ハニカムコア材の面外弾性変形*

(第1報, ひずみエネルギーの等価性に基づく弾性定数の解析)

陳 玳 珩^{*1}, 大 石 邦 晃^{*2}

Out-of-Plane Elastic Deformation of Honeycomb Core (1st Report, Analysis of Elastic Constants Based on Equivalence of Strain Energy)

Dai-heng CHEN^{*3} and Kuniaki OOISHI

^{*3} Department of Mechanical Engineering, Tokyo University of Science,
1-3 Kagurazaka, Shinjuku-ku, Tokyo, 162-8601 Japan

In this paper, the equivalent elastic constants for the out-of-plane deformation of three kinds of honeycombs, consisting of respectively triangle, rectangle and hexagon cells, were studied theoretically based on the equivalence of deformation energy. The out-of-plane deformation of honeycomb consists of bending deformation and twisting deformation of cell plates. For the twisting deformation of cell plates, a restraint condition must be satisfied at both ends, because each cell plate is in contact with adjacent plates at both ends. When not taking such a restriction condition into consideration, a large analysis error would arise. The validity of the analysis was checked as compared with results of numerical analysis of FEM.

Key Words: Elasticity, Honeycomb, Bending, Torsion, Shell Structure

1. 緒 言

ハニカムは、主にサンドイッチ構造中のコア材として、サンドイッチの上下両面板を隔てるために使用されているが、近年、緩衝材やフィルタなどとして単独的に用いられていることもしばしばある。そのため、ハニカムの周期的セル構造を考慮して、均質材とみなす場合の等価弾性定数の解析は、ますます重要となり、これまでに多くの研究の対象となっている^{(1)~(7)}。しかし、これらの研究は、主にハニカムの面内等価弾性定数の解析に関するものであり、ハニカムの面外変形における等価弾性定数に関する研究は、著者らの調べた範囲では非常に少ないようである。

薄肉板の場合、板の曲げ剛性は板の面内弾性定数から求められる。しかし、薄肉板に対して成り立つ曲げ剛性と面内弾性定数の関係式を用いて、ハニカムの面内等価弾性定数から算出した等価曲げ剛性は、ハニカムの曲げ変形の解析には適用できない⁽⁸⁾。その理由は、F.K.ABD EL-Sayed ら⁽⁹⁾が指摘したように、ハニカムの曲げ変形において、ハニカムを構成する各セル

板の振り変形による役割が非常に大きいことにあると思われる。板の振り変形は、振りモーメントが作用する両端部が自由に変形できる場合、材料力学の板振り問題として簡単に解析できる。しかし、著者の一人が先に行った研究⁽⁸⁾で、ハニカムの曲げ変形において各セル板の両端部は隣接の板と接合しているため、その振り変形が接合部の拘束条件を満たさなければならないことを指摘した。このような両端部の拘束条件を考慮すると、板の振り変形の解析は複雑となる。これに対して、著者の一人は先に、両端部の拘束条件を満たす板の振り変形について、一般化変分原理を用いて解析を行い、板に作用するモーメントと板の振り回転角度との関係を求めた⁽¹⁰⁾。そこで、本研究では、以上の研究結果に踏まえ、図1に示すような、2等辺三角形、長方形および左右対称六角形の3種類のセルで構成するそれぞれのハニカムについてそれらの面外弾性定数を求める。また解析の際、セル板の振り変形に対して、接合部における拘束条件を考慮しないための誤差についても、求めた等価面外弾性定数を用いて、検討を行う。

一方、ハニカムの面内等価弾性定数の解析に関して、これまでに多くの研究が行われ、等価弾性定数を求めるための有効的な解析手法は提案され、確立されつつ

* 原稿受付 2010年7月28日。

^{*1} 正員、フェロー、東京理科大学工学部(〒162-8601 東京都新宿区神楽坂1-3)。

^{*2} 東京理科大学工学部。

E-mail: chend@rs.kagu.tus.ac.jp

Fig. 1 Geometry of honeycomb : (a)isosceles triangle; (b)rectangle; (c)symmetric hexagon

Fig. 2 Unit of honeycomb : (a)isosceles triangle; (b)rectangle; (c)symmetric hexagon

ある。提案されている解析手法には主に以下の2つのアプローチがあげられる。1つは、ハニカムの各セル板に生じる応力、ひずみの解析に基づくものであり、もう1つは、ユニットの変形に伴うひずみエネルギーの解析に基づくものである。前者では、各セル板が受ける応力も求められるので強度などの評価にも役に立つ利点があるが、後者では、解析手法が単純で複雑なセル形状の解析にも容易に適用できる利点がある。例えば、J.Hoha and W.Becker^{(5)~(7)}は、セル板の変形に伴うひずみエネルギーと薄板の面内変形に必要なひずみエネルギーとの等価性に基づき、任意形状なセルによるハニカムの面内等価弾性定数に関する最も一般的な解析手法を提案し、その有効性を示した。そこで、本研究では、J.Hoha and W.Beckerが提案した手法をハニカムの面外変形解析に適用し、図1に示した2等辺三角形、長方形および左右対称六角形の3種類のセルから構成されるハニカムの等価曲げ剛性 D_x, D_y, D_1 および等価振り剛性 D_{xy} を求める。

Timoshenkoらの著書⁽¹¹⁾に用いた定義を用いれば、曲げモーメントは式

$$M_x = \int_{h/2}^{h/2} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{h/2}^{h/2} \sigma_y z dz, \quad (1)$$

で与えられ、振りモーメントは式

$$M_{xy} = - \int_{h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz, \quad M_{yx} = \int_{h/2}^{h/2} \tau_{yx} z dz, \quad (2)$$

で与えられる。そして、曲げ剛性 D_x, D_y, D_1 および振

り剛性 D_{xy} は次式のように平板のたわみ w (板に垂直の z 方向の変位) と曲げモーメントおよび振りモーメントとを結ぶ係数である。

$$\begin{aligned} M_x &= - \left(D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= - \left(D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

$$M_{xy} + (-M_{yx}) = 4D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (4)$$

均質薄板の場合つねに $M_{xy} = (-M_{yx})$ であるため、式(4)は

$$M_{xy} = 2D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (5)$$

と書く場合が多い。しかし、ハニカムを等価的に均質材とみなす場合、後で示すように $M_{xy} = (-M_{xy})$ とは限らない。したがって、本研究では、振り剛性 D_{xy} の定義については、式(4)を用いる。

2. 解析およびその結果

図2に、図1に示した各ハニカムを構成するユニットを示す。図中の太線はセル板を意味し、接点はセル板の接合線を意味するものである。ハニカムを等価的な平板とみなし、その平板の曲げ変形における曲率を k_x, k_y, k_{xy} とすれば、図2の各接点 i ($i = 1, 2, 3$) にお

る, x 軸と y 軸まわりの回転角 θ_{ix}, θ_{iy} は, 次式

$$\begin{aligned}\theta_{1x} - \theta_{3x} &= (x_1 - x_3)k_{xy} \\ \theta_{1y} - \theta_{3y} &= (x_1 - x_3)k_x \\ \theta_{2x} - \theta_{3x} &= -(y_2 - y_3)k_y + (x_2 - x_3)k_{xy} \\ \theta_{2y} - \theta_{3y} &= (x_2 - x_3)k_x - (y_2 - y_3)k_{xy}\end{aligned}\quad (6)$$

のように k_x, k_y, k_{xy} によって表される. ここに, (x_i, y_i) は接点 i ($i = 1, 2, 3$) の x, y 座標であり, また, 曲率 k_x, k_y, k_{xy} は平板のたわみ w によって次式のように定義されるものである.

$$k_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad k_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad k_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (7)$$

式 (6) から分かるように, 各接点での回転角に関して次式

$$\begin{aligned}(\theta_{2y} - \theta_{3y})(x_1 - x_3) + (\theta_{1x} - \theta_{3x})(y_2 - y_3) \\ = (\theta_{1y} - \theta_{3y})(x_2 - x_3)\end{aligned}\quad (8)$$

が満たさなければならない.

Fig. 3 The in-plane and out-of-plane bending of cell plate "k" is calculated from the turning angle of both edges

ハニカムが面外変形を受ける際, 各セル板に面内曲げ変形および振り変形が生じる. 板の面内曲げ変形および振り変形は, 板の両縁での回転角から定めることができる. 例えば, 図3に示すように, 傾斜角が α_k のセル板 k について, 面内曲げ変形を板両縁における板法線方向の周りの相対回転角 $\theta_{k,M}$ で表し, 振り変形を板両縁における板長さ方向の周りの相対回転角 $\theta_{k,T}$ で表すと, $\theta_{k,M}, \theta_{k,T}$ は, セル板の両縁 (接点 i と $i+1$) における回転角 $\theta_{i,x}, \theta_{i,y}, \theta_{i+1,x}$ および $\theta_{i+1,y}$ より以下のように求められる.

$$\begin{aligned}\theta_{k,M} &= \theta_{i,k,M} + \theta_{i+1,k,M} \\ \theta_{k,T} &= \theta_{i,k,T} + \theta_{i+1,k,T}\end{aligned}\quad (9)$$

ここに, $\theta_{i,k,M}, \theta_{i,k,T}$ は i 番目の接点での回転角による

セル板 k の面内曲げ変形および振り変形の角度であり,

$$\begin{aligned}\theta_{i,k,M} &= \theta_{i,x} \sin \alpha_k - \theta_{i,y} \cos \alpha_k \\ \theta_{i,k,T} &= -\theta_{i,x} \cos \alpha_k - \theta_{i,y} \sin \alpha_k \\ \theta_{i+1,k,M} &= -\theta_{i+1,x} \sin \alpha_k + \theta_{i+1,y} \cos \alpha_k \\ \theta_{i+1,k,T} &= \theta_{i+1,x} \cos \alpha_k + \theta_{i+1,y} \sin \alpha_k\end{aligned}\quad (10)$$

式 (10) から分かるように, セル板の変形は板両縁の相対回転角度によって決まる. したがって, 各ユニットにおいて, 1つの接点での回転角をゼロとしても解析の一般性が失わない. ここで, 三角形と長方形セルの場合 $i=3$ の接点での回転角をゼロとし, 六角形セルの場合接合点 O での回転角をゼロとする. 三角形と長方形セルの場合, 1ユニットに接点が計3個あり, その中の1つの接点, $i=3$ の接点での回転角をゼロとしたので, 式 (6) を用いれば, 他の2つの接点における回転角を曲率 k_x, k_y, k_{xy} で表すことができる. 一方, 六角形セルの場合, 接合点 O を含め, 1ユニットに4つの接点があり, 接点 O における回転角をゼロとすることができるが, 他の接点 $1, 2, 3$ での回転角, 計6個の値を式 (6) だけでは定めることができない. この場合, 点 O におけるモーメントのつりあい条件を考慮に入れなければならない. なお, 三角形と四角形セルの場合, 各接点におけるモーメントのつりあい条件は自動的に満たされている.

図4に示すように, 点 O と繋がる各セル板の面内曲げモーメントおよび振りモーメントを M_k, T_k とすれば, それらモーメントのベクトルの和がゼロでなければならない. すなわち,

$$\sum_{k=1}^3 (\vec{M}_k + \vec{T}_k) = 0 \quad (11)$$

Fig. 4 Equilibrium condition of moment in case a unit of hexagon

各セル板の面内曲げ変形と振り変形に対して, 図5に示すようなローカルの座標系 (ξ, η, ζ) を使用する. ここで, 図5を用いて, 長さ l , 高さ h , 厚さ t の板が

面内曲げモーメント M と捩りモーメント T を受ける時の変形を考える。本研究ではセル材料の縦弾性定数、横弾性定数およびポアソン比はそれぞれ E_s , G_s および ν_s とする。

板の面内曲げ変形について、曲げモーメント M および変形に伴うひずみエネルギー U_M は、板両縁に生じる ζ 軸まわりの相対回転角 θ_M で表される。

$$M = \frac{E_s t h^3}{12l} \theta_M \quad (12)$$

$$U_M = \frac{E_s t h^3}{24l} \theta_M^2 \quad (13)$$

Fig. 5 Local coordinate system used for analysis of bending and torsion of cell plate

なお、セル板の捩り変形について、両縁が自由に变形できる場合、捩りモーメント T と ξ 軸まわりの捩り回転角 θ_T の関係は次式⁽¹²⁾

$$\theta_T = \frac{3Tl}{G_s h t^3} = \frac{6(1+\nu_s)Tl}{E_s h t^3} \quad (14)$$

で表される。しかし、著者の一人が先に行った研究⁽⁸⁾で指摘したように、ハニカムの面外変形において、各セル板の両縁 $\xi = \pm l/2$ における η 軸まわりの回転角がゼロであり、すなわち図5の座標を用いれば、式

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\pm l/2} = 0. \quad (15)$$

が満足されなければならない。境界条件式(15)を考慮すると、板の捩り変形の解析は複雑になり、既知の解が見あたらないようである。これに対して、著者の一人は、さきに行った研究で⁽¹⁰⁾このような板の捩り変形について一般化変分の原理を用いて解析を行った。その結果、捩り回転角 θ_T と捩りモーメント T の関係は次式

$$\theta_T = \frac{Tl}{E_s h t^3} \times 12q_\tau \times \left(\frac{l}{h}\right) \quad (16)$$

のように表される。ここに、捩り係数 q_τ は板の形状 h/l および材料のポアソン比 ν_s のみの関数である。表1に、著者の一人がさきの研究⁽¹⁰⁾で求めた q_τ の値を示す。

Table 1 Torsion coefficient q_τ

h/l	$\nu_s = 0.0$	$\nu_s = 0.3$
0.10	0.047	0.061
0.25	0.110	0.138
0.50	0.196	0.238
0.75	0.263	0.305
1.00	0.309	0.344
1.25	0.336	0.360

本研究では、境界条件式(15)の考慮の有無による影響を容易に検討できるように、パラメータ J を導入し、式(14)と式(16)をまとめて次式のように1つの式で表す。

$$\theta_T = \frac{Tl}{E_s h t^3} \times J \quad (17)$$

ここに、 J は、境界条件式(15)の考慮の有無によって異なり、以下の式で表される。

$$J = \begin{cases} 6(1+\nu_s) & (\text{without Eq.(15) considered}) \\ \frac{12l}{h} q_\tau & (\text{with Eq.(15) considered}) \end{cases} \quad (18)$$

図6は、境界条件式(15)を考慮した場合の係数 J の値 ($= 12lq_\tau/h$) と、境界条件式(15)を考慮しない場合の係数 J の値 ($= 6(1+\nu_s)$) との比 $2lq_\tau/h(1+\nu_s)$ を示すものである。図から分かるように、式(15)を考慮した場合の係数 J は、板の形状 h/l によって異なり、 h/l が大きいほど、その値は、境界条件式(15)を考慮しない場合の係数 J の値との差が大きい。

Fig. 6 Effect of coefficient J with or without Eq.(15) considered

式(18)を用いれば、セル板の捩り変形に伴うひずみエネルギー U_T は次式で表される。

$$U_T = \frac{E_s h t^3}{2lJ} \theta_T^2 \quad (19)$$

したがって、ハニカムの面外変形に生じる1ユニットのひずみエネルギー U_{unit} はユニットを構成する各セル板の面内曲げ変形と捩り変形のひずみエネルギー $U_{k,M}$, $U_{k,T}$ の和で計算できる。すなわち、

$$U_{unit} = \sum_{k=1}^{k_{unit}} (U_{k,M} + U_{k,T}) \quad (20)$$

ここに、 k_{unit} は1ユニットにあるセル板の数であり、セルが三角形、長方形および六角形の場合、 k_{unit} はそれぞれ $k_{unit} = 3, 2, 3$ である。

ハニカムにおける平均ひずみエネルギー密度 $\bar{U}$ は

$$\bar{U} = \frac{U_{unit}}{A_e} \quad (21)$$

で求められる。ここに、 A_e は1ユニットに対応する有効面積であり、図2中の斜線で示した部分の面積である。

平均ひずみエネルギー密度 $\bar{U}$ は次式のように、ハニカムを等価的に平板とみなす場合の、平板の曲率 k_x, k_y, k_{xy} によって表される。

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \frac{1}{2} [M_x k_x + M_y k_y + (M_{xy} - M_{yx}) k_{xy}] \\ &= \frac{1}{2} [D_x k_x^2 + D_y k_y^2 + 2D_1 k_x k_y + 4D_{xy} k_{xy}^2] \end{aligned} \quad (22)$$

したがって、3角形、長方形の場合、 $\theta_{3x} = \theta_{3y} = 0$ とし、式(6)より各板縁における回転角 θ_{ix}, θ_{iy} ($i = 1, 2$) を曲率 k_x, k_y, k_{xy} の関数として求めれば、また六角形の場合、式(6)とつりあいの条件式(11)を連立して、各板縁における回転角 θ_{ix}, θ_{iy} ($i = 1, 2, 3$) を曲率 k_x, k_y, k_{xy} の関数として求めれば、式(9)より各セル板の面内曲げ変形及び捩り変形を求めることができ、そして式(13)および式(19)よりひずみエネルギー U_{unit} を曲率 k_x, k_y, k_{xy} の関数として表すことができる。したがって、式(22)に基づけば、ハニカムの曲げ剛性および捩り剛性は、求めた平均ひずみエネルギー密度 $\bar{U}$ を用いて次式から求まる。

$$\begin{aligned} D_x &= \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial k_x^2}, & D_y &= \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial k_y^2} \\ D_1 &= \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial k_x \partial k_y}, & D_{xy} &= \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial k_{xy}^2} \end{aligned} \quad (23)$$

以下、以上に示した解析手法で求めたハニカムの等価面外弾性定数を示す。

図1(a)に示す2等辺三角形セルに対して、ハニカムの等価面外弾性定数は次式で表される。

$$\begin{aligned} D_x &= E_s \frac{[(B_1 + C_1) + (B_1 - C_1) \cos 2\beta + 4B_2]}{2 \tan \beta} \\ D_y &= E_s \tan \beta \frac{[(B_1 + C_1) - (B_1 - C_1) \cos 2\beta]}{2} \\ D_1 &= E_s \sin 2\beta \frac{(B_1 - C_1)}{2} \\ D_{xy} &= E_s \frac{[(B_1 + C_1) - (B_1 - C_1) \cos 4\beta + 4C_2 \cos^2 \beta]}{4 \sin 2\beta} \end{aligned} \quad (24)$$

ここに、 β は2等辺三角形の底角である。

図1(b)に示す長方形セルに対して、ハニカムの等価面外弾性定数は次式で表される。

$$\begin{aligned} D_x &= E_s B_1 \left(\frac{l_1}{l_2} \right) \\ D_y &= E_s B_2 \left(\frac{l_2}{l_1} \right) \\ D_1 &= 0 \\ D_{xy} &= \frac{E_s}{4} \left[C_1 \left(\frac{l_1}{l_2} \right) + C_2 \left(\frac{l_2}{l_1} \right) \right] \end{aligned} \quad (25)$$

また、図1(c)に示す左右対称の六角形セルに対して、ハニカムの等価面外弾性定数は次式で表される。

$$\begin{aligned} D_x &= E_s \cos \beta \frac{B_2(B_1 \cos^2 \beta + C_1 \sin^2 \beta) + 2B_1 C_1}{\left(\frac{l_2}{l_1} + \sin \beta \right) R} \\ D_y &= E_s \left(\frac{l_2}{l_1} + \sin \beta \right) \frac{B_2(B_1 \sin^2 \beta + C_1 \cos^2 \beta)}{R \cos \beta} \\ D_1 &= E_s \sin \beta \cos \beta \frac{B_2(B_1 - C_1)}{R} \\ D_{xy} &= \frac{E_s}{8 \cos \beta \left(\frac{l_2}{l_1} + \sin \beta \right)} \\ &\quad \times \frac{F}{(C_2 + 2B_1 \cos^2 \beta + 2C_1 \sin^2 \beta)} \end{aligned} \quad (26)$$

ここに、

$$\begin{aligned} R &= B_2 + 2B_1 \sin^2 \beta + 2C_1 \cos^2 \beta \\ F &= \left\{ 2B_1 C_1 + \left[1 + \left(\frac{l_2}{l_1} \right)^2 \right] C_2 (B_1 + C_1) \right\} \\ &\quad + \left\{ 2B_1 C_1 + \left(\frac{l_2}{l_1} \right)^2 C_2 (B_1 - C_1) \right\} \cos 2\beta \\ &\quad + 4C_2 \left(\frac{l_2}{l_1} \right) \sin \beta [2(B_1 - C_1) \cos^2 \beta + C_1] \\ &\quad - C_2 (B_1 - C_1) \cos 4\beta \end{aligned} \quad (27)$$

以上の式(24)～(27)において、 B_i, C_i ($i = 1, 2$) は

$$B_i = \frac{t_i h^3}{12 l_i}, \quad C_i = \frac{h t_i^3}{J_i l_i} \quad (i = 1, 2) \quad (28)$$

であり、またここに J_i ($i = 1, 2$) は式(18)で定義される、それぞれ長さ l_1 、厚さ t_1 、高さ h と長さ l_2 、厚さ t_2 、高さ h の板に対する J の値である。

3. FEMによる結果の検証

前節で求めたハニカムの等価曲げ剛性および捩り剛性の有効性を検証するために、本節では、図7に示すような、 x 方向に m 個、 y 方向に n 個の有限個のセル(図7例では、 $m = 8, n = 7$ の正六角形セル)から構成される有限の大きさ $a \times b$ のハニカムモデルを考える。図8に示すように、大きさ $a \times b$ のハニカムに対して3種類の荷重：(1) 4辺に分布する一様な曲げモー

Fig. 7 Analyzed honeycomb model

Fig. 8 Three kinds of loads

メント M_x^∞ , M_y^∞ ; (2) 4 辺に分布する一様な捩りモーメント M_{xy}^∞ , M_{yx}^∞ ; (3) 4 隅に作用する 4 つの集中力 P ; を作用させるときのたわみ w を, 理論解析および FEM の数値解析の手法を用いて求める。なお, 荷重をかける際, ハニカムを点 E, F で支持し, しかも EF のまわりの剛体回転がないようにする。

具体的には, まず, ハニカムを同様な大きさ $a \times b$ をもつ薄板とみなし, 前節の理論手法で求めたハニカムの曲げ剛性および捩り剛性を用いて, 各荷重に対応するたわみを以下の各式⁽¹¹⁾によって求める。

(1) 荷重 (1) の場合, 板のたわみ w は

$$w = \frac{(D_1 M_y^\infty - D_y M_x^\infty)}{2(D_x D_y - D_1^2)} x^2 + \frac{(D_1 M_x^\infty - D_x M_y^\infty)}{2(D_x D_y - D_1^2)} (y^2 - y_E^2) \quad (29)$$

である。ここに, y_E は点 E の y 座標である。

(2) 荷重 (2) の場合, 板のたわみ w は

$$w = \frac{(M_{xy}^\infty + (-M_{yx}^\infty))}{4D_{xy}} xy \quad (30)$$

である。

(3) 荷重 (3) の場合, 板のたわみ w は

$$w = \frac{P}{4D_{xy}} xy \quad (31)$$

である。

そして, x 方向に m 個, y 方向に n 個の有限個のセルで構成される有限の大きさ $a \times b$ のハニカムモデルに FEM の汎用解析プログラム MSC.Marc を直接適用して各荷重下でのたわみを求め, 理論解析の結果との比較を行う。式 (29) ~ (31) から分かるように, 荷重 (1) では曲げ剛性 D_x , D_y および D_1 の検証ができ, 荷重 (2), (3) では捩り剛性 D_{xy} の検証ができる。

Table 2 Deformation of isosceles triangle honeycomb in a case load (1) acts

h [mm]	M_x^∞ [N]	M_y^∞ [N]	Point		FEM	Method 1	Method 2
			x	y			
2.5	1	0	10	0	-1.89×10^{-4}	-1.93×10^{-4}	-1.96×10^{-4}
			40	0	-1.13×10^{-3}	-1.15×10^{-3}	-1.16×10^{-3}
	0	1	10	0	4.44×10^{-4}	4.48×10^{-4}	4.51×10^{-4}
			40	0	7.29×10^{-4}	7.36×10^{-4}	7.45×10^{-4}
	1	1	10	0	2.54×10^{-4}	2.55×10^{-4}	2.55×10^{-4}
			40	0	-3.98×10^{-4}	-4.10×10^{-4}	-4.10×10^{-4}
10	1	0	10	0	-3.28×10^{-6}	-3.34×10^{-6}	-3.36×10^{-6}
			40	0	-1.87×10^{-5}	-1.89×10^{-5}	-1.89×10^{-5}
	0	1	10	0	7.38×10^{-6}	7.32×10^{-6}	7.34×10^{-6}
			40	0	1.24×10^{-5}	1.24×10^{-5}	1.25×10^{-5}
	1	1	10	0	4.10×10^{-6}	3.98×10^{-6}	3.98×10^{-6}
			40	0	-6.28×10^{-6}	-6.41×10^{-6}	-6.41×10^{-6}

Table 3 Deformation of rectangle honeycomb in a case load (1) acts

h [mm]	M_x^∞ [N]	M_y^∞ [N]	Point		FEM	Method 1	Method 2
			x	y			
2.5	1	0	10	0	-7.32×10^{-5}	-7.68×10^{-5}	-7.68×10^{-5}
			50	0	-1.88×10^{-3}	-1.92×10^{-3}	-1.92×10^{-3}
	0	1	10	0	1.21×10^{-3}	1.23×10^{-3}	1.23×10^{-3}
			50	0	1.20×10^{-3}	1.23×10^{-3}	1.23×10^{-3}
	1	1	10	0	1.13×10^{-3}	1.15×10^{-3}	1.15×10^{-3}
			50	0	-6.81×10^{-4}	-6.91×10^{-4}	-6.91×10^{-4}
10	1	0	10	0	-1.12×10^{-6}	-1.20×10^{-6}	-1.20×10^{-6}
			50	0	-2.97×10^{-5}	-3.00×10^{-5}	-3.00×10^{-5}
	0	1	10	0	1.90×10^{-5}	1.92×10^{-5}	1.92×10^{-5}
			50	0	1.89×10^{-5}	1.92×10^{-5}	1.92×10^{-5}
	1	1	10	0	1.79×10^{-5}	1.80×10^{-5}	1.80×10^{-5}
			50	0	-1.09×10^{-5}	-1.08×10^{-5}	-1.08×10^{-5}

Table 4 Deformation of symmetric hexagon honeycomb in a case load (1) acts

h [mm]	M_x^∞ [N]	M_y^∞ [N]	Point		FEM	Method 1	Method 2
			x	y			
2.5	1	0	8.66	0	-1.15×10^{-2}	-1.11×10^{-2}	-1.32×10^{-2}
			60.62	0	-3.22×10^{-2}	-3.12×10^{-2}	-3.62×10^{-2}
	0	1	8.66	0	1.46×10^{-2}	1.43×10^{-2}	1.64×10^{-2}
			60.62	0	3.05×10^{-2}	2.96×10^{-2}	3.46×10^{-2}
	1	1	8.66	0	3.13×10^{-3}	3.23×10^{-3}	3.23×10^{-3}
			60.62	0	-1.66×10^{-3}	-1.56×10^{-3}	-1.56×10^{-3}
10	1	0	8.66	0	-1.85×10^{-3}	-1.83×10^{-3}	-3.47×10^{-3}
			60.62	0	-4.54×10^{-3}	-4.46×10^{-3}	-8.39×10^{-3}
	0	1	8.66	0	1.90×10^{-3}	1.88×10^{-3}	3.52×10^{-3}
			60.62	0	4.52×10^{-3}	4.43×10^{-3}	8.36×10^{-3}
	1	1	8.66	0	4.94×10^{-5}	5.04×10^{-5}	5.04×10^{-5}
			60.62	0	-2.72×10^{-5}	-2.44×10^{-5}	-2.44×10^{-5}

Table 5 Deformation of isosceles triangle honeycomb in a case load (2),(3) acts

h [mm]	M_x^∞ [N]	M_y^∞ [N]	P [N]	Point		FEM	Method 1	Method 2
				x	y			
2.5	2	0	0	45	25.98	1.85×10^{-3}	1.93×10^{-3}	1.95×10^{-3}
	0	2	0			1.95×10^{-3}	1.93×10^{-3}	1.95×10^{-3}
	1	1	0			1.90×10^{-3}	1.93×10^{-3}	1.95×10^{-3}
	0	0	2			2.04×10^{-3}	1.93×10^{-3}	1.95×10^{-3}
10	2	0	0	45	25.98	3.15×10^{-5}	3.22×10^{-5}	3.23×10^{-5}
	0	2	0			3.23×10^{-5}	3.22×10^{-5}	3.23×10^{-5}
	1	1	0			3.19×10^{-5}	3.22×10^{-5}	3.23×10^{-5}
	0	0	2			3.71×10^{-5}	3.22×10^{-5}	3.23×10^{-5}

表 2~7 はそれぞれ, 3 種類の荷重によるいくつかの検討点のたわみについて, FEM の数値解析と本研究で提案した理論解析手法で求めた結果を比較するものである. 表には, Method 1, Method 2 と記載しているのは, とともに前節で求めた式 (29), 式 (30) および式 (31) の面外弾性定数を用いて求めた理論結果であるが, 用いる J の値は異なり, Method 1 は接合縁における条件式 (15) を考慮した式 (16) を用いるものであり, Method 2 は式 (14) を用いるものである.

解析に用いるハニカムモデルは, 3 角形, 長方形および 6 角形の場合それぞれ $m=9$, $n=6$, $m=10$, $n=8$ および $m=8$, $n=7$ とし, また各セル板についていずれも $l_1=l_2=l=10\text{mm}$, $t_1=t_2=t=0.5\text{mm}$ とし, 厚さ h は $h=2.5\text{mm}$ と $h=10\text{mm}$ との 2 通りとする. 以上のように, 3 角形, 長方形および 6 角形のハニカムモデルの大きさはそれぞれ $a=90\text{mm}$, $b=51.96\text{mm}$, $a=110\text{mm}$, $b=90\text{mm}$ と $a=138.56\text{mm}$, $b=120\text{mm}$ であり, 支点 E, F について座標 y_E はそれぞれ $y_E=25.98\text{mm}$, $y_E=40\text{mm}$, $y_E=50\text{mm}$ である. また, セル板の材料定数はいずれも $E_s=10^7\text{MPa}$, $\nu_s=0.3$ である.

Table 6 Deformation of rectangle honeycomb in a case load (2),(3) acts

h [mm]	M_x^∞ [N]	M_y^∞ [N]	P [N]	Point		FEM	Method 1	Method 2
				x	y			
2.5	2	0	0	50	40	4.45×10^{-2}	4.24×10^{-2}	4.99×10^{-2}
	0	2	0			4.35×10^{-2}	4.24×10^{-2}	4.99×10^{-2}
	1	1	0			4.40×10^{-2}	4.24×10^{-2}	4.99×10^{-2}
	0	0	2			3.98×10^{-2}	4.24×10^{-2}	4.99×10^{-2}
10	2	0	0	50	40	6.72×10^{-3}	6.60×10^{-3}	1.25×10^{-2}
	0	2	0			6.55×10^{-3}	6.60×10^{-3}	1.25×10^{-2}
	1	1	0			6.64×10^{-3}	6.60×10^{-3}	1.25×10^{-2}
	0	0	2			6.05×10^{-3}	6.60×10^{-3}	1.25×10^{-2}

Table 7 Deformation of symmetric hexagon honeycomb in a case load (2),(3) acts

h [mm]	M_x^∞ [N]	M_y^∞ [N]	P [N]	Point		FEM	Method 1	Method 2
				x	y			
2.5	2	0	0	69.28	50	7.21×10^{-2}	6.82×10^{-2}	7.95×10^{-2}
	0	2	0			6.92×10^{-2}	6.82×10^{-2}	7.95×10^{-2}
	1	1	0			7.06×10^{-2}	6.82×10^{-2}	7.95×10^{-2}
	0	0	2			6.66×10^{-2}	6.82×10^{-2}	7.95×10^{-2}
10	2	0	0	69.28	50	1.04×10^{-2}	9.98×10^{-3}	1.88×10^{-2}
	0	2	0			9.72×10^{-3}	9.98×10^{-3}	1.88×10^{-2}
	1	1	0			1.01×10^{-2}	9.98×10^{-3}	1.88×10^{-2}
	0	0	2			9.71×10^{-3}	9.98×10^{-3}	1.88×10^{-2}

各荷重に対してたわみを検討する点の座標は各表に示し, これらの点はいずれもハニカムモデル中のセル板がある位置である. 表 2~7 から分かるように, 本研究で提案した, セル板の曲げ変形, および接合部の拘束条件を考慮したセル板の捩り変形の解析に基づいて求めた, ハニカムの等価曲げ剛性および捩り剛性によるハニカムたわみの解析結果は, FEM の数値解析結果とよく一致する. また, 表から以下の特徴が挙げられる.

- (1) 表 2, 5 に示したように, 2 等辺 3 角形セルのハニカムに対して, Method 1 と Method 2 によるたわみの差が小さい. このことに関する詳細な検討は次報で報告する.
- (2) 長方形セルのハニカムに対して, 曲げモーメントを受ける際, セル板に捩り変形がゼロであるため, 表 3 に示したように, Method 1 と Method 2 による解析の結果が同じである. これに対して, 捩りモーメントを受ける際, セル板に捩り変形のみが生じるため, 表 6 に示したように, Method 1 と Method 2 によるたわみの差が大きい.
- (3) 6 角形セルのハニカムに対して, $M_x^\infty = M_y^\infty$ の曲げモーメントを負荷する荷重 (1) を除けば, Method 2 によるたわみの誤差が大きい. この解

析誤差は、セル板の高さが $h = 2.5\text{mm}$ のときよりは $h = 10\text{mm}$ のときの方が、より顕著であり、セル板の高さ $h = 10\text{mm}$ のとき、それらの誤差がほぼ 80% 以上である。このことは、図 6 に示した、 h が大きいほど接合条件の式 (15) による影響が大きいことに対応している。

- (4) ただし、 $M_x^\infty = M_y^\infty$ の荷重 (1) に対しては、Method 1 と Method 2 による解析の結果が同じである。それは、 $M_x^\infty = M_y^\infty$ のとき、 $\beta = 60^\circ$ の 2 等辺 3 角形、長方形、また正 6 角形セルの場合、ハニカムのセル板に捩り変形がゼロであるからである。

また、4 辺に一樣に分布する捩りモーメント $M_{xy}^\infty, M_{yx}^\infty$ を負荷するとき、平板が厚さが無視できる薄肉だった場合この境界条件は板の 4 隅に $P = M_{xy}^\infty + (-M_{yx}^\infty)$ の集中力を負荷することに相当し、両者の変形は等しくなるという特徴がある。しかし、ハニカムの場合、表に示すように、 $M_{xy}^\infty + (-M_{yx}^\infty)$ が同じでも $M_{xy}^\infty, M_{yx}^\infty$ の組み合わせによって、FEM で求めたたわみが異なり、比 $M_{xy}^\infty : (-M_{yx}^\infty)$ が 1:0 と 0:1 のとき、それぞれのたわみの値は異なることが分かる。ハニカムモデルに対して FEM の数値解析を行う際、ハニカムの周期的なセル構造によって、境界に連続的に分布する捩りモーメントについては、図 7 に示した各六角形の角部に捩りモーメントを有限個負荷し、しかもその捩りモーメントが厚さ方向に分布する力によって表現される。これらのことは、厚さの効果が無視できる薄板の特徴を満たさないと考えられ、ハニカムを薄肉平板と近似する場合の限界を示唆する。このことについて、次報に検討を行う。

4. 結 論

本研究では、2 等辺 3 角形、長方形、また 6 角形セルから構成されるハニカムの等価曲げ剛性および捩り剛性について検討を行い、以下の結論を得た。

- (1) ひずみエネルギーの等価性に基づいて、ハニカムの面外変形における等価弾性定数の解析手法を提案し、しかも 2 等辺 3 角形、長方形、また 6 角形セルの場合に適用し等価曲げ剛性および捩り剛性を求め、FEM の数値解析結果と比較してその有効性を確認した。
- (2) ハニカムの面外変形は、各セル板の面内曲げ変形および捩り変形によって構成され、その捩り変形において板の両縁では接合の拘束条件が満たさなければならない。このような拘束条件を考慮しない場合、大きい解析誤差が生じる。ただし、2

等辺 3 角形セルの場合、ハニカムの面外変形に対するセル板の捩り変形の影響が小さいため、捩り変形における板両縁での接合拘束条件を考慮しなくても、高精度な解析結果が得られる。

文 献

- (1) Kelsey S, Gellatly RA, Clark BW, The shear modulus of foil honeycomb cores, *Aircraft Engineering*, **30**, (1958), 294-302.
- (2) Chang CC, Ebcioğlu IK, Effect of cell geometry on the shear modulus and on density of sandwich panel cores, *Journal of Basic Engineering*, **83**, (1961), 513-518.
- (3) Gibson LJ, Ashby MF, Schajer GS, Robertson CI, The mechanics of two-dimensional cellular materials, *Proc Roy Soc, A*, **382**, (1982), 25-42.
- (4) Overaker DW, Cuitino AM, Langrana NA, Elastoplastic Micromechanical modeling of two-dimensional irregular convex and nonconvex (re-entrant) hexagonal foams, *ASME J Appl Mech*, **65**, (1998), 748-757.
- (5) Hohe J, Becker W, Effective elastic properties of triangular grid structures. Composite Structures, *Archives of Applied Mechanics*, **45**, (1999), 131-145.
- (6) Hohe J, Becker W, An energetic homogenisation procedure for the elastic properties of general cellular sandwich cores, *Composites, Part B* **32**, (2001), 185-197.
- (7) Hohe J, Becker W, A refined analysis of the effective elasticity tensor for general cellular sandwich cores, *Int. J. Solids Struct.*, **38**, (2001), 3689-3717.
- (8) D.H. Chen, T. Matsumoto, Study on bending rigidity of honeycomb (First report : basic consideration), *JSME*, **A75**, (2009), 1484-1491.
- (9) Abd El-Sayed FK, Jones R, Burgess IW, A theoretical approach to the deformation of honeycomb based composite materials, *Composites*, **10**, (1979), 209-214.
- (10) D.H. Chen, T. Matsumoto, Study on bending rigidity of honeycomb (Second report : Analysis of the flexural rigidity based on the theoretical analysis of board torsion), *JSME*, **A75**, (2009), 1694-1701.
- (11) S. P. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, *McGRAW-HILL BOOK COMPANY*, New York Toronto London, (1959), Chapter 11.
- (12) S. P. Timoshenko and J. N. Goodier, Theory of Elasticity (Third Edition), *McGRAW-HILL BOOK COMPANY*, (1970), Chapter 10.