⁽¹⁵⁾。ただし、ここで、 K は波数であり、周波数 Ω は、分散関係式：

$$\delta^{-1} \sinh(\delta \Omega) = \pm \sinh K, \quad (19)$$

によって定まるものとする。さらに、方程式 (15) からは、注目すべきこととして、孤立波どうしが相互作用をしながら伝播する厳密解も得ることができ、2 ソリトン解として、

$$V_n^t = \frac{f_{n+1}^t f_{n-1}^t}{(f_n^t)^2} - 1, \quad (20)$$

$$f_n^t := 1 + \exp(2\Theta_1) + \exp(2\Theta_2) + A_{12} \exp\{2(\Theta_1 + \Theta_2)\}, \quad (21)$$

$$\Theta_1 := K_1 n - \Omega_1 t, \quad \Theta_2 := K_2 n - \Omega_2 t, \quad (22)$$

$$\delta^{-1} \sinh(\delta \Omega_1) = \pm \sinh K_1, \quad \delta^{-1} \sinh(\delta \Omega_2) = \pm \sinh K_2, \quad (23)$$

$$A_{12} := -\frac{\{2 \sinh(K_1 - K_2)\}^2 - [2\delta^{-1} \sinh\{\delta(\Omega_1 - \Omega_2)\}]^2}{\{2 \sinh(K_1 + K_2)\}^2 - [2\delta^{-1} \sinh\{\delta(\Omega_1 + \Omega_2)\}]^2}, \quad (24)$$

を得ることができる⁽¹⁵⁾. 式(18)と式(20)が方程式(15)の解であることは、実際に代入をして確かめることができる. このように、可積分差分スキームでは、差分化をした方程式から厳密解が得られることが大きな特徴となっている.

差分化をした方程式(15)の厳密解の妥当性を確認するために、図2に、1ソリトン解の比較として、指数関数型の式(7)の解(8)と可積分差分スキームの式(15)の解(18)を示す. ただし、いずれの波形についても、時刻は $t = 1.0$ とし、波数は、それぞれ、 $k = 1.0$ 、および、 $K = 1.0$ 、差分間隔は $\delta = 0.1$ とした. なお、以下では、考察の便宜上、変数 $V_n(t)$ 、および、 V_n^t ではなく、構成則(5)をもとに、

$$U_n(t) := \log\{1 + V_n(t)\}, \quad (25)$$

$$U_n^t := \log\{1 + V_n^t\}, \quad (26)$$

として与えられる無次元化をしたはずみ、 $U_n(t)$ 、および、 U_n^t を用いるものとする⁽⁷⁾. 図2から、可積分差分スキームの式には、指数関数型モデルの式が持つソリトン解に対応する安定な孤立波が存在するということがわかる. また、同様のことは2ソリトン解である、解(10)と解(20)についても確認することができ、差分化をした方程式(15)のそれぞれの厳密解が妥当であることがわかる.

次章では、このような結果をもとに、指数関数型モデルや可積分差分スキームがソリトン解をもつという物理的特徴を保持するようなCAスキームの導入を行なう.

3. UDCA スキーム

指数関数型モデルは、基礎方程式(7)が非線形方程式であるにもかかわらず、厳密な解(8)や解(10)を持つという特徴を有していた. この特徴を保持する計算スキームとして、可積分差分スキームの式(15)は、差分方程式であるにもかかわらず、厳密な解(18)や解(20)を持つという特徴を有していた. 本章では、これらの特徴を保持する計算スキームを得るために、超離

Fig. 2 One soliton solution at $t = 1.0$. Solution (18) for $K = 1.0$ and $\delta = 0.1$. Exact solution (8) for $k = 1.0$.

散化の方法を応用する^{(10)~(12)}. これにより、導出過程が明確なCAによる計算スキームを得る.

可積分差分スキームの式(15)に、式(26)を用いて、方程式をひずみ U を用いた式に書き直したのちに、超離散化の方法により、CAの方程式を得る. 実際には、超離散化のためのパラメータ $\varepsilon (> 0)$ を導入し、変数を、

$$U_n^t = \frac{u_n^t}{\varepsilon}, \quad \delta = \exp\left(-\frac{L}{2\varepsilon}\right), \quad (27)$$

と書き直したのちに、超離散極限 (Ultra Discrete Limit) として、

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log \left\{ \exp\left(\frac{A}{\varepsilon}\right) + \exp\left(\frac{B}{\varepsilon}\right) \right\} = \max(A, B), \quad (28)$$

という関係を用いて、 $\varepsilon \rightarrow +0$ とする⁽¹²⁾. ただし、 L 、 A 、および、 B は、正の整数とする. この変数変換と極限操作を行なうと、可積分差分スキームの式(15)と式(26)から、

$$\begin{aligned} & u_n^{t+1} - 2u_n^t + u_n^{t-1} \\ &= \max(0, u_{n+1}^t - L) - 2 \max(0, u_n^t - L) + \max(0, u_{n-1}^t - L), \end{aligned} \quad (29)$$

を得ることができる^{(10)~(12)}. 本研究では、この式を用いた数値計算スキームを、単なるCAを応用した計算法と区別するために、UDCAスキームと呼ぶものとする.

以上のとおり、UDCAスキームの式(29)を得る過程において注意すべきは、従来のCAでは、一般に、時刻 t 以前の u の値から時刻 $t+1$ での u の値を得る更新ルールは経験的に与えられるのに対し、式(29)では、可積分差分スキームの式(15)から、数学的操作として明確に与えられているということである. さらに

は、可積分差分スキームの式 (15) と指数関数型モデルの式 (7) との関係も考慮すると、UDCA スキームの式 (29) は、指数関数型モデルと数学的手続きによって明確に結び付けられているということがわかる。このことは、闇雲に CA モデルを導入するというのではなく、指数関数型モデルがもつ性質を保持した CA モデルを導入するという本研究において、モデルの物理的妥当性を判断する上での非常に重要な特徴になると考えられる。以下では、UDCA スキームの式 (29) の応力波解析への応用について検討する。

4. 結果と考察

4.1 指数関数型モデルに対する UDCA スキームの特徴 第 3 章では、可積分差分スキームの式 (15) から、超離散化の方法によって、UDCA スキームの式 (29) を得る方法を明らかにした。では、このようにして得た UDCA スキームでは、可積分差分スキームの式の解 (18) や解 (20) に対応する解は存在し、物理的妥当性が保持されているのであろうか？ 本節では、UDCA スキームでの解を具体的に得ることにより、指数関数型モデルに対する UDCA スキームの特徴を明らかにし、UDCA スキームの物理的妥当性と実際に数値計算を行なう上での計算精度について検討する。

4.1.1 安定な孤立波の伝播 UDCA スキームでの解を得るために、まず、可積分差分スキームでの解 (18) について、式 (27) に加え、

$$K = \frac{p}{2\varepsilon}, \quad \Omega = \frac{q}{2\varepsilon}, \quad (30)$$

という変数変換を行なうと、

$$u'_n = \varepsilon \Delta_n^2 \log \left\{ 1 + \exp \left(\frac{pn - qt}{\varepsilon} \right) \right\}, \quad (31)$$

を得ることができる。ただし、ここで、記号 Δ_n^2 は、任意の関数 G_n に対して、

$$\Delta_n^2 G_n = G_{n+1} - 2G_n + G_{n-1}, \quad (32)$$

を意味するものとする⁽¹¹⁾。つぎに、式 (31) について、式 (28) を用いて $\varepsilon \rightarrow +0$ として、超離散化を行なうと、最終的に、解 (18) から、

$$u'_n = \Delta_n^2 \max(0, pn - qt), \quad (33)$$

を得ることができる。また、同様に、分散関係式 (19) からは、

$$q = \pm \{ \max(0, p - L) - \max(0, -p - L) \}, \quad (34)$$

を得ることができる⁽¹¹⁾。

Fig. 3 Time development of the waves (31) and (33) for $\varepsilon = 0.01$, $L = 1$ and $p = 3$.

図 3 に、式 (31) と式 (33) の時間発展の様子を示す。ただし、図では、 $\varepsilon = 0.01$, $L = 1$, および、 $p = 3$ とした。まず、図から、式 (31) については、波の概形は、図 2 の結果と比較してもわかるとおり、 ε が小さな値をとることにより、二等辺三角形に近いとがった孤立波となり、この孤立波が安定に伝播することがわかる。また、式 (33) については、図から、式 (31) にて、 ε が小さくなる場合の波形に対応して、各位置にて、整数値をとる波、すなわち、独立変数のみならず従属変数までもデジタル化された波が伝播していくことがわかる。したがって、これらのことから、式 (33) は、安定な孤立波として伝播し、超離散化の方法によって、可積分差分スキームでの解 (18) の振舞いは保持されていることがわかる。

では、実際に、式 (33) が UDCA スキームの式 (29) の解であることを示すために、式 (33) を用いた波を初期条件として与えた場合の UDCA スキームの式 (29) のシミュレーション結果を図 4 に示す。ただし、図中の位置 n と時刻 t での各数値は u の値を意味し、図では、比較のために図 3 の場合と同様に、 $L = 1$, および、 $p = 3$ とした。図から、図 3 にて示した CA の孤立波と同様の波が UDCA スキームの式 (29) に従って安定に伝播していくことがわかる。よって、式 (33) は、UDCA スキームの式 (29) の解であり、超離散化の方法によって、指数関数型モデルや可積分差分スキームの物理的振舞いが保持されていることがわかる。

4.1.2 孤立波の相互作用 UDCA スキームにて、孤立波どうしが相互作用をしながら伝播する解を得るために、まず、可積分差分スキームでの解 (20) につい

Fig. 4 Wave propagation by equation (29) on the initial condition (33) for $L = 1$ and $p = 3$.

Fig. 5 Wave propagation by equation (36) for $L = 1$, $p_1 = 3$ and $p_2 = 2$.

て、式 (27) に加え、

$$K_1 = \frac{p_1}{2\varepsilon}, \quad \Omega_1 = \frac{q_1}{2\varepsilon}, \quad K_2 = \frac{p_2}{2\varepsilon}, \quad \Omega_2 = \frac{q_2}{2\varepsilon}, \quad (35)$$

という変数変換を行ない、式 (28) を用いて $\varepsilon \rightarrow +0$ とし、超離散化を行なうと、最終的に、解 (20) から、

$$u_n^t = \Delta_n^2 \rho_n^t, \quad (36)$$

$$\rho_n^t := \max(0, \eta_1, \eta_2, \eta_1 + \eta_2 + \alpha_{12}), \quad (37)$$

$$\eta_1 := p_1 n - q_1 t, \quad \eta_2 := p_2 n - q_2 t, \quad (38)$$

$$\alpha_{12} := \max\{\min(p_1 + q_1, -p_2 - q_2), \min(-p_1 - q_1, p_2 + q_2)\}, \quad (39)$$

を得ることができる。また、同様にして、分散関係式 (23) からは、

$$q_1 = \pm\{\max(0, p_1 - L) - \max(0, -p_1 - L)\}, \quad (40)$$

$$q_2 = \pm\{\max(0, p_2 - L) - \max(0, -p_2 - L)\}, \quad (41)$$

を得ることができる⁽¹¹⁾。

図 5 に、解 (36) の時間発展の様子を示す。ただし、図では、 $L = 1$ 、 $p_1 = 3$ 、および、 $p_2 = 2$ とした。図から、解 (36) は、前項にて示したような二つの孤立波が、時間の経過とともに接近するように伝播し、互いに相互作用を及ぼしあいながら、衝突の後にも安定に伝播しつづける様子がわかる。このような解の振舞いは、実際に UDCA スキームの式 (29) から得ることができ、式 (36) が式 (29) の解であることを確認することができる。

したがって、UDCA スキームの式 (29) は、基礎方程式 (7) が厳密解 (10) を持ち、孤立波どうしが相互作用をしながら伝播するという特徴を保持したスキームであることがわかる。

4.1.3 UDCA スキームの計算精度 前項の結果において特徴的なことは、いずれの結果においても、整数値をとる波が伝播しているということである。このことは、UDCA に限らず、CA 全般に該当する大きな特徴ではあるが、従属変数の値が整数値しかとらないということは、図 3 での波の比較からもわかるとおり、波の振舞いの定量的評価という観点からは、従属変数の値が実数値をとる差分化の場合と比べて結果が粗くなってしまうということを意味する。しかし、その反面、数値解析の計算精度といった観点からは、従属変数の値が整数値しかとらないということは、計算機によって繰返し計算を行なうなかで、丸め誤差などによる誤差の蓄積が結果に影響を及ぼすことが無いということを意味する。すなわち、図 4 や図 5 にて示した孤立波は、丸め誤差などに起因する波形の変化もなく、長時間、安定に伝播するということがわかる。したがって、この意味で、CA を用いたスキームは、従属変数の値が実数値をとる他の計算スキームと比べて長時間の観測において精度が良く、定性的に信頼できる数値解法であると考えられる。

以上のことから、UDCA スキームには、本節にて示したとおり、超離散化という明確な数学的操作によって、指数関数型モデルから可積分差分スキームを通じ

て得られる解が存在し、そのうえ、波の振舞いには、精度の観点からの定性的な信頼性があることを考慮すると、UDCA スキームは、指数関数型モデルがもつ物理的性質を保持した妥当な数値解法であるということがわかる。

4.2 UDCA スキームの計算効率 本節では、UDCA スキームの数値計算上の有効性を検討するために、スキームの計算効率を明らかにする。具体的には、計算効率の評価には、従来の研究⁽⁷⁾⁽¹³⁾にならい、計算に要した時間 (CPU-time) を用い、可積分差分スキーム (2 次) に加え、代表的な汎用的数値解法として、オイラー法 (1 次) とリープフロッグ法 (2 次) の三つの数値解法と比較することにより、UDCA スキームの特徴を明らかにする。なお、数値計算では、CPU: Intel Xeon 2.4 [GHz] の計算機にて、標準的な市販の Fortran コンパイラ (Visual Fortran) を用いた倍精度実数型計算を行なった。

図 6 に、各数値解法の CPU-time を示す。ただし、ここで、ステップ数については、差分スキームである、可積分差分スキーム、オイラー法、および、リープフロッグ法では、時刻 $t = T$ にいたるまでの時間についての繰り返し回数 T/δ として定義し、図では、 $T = 50$ として差分間隔 δ を変化させた。図から、いずれの数値解法の結果もステップ数に対する CPU-time は、ほぼ直線的に増加し、UDCA スキームは、可積分差分スキームを含めた従来の数値解法と比較して、同じステップ数を計算するのに要する CPU-time がかなり小さくなっていることがわかる。実際に、いずれの数値解法も CPU-time がほぼ直線的に増加することに着目して、1 ステップあたりの CPU-time を比較すると、表 1 から、UDCA スキームは、いずれの数値解法と比較しても 1/10 以下の結果になっていることがわかる。

したがって、以上のことから、UDCA スキームは、可積分差分スキームを含めた従来の数値解法と比較して、計算効率の観点から有効なスキームであると考えられる。

5. 結 言

本研究では、指数関数型モデルを対象として、闇雲に数値解析を行うのではなく、系のもつ特徴に着目し、その特徴を最大限に活かし、系が本来有する特徴を適切に再現する計算スキームを検討するという観点から、あらたに超離散化の方法を取り入れた CA モデルの物理的妥当性と有効性、ならびに、応力波伝播解析へ応用する際の有用性について明らかにした。得られた主な結果を以下に示す。

Fig. 6 CPU-time by each numerical method.

Table 1 CPU-time/Step by each numerical method.

Scheme	CPU-Time/Step [s/Step]	Ratio
CA	1.276×10^{-4}	1.00
Integrable	1.335×10^{-3}	10.46
Euler	2.020×10^{-3}	15.83
Leapfrog	2.131×10^{-3}	16.70

- (1) CA は、従属変数の値が整数値しかとらないために、従属変数の値が実数値をとる他の計算スキームと比べて、波の振舞いの定量的評価という観点からは、結果が粗くなってしまう反面、数値解析の計算精度といった観点からは、整数型にて計算をするため、丸め誤差や桁落ちなどが起きないという点で精度が良く、定性的に信頼できる数値解法である。
- (2) UDCA スキームは、超離散化という明確な数学的操作によって得られ、指数関数型モデルや可積分差分スキームから得られる解の性質を保持する妥当な数値解法である。
- (3) UDCA スキームは、1 ステップあたりの CPU-time が、可積分差分スキームを含めた従来の数値解法と比較して、1/10 以下となり、計算効率の観点から有効なスキームである。
- (4) UDCA スキームは、系が有する安定な孤立波の伝播と相互作用といった特徴を再現する物理的にも妥当な数値解法であり、応力波の伝播や干渉の解析に応用するうえで有効な手法である。

実際の衝撃荷重下での応力波の波形は、本研究にて取り扱った波形のような単純なものではなく、非常に複雑であることが知られている。そのうえ、指数関数

型モデルそのものも、モデル化の際に特定の理想化がなされており、実用にあたっては、さらなる物理的検討が必要であると考えられる。本論文でも述べたとおり、CAを応用した数値解法は、従来の数値解法と比較して、簡便で、計算効率もよく、それゆえに、拡張性や汎用性も高いという特長を持つ。本研究では、このようなCAの特長に着目し、指数関数型モデルに対し物理的妥当性と有効性をもつCAの応力波伝播解析への応用を明らかにした。このような本研究の結果は、指数関数型モデルを、さらに複雑で現実的な問題に適用していく際の有用な情報や指針を与えることができるものと考えられる。

文 献

- (1) For example; Tanimura, S., Dynamic Problems of Materials and Structures, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers. A*, Vol.63, (1997), pp.2466–2471, and references therein.
- (2) For example; Johnson, W., *Impact Strength of Materials*, (1972), Edward Arnold, and references therein.
- (3) Karman, T. V. and Duwez, P., The Propagation of Plastic Deformation in Solids, *Journal of Applied Physics*, Vol.21, (1950), pp.987–994.
- (4) Voce, E., The Relationship between Stress and Strain for Homogeneous Deformation, *Journal of the Institute of Metals*, Vol.74, (1948), pp.537–562.
- (5) Voce, E., A Practical Strain-Hardening Function, *Metalurgia*, Vol.51, (1955), pp.219–226.
- (6) For example; Nakagawa, T., *Rheology*, 2nd Ed. (in Japanese), (1993), Iwanami Shoten and references therein.
- (7) Watanabe, T., Numerical Analysis for a Longitudinal Impact of a Cylindrical Bar with the Constitutive Equation represented by an Exponential Function, submitted to *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers. A*,
- (8) For example; Wolfram, S., *A New Kind of Science*, (2002), Wolfram Media Inc., and references therein.
- (9) Wolfram, S., Twenty Problems in the Theory of Cellular Automata, *Physica Scripta*, T9, (1985), pp.170–183.
- (10) Takahashi, D. and Matsukidaira, J., On Discrete Soliton Equations related to Cellular Automata, *Physics Letters A*, Vol.209, (1995), pp.184–188.
- (11) Matsukidaira, J., Satsuma, J., Takahashi, D., Tokihiro, T. and Torii, M., Toda-type Cellular Automaton and its N -soliton Solution, *Physics Letters A*, Vol.225, (1997), pp.287–295.
- (12) Tokihiro, T., Takahashi, D., Matsukidaira, J. and Satsuma, J., From Soliton Equations to Integrable Cellular Automata through a Limiting Procedure, *Physical Review Letters*, Vol.76, (1996), pp.3247–3250.
- (13) Nakamura, Y. ed., *Applied Integrable Systems (in Japanese)*, (2000), Shokabo, and references therein.
- (14) Toda, M., Development of the Theory of a Nonlinear Lattice, *Supplement of the Progress of Theoretical Physics*, Vol.59, (1976), pp.1–35.
- (15) Hirota, R., Nonlinear Partial Difference Equations. II. Discrete-Time Toda Equation, *Journal of the Physical Society of Japan*, Vol.43, (1977), pp.2074–2078.