粘弾性体と不均質弾性体からなる積層中空半球の
軸対称粘弾性応力とクリープ変形*小林 哲也^{*1}, 菅野 良弘^{*2}Axisymmetric Viscoelastic Stress and Creep Deformation in
Laminated Hollow Hemisphere Composed of
Viscoelastic Body and Nonhomogeneous Elastic BodyTetsuya KOBAYASHI and Yoshihiro SUGANO^{*3}^{*3} Department of Mechanical Engineering, Iwate University,
4-3-5 Ueda, Morioka-shi, Iwate, 020-8551 Japan

Viscoelastic stresses and creep deformations in the laminated hollow hemisphere composed of a viscoelastic body and a nonhomogeneous elastic body are analyzed using integral forms of stress-strain constitutive relations and based on the correspondence principle between the Laplace transformed viscoelastic solution and the analytic solution for the corresponding elastic problem. The analytic solution for elastic problem is formulated in terms of Papkovitch-Neuber displacement function, and the Laplace transformed stresses and deformations of viscoelastic hollow hemisphere are obtained through the replacement of the elastic moduli by the Laplace transformed viscoelastic relaxation functions. The inverse Laplace transform of the solution is performed by Hosono's method of numerical inverse Laplace transformation.

Key Words: Viscoelasticity, Nonhomogeneous Elasticity, Laminated Hollow Hemisphere, Creep Deformation, Correspondence Principle, Numerical Inverse Laplace Transform

1. 結 言

高分子材料は医療・バイオテクノロジー分野や情報・通信分野において多様な応用面をもち、ますます重要性を増してきている。高分子材料を構成材料とするほとんどの製品は、金属やセラミックなどの異種材料と組み合わせて用いられるため、材料の不均質性が変位や応力に及ぼす影響を明らかにすることにより、信頼性の向上や最適設計に役立つと考えられる。また、高分子材料はクリープや応力緩和などの粘弾性特性を示し、力学的挙動に著しい時間依存性があるため、この性質を考慮した解析が必要である。しかし、時間的な応答をする粘弾性体と瞬間的な応答をする弾性体の積層体の力学的挙動に関する解析は容易ではなく、基本的な構成要素である球、半球の球対称問題以外の解析はほとんど報告されていない。

そこで本研究では、粘弾性体と不均質弾性体（多層弾性体）からなる積層中空半球の内面に軸対称負荷を受ける場合の変位と応力を、同一形状で同一負荷を受

ける弾性問題の解析解とラプラス像空間における粘弾性解の間に成立する対応原理に基づいて、ラプラス像空間上において解析的に導出し、そのラプラス変換解を細野の方法^{(1),(2)}を用いて数値的にラプラス逆変換し、所要の変位、応力を求める。数値計算例として、粘弾性特性を示す UHMWPE（超高分子量ポリエチレン）と弾性特性を示す海绵骨、PMMA（ポリメチルメタクリレート）骨セメント、HA_p（ハイドロキシアパタイト）からなる人工股関節臼蓋を模擬した積層中空半球の軸対称問題を対象とする。UHMWPE 人工股関節臼蓋の耐久性を支配する UHMWPE の摩耗粉は、人工臼蓋の内表面とその近傍に繰り返し生じる過渡的な応力や UHMWPE のクリープ変形に大きく影響するため、臼蓋内表面の負荷分布が UHMWPE 内表面のクリープ変位、応力分布に及ぼす影響、および粘弾性層の厚さが、人工股関節臼蓋の変位、応力分布に及ぼす影響を定量的に明らかにする。

2. 問題設定と解析法

図1のような球座標系を設定し、半径方向に不均質性をもった弾性体のみを相異なる均質層に分割し、粘弾性体と多層弾性体からなる m 層の積層中空半球（内

* 原稿受付 2010 年 7 月 13 日。

^{*1} 正員, 岩手大学大学院工学研究科 (〒020-8551 盛岡市上田 4-3-5)。^{*2} 正員, 岩手大学工学部。

E-mail: sugano@iwate-u.ac.jp

外半径 r_i, r_{m+1} の内面に軸対称負荷を受ける場合の変位と応力を解析する。第1層を粘弾性体、第2層から第 m 層までを弾性体とし、第 i 層の内外半径をそれぞれ r_i, r_{i+1} とする。力学的境界条件として、積層中空半球の内面において軸対称負荷 $f(\theta, t)$ を受け、外面において応力フリーとし、底面 ($\theta = 90^\circ$) の子午線方向変位とせん断応力を0とする。また、各層の界面において完全接合しているものとする。この場合の力学的境界条件、連続条件を次式に示す。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= f(\mu, t), \quad \sigma_{r\theta} = 0 \quad (r = r_i) \\ \sigma_{rm} &= 0, \quad \sigma_{r\theta m} = 0 \quad (r = r_{m+1}) \\ \sigma_{\theta r_i} &= 0, \quad u_{\theta i} = 0 \quad (\mu = 0) \\ \sigma_{ri} &= \sigma_{ri+1}, \quad \sigma_{r\theta i} = \sigma_{r\theta i+1} \quad (r = r_{i+1}, i = 1, 2, \dots, m-1) \\ u_{ri} &= u_{ri+1}, \quad u_{\theta i} = u_{\theta i+1} \quad (r = r_{i+1}, i = 1, 2, \dots, m-1) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ただし、 $\mu = \cos \theta$ であり、下添え字 i は第 i 層の諸量を表す。

以下に解析手順の概略を示す。

1. 第1層の粘弾性解を、ラプラス像空間における粘弾性解と同一問題の弾性解の間に成立する対応原理を用いて解析するため、第1層も弾性体とした弾性積層中空半球の解析解を導出する。
2. 弾性積層中空半球の第1層の解析解に対応原理を適用して、第1層のラプラス像空間におけるクリープ変位、粘弾性応力を表現する。また、第2層から第 m 層までの弾性体の変位、応力の解と、式(1)の境界条件、連続条件にラプラス変換を施す。
3. 粘弾性体と弾性体からなる m 層の積層中空半球のラプラス像空間における変位、応力の解を、ラプラス変換した式(1)に代入し、ラプラス変換パラメータの特定の値 (複素数) に対して複素係数の連立一次方程式を解く。
4. 複素数の未知係数をラプラス像空間における変位、応力に代入し、細野の方法により数値ラプラス逆変換して、第1層のクリープ変位、粘弾性応力と第2層から第 m 層までの弾性変位、応力を求める。

Fig. 1 Analytical model of laminated hollow hemisphere

3. 線形粘弾性理論

粘弾性体の履歴依存型の構成式のラプラス変換と弾性体の構成式について示す。まず、粘弾性体の履歴依存型の構成式は、偏差応力 $s_{ij}(t)$ と偏差ひずみ $e_{ij}(t)$ 、垂直応力の和 $\sigma_{kk}(t)$ と体積ひずみ $\varepsilon_{kk}(t)$ について、次式のように表される。

$$s_{ij}(t) = 2\mu_r(t)e_{ij}(0) + 2 \int_0^t \mu_r(t-\tau) \frac{de_{ij}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (2)$$

$$\sigma_{kk}(t) = 3K_r(t)\varepsilon_{kk}(0) + 3 \int_0^t K_r(t-\tau) \frac{d\varepsilon_{kk}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (3)$$

ここで、 $\mu_r(t)$ はせん断に対する緩和弾性係数、 $K_r(t)$ は体積変化に対する緩和弾性係数であり、 $e_{ij}(0)$ 、 $\varepsilon_{kk}(0)$ は初期ひずみである。式(2)、(3)をそれぞれラプラス変換すると次式が得られる。

$$\bar{s}_{ij}(s) = 2s\bar{\mu}_r(s)\bar{e}_{ij}(s) \quad (4)$$

$$\bar{\sigma}_{kk}(s) = 3s\bar{K}_r(s)\bar{\varepsilon}_{kk}(s) \quad (5)$$

ここで、変数の上付きのバーは、そのラプラス変換量を意味し、 s はラプラス変換パラメータである。式(4)、(5)は、それぞれ弾性体の偏差応力と偏差ひずみ、垂直応力の和と体積ひずみの間に成立する関係式において、横弾性係数 G_e と体積弾性係数 K_e をそれぞれ $s\bar{\mu}_r(s)$ と $s\bar{K}_r(s)$ に置換することによって得られる式と同一である。この対応が成立する場合、ラプラス変換された粘弾性の特性関数には、弾性係数の間の関係式と同様な関係式が成立する。したがって、同一問題の弾性解から対応原理を用いてラプラス像空間における粘弾性応力解を導出し、その解をラプラス逆変換することによって実空間における粘弾性応力解が得られる。

4. 積層中空半球の応力解析

4.1 弾性応力解析 第1層の粘弾性解を対応原理により導出するため、第1層も弾性体として積層中空半球の応力解析を行う。

Papkovich-Neuber の変位関数を用いると、球座標系の軸対称弾性問題の変位解として、第 i 層の変位場は次式のように表される。

$$\mathbf{u}_i = 4(1-\nu_{ei})\mathbf{B}_i - \text{grad}(\mathbf{B}_i \cdot \mathbf{r} + B_{0i}) \quad (6)$$

ここで、 $\mathbf{B}_i = (B_{ri}, B_{\theta i})$ は第 i 層の調和ベクトル、 B_{0i} は第 i 層の調和スカラー、 ν_{ei} は第 i 層のポアソン比である。 $\mathbf{B}_i$ 、 B_{0i} はそれぞれ次の支配方程式を満足する。

$$\nabla^2 \mathbf{B}_i = 0 \quad (7)$$

$$\nabla^2 B_{0i} = 0 \quad (8)$$

ここで、 ∇^2 は軸対称問題における球座標系ラプラシアンであり、次式のように表される。

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \right\} \quad (9)$$

変数変換 $\mu = \cos \theta$ を用いて、支配方程式(7), (8)を解くことにより、本問題の積層中空半球に対する B_{ri} , $B_{\theta i}$ および B_{0i} が次式のように得られる。

$$B_{ri} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{4n+3} C_{1ni} r^{2n+1} + \frac{2n}{4n-1} C_{2ni} r^{-2n} \right) P_{2n}(\mu) \quad (10)$$

$$B_{\theta i} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n+3} C_{1ni} r^{2n+1} - \frac{1}{4n-1} C_{2ni} r^{-2n} \right) \sqrt{1-\mu^2} \frac{dP_{2n}(\mu)}{d\mu} \quad (11)$$

$$B_{0i} = \sum_{n=0}^{\infty} (C_{3ni} r^{2n} + C_{4ni} r^{-2n-1}) P_{2n}(\mu) \quad (12)$$

ただし、 C_{1ni} , C_{2ni} , C_{3ni} , C_{4ni} は未知係数、 $P_{2n}(\mu)$ は $2n$ 次の第一種ルジャンドル関数である。式(10)~(12)を式(6)に代入することにより、第 i 層の半径方向の変位 u_{ri} および子午線方向の変位 $u_{\theta i}$ は次式のように表される。

$$u_{ri} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{2(2n+1)(1-n-2\nu_{ei})}{4n+3} C_{1ni} r^{2n+1} + \frac{2n(2n+3-4\nu_{ei})}{4n-1} C_{2ni} r^{-2n} - 2nC_{3ni} r^{2n-1} + (2n+1)C_{4ni} r^{-2n-2} \right\} P_{2n}(\mu) \quad (13)$$

$$u_{\theta i} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2n+5-4\nu_{ei}}{4n+3} C_{1ni} r^{2n+1} + \frac{2(n-2+2\nu_{ei})}{4n-1} C_{2ni} r^{-2n} + C_{3ni} r^{2n-1} + C_{4ni} r^{-2n-2} \right\} \sqrt{1-\mu^2} \frac{dP_{2n}(\mu)}{d\mu} \quad (14)$$

第 i 層の応力成分は変位とひずみの関係式、フックの法則により次式のように導出できる。

$$\sigma_{rr} = 4G_{ei} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_{1ni} C_{1ni} r^{2n} + A_{2ni} C_{2ni} r^{-2n-1} - n(2n-1)C_{3ni} r^{2n-2} - (n+1)(2n+1)C_{4ni} r^{-2n-3} \right\} P_{2n}(\mu) \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} = 2G_{ei} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_{3ni} C_{1ni} r^{2n} + A_{4ni} C_{2ni} r^{-2n-1} - 2nC_{3ni} r^{2n-2} + (2n+1)C_{4ni} r^{-2n-3} \right\} P_{2n}(\mu) \\ - 2G_{ei} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2n+5-4\nu_{ei}}{4n+3} C_{1ni} r^{2n} + \frac{2(n-2+2\nu_{ei})}{4n-1} C_{2ni} r^{-2n-1} - C_{3ni} r^{2n-2} - C_{4ni} r^{-2n-3} \right\} \mu \frac{dP_{2n}(\mu)}{d\mu} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\phi\phi} = 2G_{ei} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_{5ni} C_{1ni} r^{2n} + A_{6ni} C_{2ni} r^{-2n-1} - 2nC_{3ni} r^{2n-2} + (2n+1)C_{4ni} r^{-2n-3} \right\} P_{2n}(\mu) \\ + 2G_{ei} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2n+5-4\nu_{ei}}{4n+3} C_{1ni} r^{2n} + \frac{2(n-2+2\nu_{ei})}{4n-1} C_{2ni} r^{-2n-1} + C_{3ni} r^{2n-2} + C_{4ni} r^{-2n-3} \right\} \mu \frac{dP_{2n}(\mu)}{d\mu} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta} = 2G_{ei} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{4n^2+4n-1+2\nu_{ei}}{4n+3} C_{1ni} r^{2n} - \frac{2(2n^2-1+\nu_{ei})}{4n-1} C_{2ni} r^{-2n-1} \right. \\ \left. + n(2n-1)C_{3ni} r^{2n-2} - 2(n+1)C_{4ni} r^{-2n-3} \right\} \sqrt{1-\mu^2} \frac{dP_{2n}(\mu)}{d\mu} \end{aligned} \quad (18)$$

ここで、 G_{ei} は第 i 層の横弾性係数である。また、 A_{1ni} , A_{2ni} , A_{3ni} , A_{4ni} , A_{5ni} , A_{6ni} を次式に示す。

$$\left. \begin{aligned} A_{1ni} &= \frac{2n+1}{(4n+3)(1-2\nu_{ei})} \{ n\nu_{ei}(2n+5-4\nu_{ei}) - (n-1+2\nu_{ei})(2n-2\nu_{ei}+1+\nu_{ei}) \} \\ A_{2ni} &= \frac{2n}{(4n-1)(1-2\nu_{ei})} \{ \nu_{ei}(2n+1)(n-2+2\nu_{ei}) - (n-n\nu_{ei}-\nu_{ei})(2n+3-4\nu_{ei}) \} \\ A_{3ni} &= \frac{2(2n+1)}{(4n+3)(1-2\nu_{ei})} \{ n(2n+5-4\nu_{ei})(1-\nu_{ei}) - (2n\nu_{ei}+\nu_{ei}+1)(n-1+2\nu_{ei}) \} \\ A_{4ni} &= \frac{2n}{(4n-1)(1-2\nu_{ei})} \{ 2(2n+1)(n-2+2\nu_{ei})(1-\nu_{ei}) - (2n+3-4\nu_{ei})(2n\nu_{ei}-1) \} \\ A_{5ni} &= \frac{2(2n+1)(n+4n\nu_{ei}+\nu_{ei}+1)}{4n+3}, \quad A_{6ni} = \frac{2n(1-2n\nu_{ei})(2n+3-4n\nu_{ei})+4n\nu_{ei}(2n+1)(n-2+2\nu_{ei})}{(4n-1)(1-2\nu_{ei})} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

4・2 粘弾性体と多層弾性体からなる m 層の積層中空半球の応力解析 粘弾性ポアソン比は時間に依存しないとすると⁽³⁾、第1層のクリープ変位、粘弾性応力は、弾性・粘弾性対応原理により前述の第1層に対する弾性解

の横弾性係数 G_{el} を $s\bar{\mu}_r(s)$ に置換して次式のように得られる。

$$\bar{u}_{r1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{2(2n+1)(1-n-2\nu_{el})}{4n+3} \bar{C}_{1n1} r^{2n+1} + \frac{2n(2n+3-4\nu_{el})}{4n-1} \bar{C}_{2n1} r^{2n} - 2n\bar{C}_{3n1} r^{2n-1} + (2n+1)\bar{C}_{4n1} r^{2n-2} \right\} P_{2n}(\mu) \quad (20)$$

$$\bar{u}_{\theta1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2n+5-4\nu_{el}}{4n+3} \bar{C}_{1n1} r^{2n+1} + \frac{2(n-2+2\nu_{el})}{4n-1} \bar{C}_{2n1} r^{2n} + \bar{C}_{3n1} r^{2n-1} + \bar{C}_{4n1} r^{2n-2} \right\} \sqrt{1-\mu^2} \frac{dP_{2n}(\mu)}{d\mu} \quad (21)$$

$$\bar{\sigma}_{rr1} = 4s\bar{\mu}_r \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_{1n1} \bar{C}_{1n1} r^{2n} + A_{2n1} \bar{C}_{2n1} r^{2n-1} - n(2n-1)\bar{C}_{3n1} r^{2n-2} - (n+1)(2n+1)\bar{C}_{4n1} r^{2n-3} \right\} P_{2n}(\mu) \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{\theta\theta1} = 2s\bar{\mu}_r \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_{3n1} \bar{C}_{1n1} r^{2n} + A_{4n1} \bar{C}_{2n1} r^{2n-1} - 2n\bar{C}_{3n1} r^{2n-2} + (2n+1)\bar{C}_{4n1} r^{2n-3} \right\} P_{2n}(\mu) \\ - 2s\bar{\mu}_r \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2n+5-4\nu_{el}}{4n+3} \bar{C}_{1n1} r^{2n} + \frac{2(n-2+2\nu_{el})}{4n-1} \bar{C}_{2n1} r^{2n-1} - \bar{C}_{3n1} r^{2n-2} - \bar{C}_{4n1} r^{2n-3} \right\} \mu \frac{dP_{2n}(\mu)}{d\mu} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{\phi\phi1} = 2s\bar{\mu}_r \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_{5n1} \bar{C}_{1n1} r^{2n} + A_{6n1} \bar{C}_{2n1} r^{2n-1} - 2n\bar{C}_{3n1} r^{2n-2} + (2n+1)\bar{C}_{4n1} r^{2n-3} \right\} P_{2n}(\mu) \\ + 2s\bar{\mu}_r \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2n+5-4\nu_{el}}{4n+3} \bar{C}_{1n1} r^{2n} + \frac{2(n-2+2\nu_{el})}{4n-1} \bar{C}_{2n1} r^{2n-1} + \bar{C}_{3n1} r^{2n-2} + \bar{C}_{4n1} r^{2n-3} \right\} \mu \frac{dP_{2n}(\mu)}{d\mu} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{r\theta1} = 2s\bar{\mu}_r \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{4n^2+4n-1+2\nu_{el}}{4n+3} \bar{C}_{1n1} r^{2n} - \frac{2(2n^2-1+\nu_{el})}{4n-1} \bar{C}_{2n1} r^{2n-1} \right. \\ \left. + n(2n-1)\bar{C}_{3n1} r^{2n-2} - 2(n+1)\bar{C}_{4n1} r^{2n-3} \right\} \sqrt{1-\mu^2} \frac{dP_{2n}(\mu)}{d\mu} \end{aligned} \quad (25)$$

また、第2層から第 m 層までの弾性体の変位、応力の解にラプラス変換を施し、次式のラプラス変換された式(1)の境界条件、連続条件より、未知定数 $\bar{C}_{1ni}$, $\bar{C}_{2ni}$, $\bar{C}_{3ni}$, $\bar{C}_{4ni}$ に関する連立一次方程式を導く。ただし、底面における境界条件は、ルジャンドル関数の次数の選択により恒等的に満足されている。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_{rr1} &= \bar{f}(\mu, s), \quad \bar{\sigma}_{r\theta1} = 0 \quad (r=r_1) \\ \bar{\sigma}_{rm} &= 0, \quad \bar{\sigma}_{r\theta m} = 0 \quad (r=r_{m+1}) \\ \bar{\sigma}_{\theta r1} &= 0, \quad \bar{u}_{\theta1} = 0 \quad (\mu=0) \\ \bar{\sigma}_{ri} &= \bar{\sigma}_{ri+1}, \quad \bar{\sigma}_{r\theta i} = \bar{\sigma}_{r\theta i+1} \quad (r=r_{i+1}, i=1, 2, \dots, m-1) \\ \bar{u}_{ri} &= \bar{u}_{ri+1}, \quad \bar{u}_{\theta i} = \bar{u}_{\theta i+1} \quad (r=r_{i+1}, i=1, 2, \dots, m-1) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

ここで、ラプラス変換解には、パラメータ s が含まれているため、連立一次方程式を数値的に解くことができない。そこで、パラメータ s に特定の値を設定して、連立一次方程式を解き、以下に示す細野の方法⁽¹⁾⁽²⁾を用いて数値ラプラス逆変換を行い、設定したパラメータ s に対応する特定の時間における変位、応力を求める。ここで、ラプラス変換パラメータ s を次式のようにおく。

$$s = \frac{\gamma_1 + j(k-0.5)\pi}{t} \quad (k=1, 2, \dots) \quad (27)$$

ただし、 γ_1 は任意の定数、 j は虚数単位である。式(27)を用いて、特定のパラメータ s に対して複素係数の連立一次方程式を解き、未知係数 $\bar{C}_{1ni}$, $\bar{C}_{2ni}$, $\bar{C}_{3ni}$, $\bar{C}_{4ni}$ を求める。 $\sigma_{\theta\theta i}$ の計算において、その求めた未知係数

を、第1層の場合は式(23)に、第2層から第 m 層の場合は式(16)に代入し、次式の Q_k を求める。

$$Q_k = (-1)^k \operatorname{Im} \left[\bar{\sigma}_{\theta\theta i} \left(\frac{\gamma_1 + j(k-0.5)\pi}{t} \right) \right] \quad (28)$$

式(28)を次式に代入すると、第 i 層の子午線方向の応力 $\sigma_{\theta\theta i}$ を求めることができる。

$$\sigma_{\theta\theta i}(t) = \frac{\exp(\gamma_1)}{t} \left(\sum_{k=1}^{p-1} Q_k + \frac{1}{2} \sum_{\xi=0}^{\lambda} D_{\lambda, \xi} Q_{p+\xi} \right) \quad (29)$$

ただし、 p, λ は任意の自然数である。式(29)の右辺括弧内の第二項は、 $\lambda=6$ の場合、次式のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{\lambda+1}} \sum_{\xi=0}^{\lambda} D_{\lambda, \xi} Q_{p+\xi} = \frac{1}{2^7} (127Q_p + 120Q_{p+1} + 99Q_{p+2} \\ + 64Q_{p+3} + 29Q_{p+4} + 8Q_{p+5} + Q_{p+6}) \end{aligned} \quad (30)$$

また、 u_{ri} , $u_{\theta i}$, σ_{ri} , $\sigma_{\phi\phi i}$, $\sigma_{r\theta i}$ も同様に求めることができる。

5. 数値計算

粘弾性体と多層弾性体からなる m 層の積層中空半球の変位、応力の数値計算の対象として、IBBC (界面バイオアクティブ骨セメント) 法⁽⁴⁾によって固定された UHMWPE 人工股関節臼蓋を取り扱う。この積層中空半球は、UHMWPE と4層の弾性体 (PMMA 骨セメント層, PMMA 骨セメントと HAp の混合層, HAp と海綿骨の混合層, 海綿骨層) からなる。UHMWPE の内

外半径を $r_a(=r_1)$, $r_b(=r_2)$, 海綿骨層の内外半径を r_c , $r_f(=r_{m+1})$ とする. 図 2 に各層の半径と, 半径方向の各組成の体積分率分布 V_f を示す. 半径 r_b から r_e までは, IBBC 法による UHMWPE 人工臼蓋と海綿骨の接合部である. 半径 $r_c \sim r_d$, $r_d \sim r_e$ の不均質層の材料組成の体積分率はそれぞれ線形的に傾斜しているものとする.

Fig. 2 Radial volume fraction distribution in acetabular cup

5・1 UHMWPE の粘弾性特性 UHMWPE の応力緩和関数は応力緩和試験により決定され, 一般的に次式の prony 級数で表される⁽⁹⁾.

$$\mu_r(t) = \mu_e + \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \exp(-t/t_i) \quad (31)$$

ここで, μ_e , μ_i は応力緩和係数, t_i は緩和時間である. 式(31)の第二項の無限級数の和を第 L 項までの和で近似する. 桜本ら⁽⁶⁾の実験により得られた応力緩和曲線を式(31)の関数を用いてカーブフィッティングし, $L=1$, $\mu_e=135$ MPa, $\mu_1=105$ MPa, $t_1=13.7$ sec と算出した. また, UHMWPE のポアソン比 ν_{el} は 0.46 とする.

5・2 負荷設定 骨頭には体重により負荷がかかり, その反作用により臼蓋内表面に負荷がかかる. 臼蓋内表面において $\theta=0^\circ$ から $\theta=\theta_0$ まで負荷がかかるものとし, 時間に対して一定の負荷を想定して, 負荷分布 $f(\theta, t)$ を次式のように与える.

$$f(\theta, t) = g(\theta)H(t) \quad (32)$$

ここで, $H(t)$ はヘビサイドのステップ関数である. 子午線方向の負荷分布 $g(\theta)$ に cosine 関数を用い⁽⁷⁾, $g(\theta)$ を次式のように与える.

$$g(\theta) = \frac{g_0(\cos \theta - \cos \theta_0)}{1 - \cos \theta_0} H(\theta_0 - \theta) \quad (33)$$

ここで, g_0 は負荷中心 ($\theta=0^\circ$) の負荷である. また, 臼蓋内表面の $0 \leq \theta \leq \theta_0$ の全領域にわたって, F [N] の力がかかるとし, g_0 を次式より算出する.

$$F = \int_0^{\theta_0} \cos \theta \cdot g(\theta) \cdot (2\pi r_a \sin \theta) r_a d\theta \quad (34)$$

また, 両脚立位した場合, 全体重の 1/3 が各股関節に加わるとする⁽⁸⁾. 負荷設定として体重 60 kg の人が両足立ちした場合を想定し, $F=200$ N とする.

5・3 数値計算諸元 PMMA 骨セメント, HAp, 海綿骨のヤング率をそれぞれ 2 GPa, 90 GPa, 0.1 GPa とし, ポアソン比を全て 0.3 とする. また, 半径 $r_c \sim r_d$ と $r_d \sim r_e$ の不均質層をそれぞれ 4 個の相異なる均質層に等分割し, 第 3 層から第 10 層までの HAp の体積分率を内側から 0.125, 0.375, 0.625, 0.875, 0.875, 0.625, 0.375, 0.125 とする. 各層の物性値は体積分率をもとに線形複合則により算出する. また, UHMWPE の厚さが 10 mm 以下では摩耗速度が大きき⁽⁹⁾, 6 mm 以下では衝撃吸収性が損なわれるという報告がある⁽¹⁰⁾. しかし, 日本人の臼蓋は比較的小さく, UHMWPE をあまりに厚くすると, 骨盤(海綿骨)を極端にリーミングする必要がある. そこで, まず UHMWPE の厚さが 10 mm 以下の場合を考え, 次に, その厚さがクリープ変形, 応力に及ぼす影響を明らかにするため, 接合層 $r_b \sim r_e$ の厚さを変えずに UHMWPE 層の厚さを変えて計算を行う.

ここで, 次の無次元量を導入する.

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{r}{r_a}, \tau = \frac{t}{t_1}, \bar{u}_r = \frac{u_r}{r_a}, \bar{\sigma}_{\theta\theta} = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{\mu_e} \\ \rho_b &= \frac{r_b}{r_a}, \rho_c = \frac{r_c}{r_a}, \rho_d = \frac{r_d}{r_a}, \rho_e = \frac{r_e}{r_a}, \rho_f = \frac{r_f}{r_a} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

数値計算諸元を以下のように定める.

$$\left. \begin{aligned} \rho_b &= 1.83, 1.87, 2.04, 2.39, \rho_f = 3.65 \\ \rho_c - \rho_b &= 0.348, \rho_d - \rho_c = 0.0435 \\ \rho_e - \rho_d &= 0.0435, \theta_0 = 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

導出した変位, 応力の解析解の無限級数の和を, 第 N 項までの和で近似する. 細野の方法によりラプラス逆変換された変位, 応力の精度に影響するパラメータのなかで式(27)～式(29)の γ_1, λ をそれぞれ $\gamma_1=6, \lambda=6$ とし, 無限級数の項数 N とラプラス逆変換式(29)における項数 p をそれぞれ $N=50, p=1000$ として得られた $\sigma_{\theta\theta 1}$ を基準解とした. 実際には, $\gamma_1=6, \lambda=6, N=20, p=100$ を採用したが, この場合の $\sigma_{\theta\theta 1}$ の基準解 $\sigma_{\theta\theta 1}$ との相対誤差は 2% 以下であった.

6. 数値計算結果と考察

6・1 粘弾性解と弾性解の比較 UHMWPE を粘弾性体とした場合と弾性体とした場合の変位, 応力の比較を行う. 図 3 に負荷中心における $\bar{u}_r$ の時間変化を示す. 負荷初期においてクリープ変形は急激に進行し, その後, 時間とともにある値に漸近する. $\tau=15$ において, クリープ変形はほとんど進行せず, $\tau=15$ における変位は UHMWPE を弾性体とした場合に比べ約 1.5 倍の大きさである. 図 4, 5 にそれぞれ臼蓋内表面における $\bar{u}_r, \bar{\sigma}_{\theta\theta}$ を示す. 図 4 より, $\bar{u}_r$ の時間変化は

負荷中心($\theta = 0^\circ$)において最も顕著であり、負荷中心から離れるにつれて小さくなる。無負荷の領域($75^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$)において $\bar{u}_r$ の時間変化はほとんどみられない。図5より、 $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ は時間にかかわらず頂点付近では圧縮応力、底面付近では引張応力が生じている。最大圧縮応力は負荷中心において生じ、最大引張応力は $\theta = \theta_0$ 付近において生じる。 $\bar{u}_r$ の時間変化は無負荷領域において見られないが、 $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ の時間変化は全領域にわたってみられ、時間とともに頂点付近において圧縮応力が大きくなり、底面付近において引張応力が小さくなる。

6・2 負荷領域の影響 図6に臼蓋内表面の $\tau = 15$ における $\bar{u}_r$ を示す。負荷領域が狭くなると、頂点近傍と $\theta = \theta_0$ における変位は大きくなり、底面近傍における変位はほぼ変わらない。Teoh らの研究⁽¹¹⁾により、臼蓋と骨頭のクリアランスが 0 mm に近い場合と、0.5 mm 以上のあまりに大きい場合は激しい摩耗を生じ、摩耗量の最も少ない理想的なクリアランスの範囲は 0.05 mm から 0.15 mm までであることが報告されている。一般的に、人工臼蓋の内半径は 10 mm から 16 mm

程度であるため、臼蓋内表面の $\theta = 90^\circ$ において、半径方向の変位は、理想的なクリアランスと比較して小さいことがわかる。しかし、負荷中心付近において外側に変位し、底面付近において内側に変位するため、クリアランスの小さくなる領域が広がる。よって、変形が摩耗量の増加に影響を及ぼし得ると考えられる。図7に臼蓋内表面の $\tau = 15$ における $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ を示す。負荷

Fig. 5 Meridian stress distributions on the hemispherical inner surface for $\rho_b = 1.83$, $\theta_0 = 75^\circ$

Fig. 3 Variation of radial displacement with time for $\rho_b = 1.83$, $\theta_0 = 75^\circ$

Fig. 6 Radial displacement distributions on the hemispherical inner surface for $\rho_b = 1.83$

Fig. 4 Radial displacement distributions on the hemispherical inner surface for $\rho_b = 1.83$, $\theta_0 = 75^\circ$

Fig. 7 Meridian stress distributions on the hemispherical inner surface for $\rho_b = 1.83$

領域が狭くなると、 $\theta = 0^\circ$ と $\theta = \theta_0$ 近傍に発生する最大圧縮応力、最大引張応力がともに大きくなる。

6・3 UHMWPE の厚さの影響 図8に負荷中心 $\theta = 0^\circ$ の $\tau = 15$ における $\bar{u}_r$ を示す。 ρ_b が大きくなる (UHMWPE 層が厚くなる) と、UHMWPE 層の変位も大きくなるが、 $\rho \geq \rho_b$ の接合層や海綿骨の変位はほぼ変わらない。図9に $\theta = 0^\circ$ の $\tau = 15$ における $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ を示す。UHMWPE 層において圧縮応力が生じ、HAp と海綿骨の混合層において大きな引張応力が生じる。 ρ_b が大きいほど UHMWPE に生じる圧縮応力は小さくなり、また、HAp と海綿骨の混合層に生じる最大引張応力も小さくなる。

Fig. 8 Radial displacement distributions on $\theta = 0^\circ$ for $\theta_0 = 75^\circ$

Fig. 9 Meridian stress distributions on $\theta = 0^\circ$ for $\theta_0 = 75^\circ$

7. 結 言

粘弾性体と不均質弾性体 (多層弾性体) からなる m 層の積層中空半球の内面に軸対称負荷を受ける場合の変位と応力を、ラプラス像空間における粘弾性解と同一問題の弾性解の間に存在する対応原理に基づいて解析した。弾性問題の解析解を Papkovitch-Neuber の変位

関数を用いて導出し、対応原理によりラプラス像空間における粘弾性解を表現し、そのラプラス変換解に対して細野の方法による数値ラプラス逆変換を行い、所要の変位、応力を求めた。数値計算例として、UHMWPE 人工股関節臼蓋を模擬した積層中空半球の軸対称問題を対象とし、臼蓋内表面の負荷分布が UHMWPE 内表面のクリープ変形、応力分布に及ぼす影響、および粘弾性層の厚さが、人工股関節臼蓋の変位、応力分布に及ぼす影響を定量的に明らかにした。

変位は負荷領域において時間とともに大きくなるが、負荷中心におけるクリープ変形が最も顕著に大きくなる。応力は全領域にわたって時間とともに変化し、頂点付近において圧縮応力が大きくなり、底面付近において引張応力が小さくなる。また、臼蓋内表面の $\theta = 90^\circ$ における変位は、理想的なクリアランス⁽¹⁾と比較して小さいが、人工臼蓋は負荷中心付近において外側に変位し、底面付近において内側に変位するため、クリアランスの小さくなる領域が広がる。よって、クリープが摩耗量の増加に影響を及ぼし得ると考えられる。また、UHMWPE 層の厚さを大きくすると、UHMWPE 層に生じる圧縮応力と、HAp と海綿骨の混合層に生じる最大引張応力をともに下げることができる。

文 献

- (1) Arai, M. and Adachi, T., Application of Numerical Laplace Inversion for the Elastodynamic BEM Analysis, *Transactions of the Japan Society for Computational Methods in Engineering*, Vol.1 (2001), pp. 49-54 (in Japanese).
- (2) Hosono, T., Numerical Inversion of Laplace Transform, *The Transactions of the Institute of Electrical Engineers of Japan, Series A*, Vol.99, No.10 (1979), pp. 494-500 (in Japanese).
- (3) Jianlin, W. and Bjorn, B., A Time Domain Boundary Element Method for Modeling the Quasi-Static Viscoelastic Behavior of Asphalt Pavements, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol.31, No.3 (2007), pp. 226-240.
- (4) Fujita, H., Oonishi, H., Ito, S., Kim, S.C. and Doukawa, H., Radiological Evaluation of the Femoral Component Fixed with Interface Bioactive Bone Cement in Revision Total Hip Arthroplasty, *The Journal of Arthroplasty*, Vol.23, No.5 (2008), pp. 689-693.
- (5) Steven, M.K., *The UHMWPE Handbook*, (2004), p. 322, Elsevier Academic Press.
- (6) Sakuramoto, I., Tsuchida, T., Kuramoto, K. and Kawano, S., Mechanical Property and Constitutive Equation of Ultra High Molecular Weight Polyethylene, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.65, No.629 (1999), pp. 80-86 (in Japanese).

- (7) Ipavec, M., Brand, R.A., Mavčič, B., Kralj-Iglič, V. and Iglič, A., Mathematical Modelling of Stress in the Hip during Gait, *Jornal of Biomechanics*, Vol.32, No.11 (1999), pp. 1229-1235.
- (8) Ochi, T., Kikuchi, S. and Ryu, Z., Outpatient Clinic in Hip Joint, (1998), p. 9, MEDICAL VIEW (in Japanese).
- (9) Ishii, Y., Matsuno, T. and Sakamaki, T., Surgery of Hip Joint, (1998), p. 382, IGAKU-SHOIN (in Japanese).
- (10) Fujiki, H., Ishikawa, H. and Yasuda, K., The Effects of Thickness and Fixation of Ultra-High-Molecular-Weight Polyethylene and of Trancion on Wear Behavior in Artificial Knee Joint, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.60, No.576 (1994), pp. 1871-1877 (in Japanese).
- (11) Teoh, S.H., Chan, W.H. and Thampuran, R., An Elasto-Plastic Finite Element Model for Polyethylene Wear in Total Hip Arthroplasty, *Journal of Biomechanics*, Vol.35, No.3 (2002), pp. 323-330.