波型断面を有する薄板梁の曲げ崩壊*

陳 玳 珩^{*1}, 増 田 健 一^{*2}

Bending Collapse of Thin Plate with Corrugated Cross-Section

Dai-heng CHEN^{*3} and Kenichi MASUDA^{*3} Department of Mechanical Engineering, Tokyo University of Science,
1-3 Kagurazaka, Shinjuku-ku, Tokyo, 162-8601 Japan

In this paper, the collapse behaviors of thin plate with corrugated cross-section subjected to three-point bending are studied by using the finite element method. In order to estimate the energy-absorption characteristics of the beam, it is vital to understand the relation of load and displacement. It is found that the load decreases by flattening of the cross-section of the beam, and the flattening shape can be quantitatively expressed by using curvature radius of the plane of the top and bottom in the cross-section. Based on an idea that the external work is mainly expended by the flattening deformation of the cross-section, a new prediction method is proposed for estimating the relation of load and displacement. Its validity is verified by comparing with the numerical results by FEM under various conditions.

Key Words: Bending, Corrugated Thin Plate, Collapse, Flattening, Plasticity, FEM

1. 結 言

交通事故が起こった際に乗員の損傷や車両の破損を防ぐものとしてガードレールがある。その性能は衝突時に防護柵が受けるエネルギーの大きさを基準としており⁽¹⁾, 設計を行う上では衝撃に対する強度が重要である。そして, ガードレールの特長である衝突エネルギーの吸収能力, また性能の基準となっている衝撃に対する強度は, その断面の波型による要因が大きい。

I字型, V字型, コの字型の断面を有する開断面薄肉梁の曲げ崩壊に関する研究^{(2)~(4)}や円形, 矩形の断面を有する閉断面薄肉梁の曲げ崩壊に関する研究^{(5)~(8)}では塑性ヒンジに基づく変形メカニズムによって解析されているが, これらの手法は波型断面の有する複雑な形状への適用は困難である。

そこで本研究では, ガードレールのような波形断面を有する梁が様々な荷重を受ける際の崩壊メカニズム・荷重変位線図・エネルギー吸収性能を把握し, 設計に指針を与え設計の高効率化に貢献することを目的とする。具体的には, 低速度衝突(15km/h)の場合, 衝撃荷重と準静的な荷重はほぼ一致すること⁽⁹⁾, 衝撃荷重を評価するときに静的項と動的項を足し合わせて

評価する手法が一般的に用いられていること⁽¹⁰⁾から, このような衝撃問題を解明するための第一歩として, まず, 静的問題の解明が重要であると考え, 波型断面を有する薄板梁三点曲げの静解析有限要素法による数値シミュレーション解析によって行い, 崩壊メカニズムを把握した上で, 荷重変位線図の提案式の確立を目指す。

なお, 曲げ崩壊に関するFEM解析結果の有効性の検証として著者ら⁽¹¹⁾は先に, アルミニウム合金材を用いて円筒の純曲げ実験を行ったKyriakidesら⁽¹²⁾の研究に対して, 有限要素法による円筒曲げの数値シミュレーション解析を行い, Kyriakidesらの実験結果との比較によって数値解析手法の有効性を確認している。

2. 解 析 方 法

日本道路協会が定めるガードレールの幾何寸法を簡略化し, 図1に示すような波形断面を有する肉厚 t , 長さ L の薄板梁を考える。ただし, 本研究では, 日本道路協会が定めるガードレールの仕様に合わせて $L=2000\text{mm}$ で固定し, 肉厚 t は2.3mm, 3.2mm, 4.0mmの3種類について検討を行う。有限要素法汎用ソフトMSC.Marcを用いて, 図1に示すように, 両端で単純支持される梁(左端における横断面のDE部分(図1(b)参照)は軸方向および y 方向の変位拘束, 右端における横断面のDE部分は y 方向の変位拘束)に対して,

* 原稿受付 2010年6月22日。

^{*1} 正員, フェロー, 東京理科大学工学部(〒162-8601 東京都新宿区神楽坂1-3)。^{*2} 正員, 東京理科大学工学部。

E-mail: chend@rs.kagu.tus.ac.jp

左端からの距離 a に位置する直径 $D=20\text{mm}$ の移動剛体柱を垂直に接触させることにより静的载荷シミュレーションを行う。また、梁と剛体柱との間の摩擦は考慮しない。

材料モデルに関しては、等方・均質な弾塑性材料とし、塑性降伏条件としてミーゼスの降伏条件を用いて、三点曲げに伴う大変形解析を行う。応力-ひずみ関係は縦弾性係数 E 、降伏応力 σ_y の弾完全塑性材を用い、本研究では、実際にガードレールとして使用されている SS400 材を想定し、 $E=206\text{ GPa}$ 、 $\sigma_y=245\text{ MPa}$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$ とする。

非線形挙動の定式化としてアップデテッドラグランジュ法を用いて大変形挙動を考慮し、平衡方程式を満たすための修正計算法としてニュートン・ラプソン法を採用している。モデル化に際しては、変形が滑らかに生じるように、図 1(b) の AB, GH 部分は 5 等分割、CD, DE, EF 部分は 6 等分割、BC, FG 部分は 7 等分割とし、各要素の軸方向長さは剛体柱と接触する付近は 2.5mm 、それ以外は 5mm とした四辺形双一次厚肉シェル要素を用いて有限要素離散化している。

Fig. 1 Geometric property and loading condition for guardrail

3. 解析結果および検討

3.1 崩壊変形のメカニズム 図 2 には、剛体柱の左端からの距離 $a=L/2$ 、肉厚 $t=4.0\text{mm}$ において、剛体柱が梁に接触してからの移動量 δ と剛体柱が受ける荷重 P との関係を示す。この図からわかるように、

まず、移動量 δ の増加とともに荷重は増加しピーク荷重 P_{cr} に達する。そして、ピーク荷重 P_{cr} に達した後は、移動量 δ の増加とともに荷重は減少していき崩壊に至る。

ガードレールのエネルギー吸収量を算定するには、荷重変位関係を求めることが重要である。図 2 からわかるように、ピーク荷重に達するまでの変位量は小さいため、エネルギー吸収量を算定するには、特にピーク荷重後の荷重変位関係は重要である。しかし、これまで提案されている曲げ崩壊後の荷重変位関係の予測法として用いられていた塑性ヒンジによる崩壊変形メカニズムの手法は、本研究で扱う波形断面を有する比較的厚肉（厚さと断面の直線的な辺の長さの比が約 0.025 以上）の断面形状には適用できない。例えば、図 3 には正方形角筒の純曲げ崩壊時の 2 分の 1 モデルを示し、Wierzbicki ら⁽⁶⁾が提案する塑性ヒンジが生じる位置を太い実線で示している。正方形角筒のフランジ幅は 60mm 、肉厚は 0.6mm である。これに対して図 4 には図 2 で用いた梁の 2 分の 1 モデルの変形様子と相当塑性ひずみのコンター図を示す。図には、相当塑性ひずみが大きいほど白色で示し、また、図 1(b) の断面図との対応がわかるように $X=a$ の位置での断面上の点 E, F, G を丸いマーク○で示している。この図からわかるように、本研究で扱う波形断面を有する比較的厚肉梁の曲げ崩壊時の変形様子は、Wierzbicki ら⁽⁶⁾が提案するような圧縮側の局所的な部分に塑性ヒンジが生じ、その塑性ヒンジの回転によって変形が進行していくのではなく、移動量 δ の増加に伴い塑性変形の領域は梁長さ方向に沿って広がり（白色の領域は広がり）、梁全体が変形していくため、その予測法の適用が困難である。そこで、本研究では新たな荷重変位関係の予測法の提案を試みる。

Fig. 2 Relation of P and δ with $a=L/2$ and $t=4.0\text{mm}$

図 5 には図 2 で用いたモデルに対して、荷重減少時

Fig. 3 Deformation of one half of a square column subjected to pure bending for flange width:60mm and thickness:0.6mm

Fig. 4 Deformation of one half of the beam shown in Fig.2 around $X=L/2$

にあたる $\delta=50\text{mm}$, 100mm , 150mm のときの $X=L/2$ の梁横断面の変形図を示す。図5中に示した水平線と面EFのなす角 θ の変化からもわかるように、変位量 δ の増加に伴い横断面の扁平は大きい。すなわち、ピーク荷重後の荷重降下は、梁横断面の扁平に原因がある。

Fig. 5 Deformed cross-section of the beam shown in Fig.2 at $X=L/2$

図5に基づいて、最大荷重後の梁の崩壊は、扁平に起因し、その扁平を図6(b)のようにモデル化する。すなわち、①各面の交角 β は変化しない；②斜面 AB, CD, EF, GH 部は変形せず回転移動するのみ；③上面 BC, FG と下面 DE 部はいずれも面内伸び変形がないが半径 R_1 の円弧のような曲げ変形を行う。

(a)Initial shape of cross-section

(b)Approximation of deformed shape

Fig. 6 Geometric property and proposal method of deformed cross-section

図6(b)によれば、上面と下面の円弧に対応する中心角 θ_1 は

$$\theta_1 = l_1/R_1 \quad (1)$$

また、斜面の傾く角度 θ は

$$\theta = \pi - \beta - \theta_1/2 \quad (2)$$

であり、上下面の変形に伴う角度 θ_1 の増加によって小さくなる。これによって、横断面の高さ h は

$$h = l_3 \sin \theta \quad (3)$$

のように、変形に伴い小さくなる。

以上のことからわかるように、ピーク荷重後、梁は変形とともに横断面に扁平が発生し、その扁平した断面の形状は横断面に生じる、図6(b)中の半径 R_1 という1つの形状パラメータによって表すことができる。したがって、崩壊後の梁の変位と荷重の関係を予測するためには、半径 R_1 の変化に伴う荷重および変位の変化を追跡すればよい。

まず、半径 R_1 に対応する荷重 P を求めてみる。このとき、ピーク荷重以後の変形過程において、最大モーメントが生じる場所（すなわち荷重が作用する点）の横断面において全断面塑性降伏であると考えられる。

このことは、図 7 から理解される。図 7 には図 2 で用いたモデル ($a=L/2$, $t=4.0\text{mm}$) において、ピーク荷重時 ($\delta=34\text{mm}$)、およびピーク荷重後にあたる $\delta=50\text{mm}$ のときの $X=L/2$ における軸方向応力分布を示す。ここで横軸の s は横断面の中心線 (図 1(b) 中の折れ線 ABCDEFGH) における点 A からの距離であり、 W は点 H における s の値である。また、縦軸は軸方向応力 σ_x を降伏応力 σ_s で除した値で示している。この図からわかるように、ピーク荷重時 ($\delta=34\text{mm}$)、およびピーク荷重後にあたる $\delta=50\text{mm}$ での軸方向応力分布は破線で示した全断面塑性の応力分布とほぼ一致している。

Fig. 7 Axial stress distribution of cross-section for two levels of δ at $X=L/2$

よって、荷重 P は、最大曲げモーメントが生じる点 $X=a$ における断面の上下面円弧の半径を R_1 とし、対応する荷重 P を R_1 の関数として次のように求めることができる。すなわち、ピーク荷重 P に対応する、最大モーメント M は次式から求まる。

$$M = \int_c \sigma_s |y - y_c| t ds \quad (4)$$

ここに $\int_c \dots ds$ は横断面の中心線 (図 1(b) 中の折れ線 ABCDEFGH) に沿う線積分である。また、 y_c は中立軸の y 座標であり、次式

$$\int_l (y - y_c) ds = 0 \quad (5)$$

を満たす。

M を求めれば、 P は次式

$$P = \frac{L}{a(L-a)} M \quad (6)$$

で計算される。

崩壊後の荷重変位曲線を予測するために、以上のように求めた荷重 P に対応する変位 δ を求めなければならない。そこで「外力による仕事=梁変形に伴うひずみエネルギーの増加」に基づき、式

$$P \cdot \Delta\delta = \Delta U \quad (7)$$

のように、各荷重 P に対応する変位の増分 $\Delta\delta$ を、変形に伴う梁のひずみエネルギーの増分 ΔU から求めてみる。

梁の曲げ変形において、外力による仕事は、梁軸方向繊維の伸び縮み変形による曲げひずみエネルギーの増加に費やされるが、それは荷重上昇の曲げ変形過程に発生するものである。最大荷重後の崩壊過程において、梁の変形は主に、荷重上昇過程に生じる曲げ変形とは異なる新しい変形モード (本研究モデルでは扁平のこと) となり、円筒や角筒の曲げ崩壊に関する他の研究^{(5)~(8)}と同様に、外力による仕事は、崩壊を引き起こす変形、すなわちここでの扁平変形に伴うひずみエネルギーの増加に費やされると考えられる。

以下、点 $X=a$ での半径が R_{1a} となるときの扁平変形に必要なひずみエネルギーを U とし、 U を求めるために、まず図 8 に示した高さ t 、長さ l_1 で梁の微小長さ dX 切片の扁平ひずみエネルギー UdX を、その切片の扁平半径 R_1 の関数として求めてみる。

Fig. 8 Bending deformation corresponding to flattening

横断面方向の曲げひずみエネルギーを計算するに当たって、弾性域と塑性域の判別を曲率半径 R_1 の大きさを用いて行う。つまり判別式は次式、

$$\begin{aligned} \frac{t/2}{R_1} &\leq \frac{\sigma_s}{E} & (\text{Elastic bending}) \\ \frac{t/2}{R_1} &> \frac{\sigma_s}{E} & (\text{Plastic bending}) \end{aligned} \quad (8)$$

を用いる。例えば、式 (8) に、 $t=4.0\text{mm}$ 、 $\sigma_s=245\text{MPa}$ 、 $E=206\text{GPa}$ を代入して整理すると、 $R_1=1.68\text{m}$ となり、それより R_1 が大きいと弾性、小さいと塑性と判別できる。

弾性の場合の扁平ひずみエネルギー UdX を求める。図 8 のように、 θ が $0 \rightarrow \theta_1$ に変化したときの幅 dX 部分のひずみエネルギー UdX は、

$$UdX = \int_0^{\theta_1} M d\theta \quad (9)$$

となる。ここで重要な関係として弾性域での曲げモーメント M の式、および円弧の中心角 θ_1 と曲率半径 R_1 との関係式は

$$M = \frac{Et^3}{12R_1} dX \quad (10)$$

$$\theta_1 = \frac{l_1}{R_1} \quad (11)$$

である。よって弾性の場合の扁平ひずみエネルギー UdX は

$$UdX = \frac{Et^3 l_1}{24R_1^2} dX \quad (12)$$

となる。

次に塑性域を含む場合の扁平ひずみエネルギー UdX を求める。弾性域での扁平ひずみエネルギーを $U_e dX$ 、塑性域での扁平ひずみエネルギーを $U_p dX$ と書くと、塑性域を含む場合の扁平ひずみエネルギー UdX は次式

$$UdX = U_e dX + U_p dX \quad (13)$$

である。弾性域と塑性域との境界になる半径を R_e とすると、式 (8) より R_e は次式

$$R_e = \frac{Et}{2\sigma_s} \quad (14)$$

を満たす。よって弾性域での扁平ひずみエネルギー $U_e dX$ は式 (12) より

$$U_e dX = \frac{Et^3 l_1}{24R_e^2} dX \quad (15)$$

となり、塑性域での扁平ひずみエネルギー $U_p dX$ は R_e のときの円弧のなす角を θ_e とすると

$$U_p dX = \int_{\theta_e}^{\theta_1} M d\theta \quad (16)$$

となる。塑性域での応力分布は簡単のため全断面塑性とすると、曲げモーメント M は

$$M = \frac{\sigma_s t^2}{4} dX \quad (17)$$

となるため、式 (16) を計算すると

$$U_p dX = \frac{l_1 \sigma_s t^2}{4} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_e} \right) dX \quad (18)$$

となる。よって塑性域を含む場合 θ が $0 \rightarrow \theta_1$ に変化したときの幅 dX 部分のひずみエネルギー UdX は

$$UdX = \frac{Et^3 l_1}{24R_e^2} dX + \frac{l_1 \sigma_s t^2}{4} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_e} \right) dX \quad (19)$$

となる。

以上のように、 UdX を R_1 の関数として求まった。次に梁全長にわたる、扁平ひずみエネルギー U を求めるためには、長さにおける半径 R_1 の分布を知る必要がある。そこで、本研究では、第1近似として、次式

$$\frac{1}{R_1} = \begin{cases} \frac{X}{a} \times \frac{1}{R_{1a}} & (X \leq a) \\ \frac{(L-X)}{(L-a)} \times \frac{1}{R_{1a}} & (X \geq a) \end{cases} \quad (20)$$

のように、曲率について最も簡単な線形的分布と仮定する。上の式を用いて、長さ方向に沿って積分すると、 U は次のようになる。

$$U = 3 \int_0^L UdX \quad (21)$$

ここで、係数の3は横断面の上面2枚、下面1枚の計3枚分のひずみエネルギーの合計を表す。そして、式 (21) は $R_e < R_{1a}$ の場合、次式

$$U = 3 \int_0^a UdX + 3 \int_a^L UdX \quad (22)$$

となる。右辺の UdX は式 (12) である。また、式 (21) は $R_e \geq R_{1a}$ の場合、次式

$$U = 3 \int_0^C UdX + 3 \int_C^a UdX + 3 \int_a^D UdX + 3 \int_D^L UdX \quad (23)$$

となる。ここで $C = \frac{aR_{1a}}{R_e}$ 、 $D = \frac{R_e L - R_{1a} L + R_{1a} a}{R_e}$ であり、右辺の第1項と第4項の UdX は式 (12)、第2項と第3項の UdX は式 (19) である。式 (20) を用いて式 (22)、式 (23) を計算すると、扁平ひずみエネルギー U は $R_e < R_{1a}$ の場合、次式

$$U = \frac{Et^3 l_1 L}{24R_{1a}^2} \quad (24)$$

となり、 $R_e \geq R_{1a}$ の場合、次式

$$U = \frac{3LR_{1a}l_1\sigma_s t^2}{4} \left(-\frac{1}{R_{1a}R_e} + \frac{1}{2(R_{1a})^2} + \frac{1}{2R_e^2} \right) + \frac{3LR_{1a}l_1Et^3}{24R_e^2} \left(\frac{1}{R_{1a}} - \frac{1}{R_e} \right) + \frac{LR_{1a}l_1Et^3}{24R_e^3} \quad (25)$$

を得る。

以上より、 R_{1a} に対応した荷重とひずみエネルギーが得られたので、式 (7) を用いて荷重と変位増分の対応式が得られる。次に、荷重と変位の関係式を得るために荷重と変位の初期値、すなわち梁崩壊変形の起点における荷重および変位を定める必要がある。

梁崩壊変形の起点における荷重はピーク荷重である。円筒や角筒の曲げ崩壊と同様に⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾ 横断面の扁平化によって荷重がピークに達することは、曲率の増加によるモーメントの増加率を扁平によるモーメントの減少率が上回ることに由来するものだと考えられる。ただしここでは簡単のために、荷重がピークに達するとき、①全断面塑性降伏になる (図7の $\delta=34\text{mm}$ の応力分布参照)、および② R_{1a} が R_e になる (塑性変形が始まることで剛性が低下し扁平が顕著になるため)、と仮定する。

表1には、 $a=L/2$ で3種類の肉厚 ($t=2.3\text{mm}$, 3.2mm , 4.0mm) のピーク荷重について、FEMの結果を2列目に示し、 $R_{1a}=R_{1e}$ として、式 (4)~式 (6) から求めたピーク荷重の値を3列目に示し、FEMの結果との誤差を4列目に示している。また、これまでの閉断面の最大荷重の解析と同様に^{(5)~(8)} ピーク時の横断面の形状変化を無視し、 $R_{1a}=\infty$ として、式 (4)~式 (6) から求めたピーク荷重の値を5列目に示し、FEMの結果

果との誤差を6列目に示している。この表からわかるように、扁平を考慮することでピーク荷重を精度良く予測できている。

Table 1 Comparison of P_{cr} between results of FEM, proposal method and existing method for three levels of t

t [mm]	P_{cr} (FEM)	Eq.(4)~(6) with $R_{la} = R_e$		Eq.(4)~(6) with $R_{la} = \infty$	
		P_{cr} (Proposal)	Error	P_{cr} (Existing)	Error
2.3	7.53	7.95	5.6	8.27	9.8
3.2	10.9	11.2	2.8	11.5	5.7
4.0	13.9	14.1	1.4	14.4	3.7

P_{cr} :[KN] Error:[%]

Fig. 9 Flow chart of proposal method for P- δ relation

なお、ピーク荷重が生じるまでの荷重 P と変位 δ の関係は弾性域内3点曲げの荷重 P と変位 δ の関係式

$$P = \frac{3EIL}{a^2(L-a)^2} \delta \quad (26)$$

を用いる。ここで I は中立軸に関する断面二次モーメントであり、弾性域の場合、今回のモデルでは図1(b)の $x-y$ 座標系において中立軸の位置 y_c は 30.4mm,

$t=4.0$ mm の場合、 $I = 6.42 \times 10^{-7} m^4$ となる。

以上のことをまとめると、崩壊変形における荷重と変位の関係は、図9に示すようなフローチャートで求まる。

(a) P- δ relation

(b) W- δ relation

Fig. 10 Comparison between result of FEM and proposal with $a=1000$ mm, $t=4.0$ mm

3.2 提案式とFEMの結果との比較 図10(a)は、 $a=L/2$ で肉厚 $t=4.0$ mm における荷重変位線図についてFEMの結果と提案式とを比較したものを示し、図10(b)には、同条件におけるエネルギー変位線図についてFEMの結果と提案式とを比較したものを示す。これらの図からわかるように、FEMの結果と提案式はよく一致している。また、図11(a)(b)には、 $a=L/2$ で肉厚 $t=2.3$ mm における荷重変位線図とエネルギー変位線図についてFEMの結果と提案式とを比較したものを示す。これらの図からわかるように、肉厚 $t=2.3$ mm の場合もFEMの結果と提案式はよく一致している。

(a) P - δ relation

(b) W - δ relation

Fig. 11 Comparison between result of FEM and proposal with $a=1000\text{mm}$, $t=2.3\text{mm}$

図 12(a) には、肉厚 $t=4.0\text{mm}$, $a=L/4$ における荷重変位線図について FEM の結果と提案式とを比較したものを示し、図 12(b) には、肉厚 $t=4.0\text{mm}$, $a=L/8$ における荷重変位線図について FEM の結果と提案式とを比較したものを示す。これらの図からわかるように、 $a=L/4$ の場合 FEM の結果と提案式とはある程度一致しているが、 $a=L/8$ の場合それは大きな誤差を生じている。このことは図 13 より理解できる。図 13 に肉厚 $t=4.0\text{mm}$, $a=L/8$ における左端付近での変形様子を示す。この図から、端部において横断面の圧潰という異なる崩壊モードが発生したことが確認でき、このことが提案式と FEM の結果が一致なくなる原因となる。以上より今回提案した予測式において荷重作用位置の適用範囲は $L/4 \sim 3L/4$ 付近と推測される。

(a) $a=L/4$

(b) $a=L/8$

Fig. 12 Comparison of P - δ relation between result of FEM and proposal with $t=4.0\text{mm}$

4. 結 言

本研究では、既存のガードレールをモデル化して有限要素法による弾塑性数値解析を行い、波を有する薄板の 3 点曲げの崩壊に関する検討を行った。その結果、以下の点が明らかになった。

- (1) ピーク荷重後の崩壊過程における荷重の降下は主に横断面の扁平によるものである。
- (2) 横断面の扁平は上下両辺での湾曲によって近似的に表され、これによって、横断面の扁平形状は湾曲を表す曲率半径 R_1 の変化によって定量的に表現できる。
- (3) 外力による仕事は、崩壊を引き起こす横断面の扁平変形に伴うひずみエネルギーの増加に費やされるということに基づいて、荷重変位関係の予測式を提案し、提案した予測式は FEM の結果と良く

Fig. 13 Deformed shapes of the beam shown in Fig.12(b) with $t=4.0\text{mm}$ and $a=L/8$

一致することが確認できた。

文 献

- (1) Japan Road Association, *Installation Standard and Comment of Safety Barrier(in Japanese)*, (2008), Maruzen.
- (2) Murray, N.W. and Khoo, P.S., Some basic plastic mechanisms in the local buckling of thin-walled steel structures, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol.23, No.12 (1981), pp.703-713.
- (3) Park, M.S. and Lee, B.C., Prediction of bending collapse behaviours of thin-walled open section beams, *Thin-Walled Structures*, Vol.25, No.3, (1996), pp.185-206.
- (4) Pastor, M.M and Roure, F., Open cross-section beams under pure bending II. Finite element simulation, *Thin-Walled Structures*, Vol.47, Issue5, (2009), pp.514-521.
- (5) Kecman, D., Bending collapse of rectangular and square section tubes, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol.25, (1983), pp.623-36.
- (6) Wierzbicki, T. et al., Stress profiles in thin-walled prismatic columns subjected to crush loading - II. Bending *Computers and Structures*, Vol.51, (1994), pp.625-641.
- (7) Kim, T. H., Reid, S. R., Bending collapse of thin-walled rectangular section columns, *Computers and Structures*, Vol.79, (2001), pp.1897-1911.

- (8) Elchalakani, M. et al., Plastic mechanism analysis of circular tubes under pure bending, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol.44, (2002), pp.1117-1143.
- (9) Y. Yoshida, X. Wan, M. Takahashi and T. Hosokawa, Bending energy absorption of extruded aluminum beams, *JSAE Review*, Vol.18 (1997), pp.385-392.
- (10) W. Abramowicz and N. Jones, Dynamic Axial Crushing of Circular Tubes, *International Journal of Impact Engineering*, Vol.2 (1984), pp.263-281.
- (11) Chen, D., Masuda, K. and Ozaki, S., Study on Elastoplastic Pure Bending Collapse of Cylindrical Tubes, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.74, No.740(2008), pp.520-527.
- (12) Kyriakides, S. and Ju G. T., Bifurcation and localization instabilities in cylindrical shells under bending- I, II. Experiments, Predictions *International Journal of Solids and Structures*, Vol.29, (1992), pp.1117-1171.
- (13) Masuda, K., Chen, D. and Ozaki, S., Study on Pure Bending Collapse of Square Tubes in Consideration of Work-Hardening Effect, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.75, No.749(2009), pp.13-20.
- (14) Chen, D. and Masuda, K., Study on Elastoplastic Pure Bending Collapse of Cylindrical Tubes with Consideration of The Length Effect, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.76, No.765(2010), pp.549-556.