下負荷面モデルの拡張およびその金属への適用*

(第1報, 構成式の定式化)

橋口 公一^{*1}, 上野 正実^{*2}, 尾崎 利行^{*3}

Extension of Subloading Surface Model and Its Application to Metals (1st Report, Formulation of Constitutive Equation)

Koichi HASHIGUCHI^{*4}, Masami UENO and Toshiyuki OZAKI

^{*4} Department Mechanical Engineering, Daiichi Institute of Technology,
1-10-2 Kokubu-chuo Kirishima-shi, Kagoshima-ken, 899-4395 Japan

The subloading surface model is the only elastoplasticity model which fulfills the smoothness condition and thus describes always the continuous variation of tangent stiffness modulus leading to the smooth stress-strain relation. Then, it does not require to incorporate the algorithms for the judgment of yielding, i.e. the judgment whether or not the stress reaches the yield surface and for pulling back the stress to the yield surface. It is refined so as to describe the unloading-reloading behavior pertinently in this article. Then, based on this model, the constitutive equation of metals is formulated introducing the cyclic stagnation of isotropic hardening with substantial modification based on the concept of subloading surface. The applicability of the present model to the description of real deformation behavior of metals is verified by comparisons with various test data for cyclic loadings.

Key Words: Constitutive Equation, Cyclic loading, Elastoplasticity, Metal, Yield Condition

1. 緒 言

降伏面の内部を純粋弾性域とする“古典弾塑性モデル”⁽¹⁾は、金属や土の弾塑性変形挙動の予測に寄与してきた。しかし、古典弾塑性モデルは単調負荷挙動の予測に限定され、繰返し負荷挙動の予測には適用できない。したがって、降伏面の内部の応力変化による塑性ひずみ速度を適切に表現することにより、

繰返し負荷挙動の予測を目的とする種々の弾塑性モデルが提案されてきた。これらは、Druckerにより“非古典弾性モデル”⁽¹⁾と定義されたが、しばしば“繰返し塑性モデル”と呼ばれる。これらは、移動硬化、つまり、純粋弾性域を囲む下降伏面の“移動”によるモデル⁽²⁾⁽³⁾と、常に現応力点を通って降伏面に相似な形状・方向を有する仮想面“下負荷面”の膨張・収縮つまり“サイズ変化”に基づくモデル⁽⁴⁾に分類される。ここに、移動硬化は、本来、塑性非圧縮性の金属の異方性を表現するもので、降伏面が応力空間の原点を常に僅かに含み、降伏面の回転つまり回転硬化に従う塑性圧縮性の土、岩、コンクリートには適用できないことに注意すべきである⁽⁵⁾。他方、下負荷面の概念は、負荷面の拡大、つまり、応力が降伏面に接近するにつれて塑性ひずみ速度が発展すると

* 原稿受付 2007 年 4 月 15 日。

^{*1} 正員, 第一工業大学機械工学科(☎ 899-4395 霧島市国分中央 1-10-2)。

^{*2} 琉球大学農学部農業工学科(☎ 903-0213 沖縄県西原千原 1)。

^{*3} 九州電技開発(株)(☎ 810-0005 福岡市中央区 2-13-6 九建ビル 7F)。

E-mail: khasi@kyudai.jp

みなすもので、全ての弾塑性材料、さらには、摩擦現象⁽⁶⁾にも適用できる一般的な考えであろう。

移動硬化の概念に基づく多面モデル⁽⁷⁾⁽⁸⁾、2面モデル⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾および非線形移動硬化モデル⁽¹¹⁾は、金属の弾塑性変形挙動の解析に広く採用されている。以下に、これらの定式化および特徴を振り返ってみよう。

A) 多面モデル⁽⁷⁾⁽⁸⁾

1. 重層する大きさの異なる同心円の多数の下降伏面を仮定する。
2. 降伏面の大きさに対するこれらの大きさの比は維持される。
3. 最内面の内部は純粋弾性域である。
4. これらの面は応力により押し出される。したがって、単調負荷においては、これらは、現応力点で点接触する。
5. 塑性係数は、応力が存在する下降伏面の大きさで決まり、応力がより大きな下降伏面に移行するにつれて低下する。

したがって、次のような欠点を有する。

- a. 応力がより大きな下降伏面に移行する度に塑性係数が急低下し、滑らかな入力負荷に対しても、区分線形の折れ曲がった応力-ひずみ曲線が描かれる。
- b. 大きさの異なる下降伏面が一点で接触し、そこでは、塑性係数場の特異点を生じ、ひいては接線剛性係数の不連続な変化が表現される。特に、純粋弾性域を囲む最内下降伏面が正規塑性状態である降伏面（最外面）に直接、接触するのは、極めて不自然である。
- c. 除荷曲線と再負荷曲線における曲率は同等であるので、応力振幅一定負荷においては、固定ループを周回し、ひずみの集積、つまり、力学的ラチェット現象を表現できない。
- d. 初期負荷過程においては、下降伏面の半径の差でより大きな下降伏面に移行するが、除荷-逆負荷過程においては、直径の差でより大きな下降伏面に移行するので、除荷-逆負荷曲線の曲率が初期負荷曲線の曲率の半分に低下するとみなす Masing 則⁽¹²⁾がそのまま忠実に反映される。しかし、これは、実在材料には見られない除荷-逆負荷曲線の曲率低下の極端な表現である。
- e. 多くの下降伏面の運動の記憶のため、大きな計算機容量を要する。

なお、無数の下降伏面を仮定する無数面モデル⁽¹³⁾においても、初期負荷曲線が滑らかに表現され

ることを除いて、以上の欠点は解消されない。

B) 2面モデル⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾

1. 降伏面（境界面）の内部に、純粋弾性域を囲む小さな下降伏面を仮定する。なお、降伏面の大きさに対する下降伏面の大きさの比は維持される。
2. 塑性負荷状態において、下降伏面は応力により押し出されて、現応力点における下降伏面と同じ法線を有する境界面上の共役応力点に向かって移動する。
3. 塑性係数は、現応力点から境界面上の共役応力点までの距離に依存する。

したがって、次のような欠点を有する。

- a. 応力が下降伏面、境界面に到達する時、塑性係数が不連続に低下し、滑らかな入力負荷に対しても、急激に折れ曲がった 応力-ひずみ曲線が表現される。
- b. 下降伏面と境界面が一点で接触するので、その接触点は塑性係数場の特異点となる。特に、純粋弾性域を囲む下降伏面が降伏面（境界面）に直接、接触するのは、極めて不自然である。
- c. 塑性係数は、負荷過程によらず、現応力点から境界面上の共役応力点までの距離に依存する。したがって、多面モデルと真逆で、初期負荷曲線に比して逆負荷曲線の曲率が低下する現象を表現できず、また、除荷曲線に比して再負荷曲線の曲率は大きく、応力片振り試験においては過大なひずみの集積が表現される。このひずみの集積を抑えるためには、大きな下降伏面を仮定する必要があるが、下降伏面が大きいほど、接線剛性係数の弾性から塑性状態への急激な不連続的变化が表現される。

C) 非線形移動硬化モデル⁽¹¹⁾

1. 純粋弾性域を囲む小さな降伏面のみを仮定する。
 2. この小降伏面は、Armstrong and Frederick⁽³⁾の非線形移動硬化則に従って目まぐるしく動き回る。
 3. 複数の移動硬化則を組み合わせる。
- したがって、次のような欠点を有する。
- a. 小降伏面の内部は、純粋弾性域であるので、応力がこの面に到達する時、接線係数が不連続に変化する。したがって、滑らかな入力負荷に対しても、急激に折れ曲がった応力-ひ

ずみ曲線が表現される。

- b. 純粋弾性域を囲む小降伏面が著しい塑性変形が生じる高応力域まで上昇するは物理的に不合理であろう。
- c. 2面モデルと同様に、Masing 効果を全く表現できない。
- d. 小降伏面の移動により、弾性状態から降伏状態に至る変形過程を現実的に表現するため、複数（通常、3～8）の非線形移動硬化則を組み合わせて用いるので、多くの材料定数が仮定される。

上記の3種のモデルは、下記の共通の欠点を有する。

- i) 純粋弾性域を囲む下降伏面や小降伏面を仮定するので、これらの小面内の繰返し負荷におけるひずみの集積を全く表現できない。特に、この欠陥は、降伏面の近傍の繰返し負荷において生じる大きなひずみの集積を生じる実際現象を表現できず、危険設計につながる。
- ii) “応力状態の滑らかな変化に対して、同一のひずみ速度により生じる応力速度は滑らかに変化する”として定義される滑らか条件^{(14),(15),(16)}に抵触する。したがって、滑らか弾・塑性遷移が表現されず、接線係数の不連続な変化が表現される。
- iii) 降伏判定、さらには、どの面に応力が達したかの判定を要する、
- iv) 応力をこれらの面に引き戻すコンピュータアルゴリズムが必要である、

上述のように、これらのモデルは、最内面は純粋弾性域を囲み、また、下降伏面の移動硬化に基づくので、回避できない基本的欠陥を有する。それにも拘らず、これらは、機械・構造物の力学設計に広く活用されている。これは、未だに、繰返し負荷挙動の予測における滑らか条件の本質的重要性が認識されるに至っていないことによると思われる。なお、滑らか条件を満たすことは、繰返し負荷挙動の記述のみならず非比例負荷挙動や塑性不安定現象の解析に不可欠な降伏／負荷面の接線方向の応力速度による接線非弾性ひずみ速度^{(18),(19),(20)}の導入において不可欠である。多面、2面、非線形移動硬化モデル等の滑らか条件に抵触する塑性モデルは、接線非弾性ひずみ速度を導入すると、応力が降伏面に達する瞬間に接線非弾性ひずみ速度が発生することになり（多面モデルにおいては、より大きな下降伏面に達すると、接線非弾性ひずみ速度が急激に増大することにな

り）、“滑らかなひずみ速度の変化に対して、応力速度は滑らかに変化する”として定義される連続性条件^{(14),(15),(16)}にも抵触することになる。なお、Prager⁽¹⁷⁾は、定式化無しに、連続性条件を“降伏面の接線方向の応力速度は塑性ひずみに如何なる変化も与えない”と定義しているが、この定義は一般には成立しない。なんとなれば、i) 軟化材料においては、同一の応力速度が弾性ひずみ速度（除荷状態）と弾塑性ひずみ速度（負荷状態）の有限に異なったひずみ速度をもたらす、ii) 非比例負荷現象に見られるように、降伏面の接線方向の応力速度は非弾性ひずみ速度をもたらす、既述のように、これは塑性不安定現象の記述に不可欠である。

他方、下負荷面のモデル^{(9),(21)}は、応力が降伏面に接近するにつれて塑性ひずみ速度が発展するとするものであるが、現応力点を通して降伏面に相似な面を仮定するもので、降伏面に独立な面は導入しない。なお、降伏面に対する下負荷面の大きさの比を降伏面への接近の測度とする。本モデルにおいては、降伏面が唯一の独立な面で、下負荷面は、降伏面の射影面に過ぎず、これらが接触するときには、これらは大きさ、向き全てが完全に一致する。なお、多面、2面モデルにおいては、大きさの異なる下降伏面が接触し、これらの接触点においては、塑性係数の特異点が生じる。したがって、下負荷面モデルにおいては、滑らかな負荷に対して、常に接線係数の滑らかな変化が表現される。さらに、降伏面に対する下負荷面の大きさの比の速度は、正であるが、この比が1になる（応力が降伏面に達する）とゼロになり、1以上になると（応力が降伏面から飛び出すと）、負になる。塑性ひずみ速度の定式化に当って、この比の速度が下負荷面の適応条件に導入される。これにより、応力は常に降伏面に近づくように制御され、降伏面から飛び出しても自動的に引き戻される。したがって、負荷基準における降伏判定や応力引き戻しのための計算アルゴリズムは不要で、数値計算においても、下負荷面モデルは際立った優位性を有している。さらに、本モデルは、降伏面に対する下負荷面の相似中心を塑性変形とともに移動させることにより、繰返し負荷挙動を表現し得るように拡張されている。加えて、本モデルは、接線非弾性ひずみ速度を表現し得るように拡張されている。

上述のように、下負荷面モデルは塑性変形挙動の表現の妥当性および数値計算の単純さ、堅牢さの両面において、際立った優位性を有している。本論文においては、下負荷面モデルに基づいて、再負荷特

性を改善するとともに、繰返し負荷における等方硬化鈍化現象の導入により、金属の具体的な構成式を定式化する。なお、第2報において、本構成式の金属の実際の変形挙動記述への適用性を繰返し負荷試験データとの比較により実証する。

2. ひずみ速度

物質粒子の配置を $\mathbf{x}$ 、速度を $\mathbf{v}$ として、速度勾配 $\mathbf{L} = \partial \mathbf{v} / \partial \mathbf{x}$ の対称部分 $\mathbf{D} \equiv (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) / 2$ はひずみ速度、反対称部分 $\mathbf{W} \equiv (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) / 2$ は連続体スピンを表す。また、微小ひずみに限定し、ひずみ速度 $\mathbf{D}$ は、弾性ひずみ速度 $\mathbf{D}^e$ と塑性ひずみ速度 $\mathbf{D}^p$ に加算分解されるとする。すなわち、

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p \quad (1)$$

まず、弾性ひずみ速度は、応力速度に線形に関係づけられる、つまり、つぎの歪弾性式で与えられるとする。

$$\mathbf{D}^e = \mathbf{E}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2)$$

ここに、 $\boldsymbol{\sigma}$ は Cauchy 応力、 $(\cdot)$ は客観性を有する共回転応力速度、つまり、任意の2階テンソル $\mathbf{T}$ に対して、材料の下部構造のスピンを $\boldsymbol{\omega}$ として、次式で与えられる。

$$\dot{\mathbf{T}} \equiv \dot{\mathbf{T}} - \boldsymbol{\omega} \mathbf{T} + \mathbf{T} \boldsymbol{\omega} \quad (3)$$

微小変形においては、 $\boldsymbol{\omega}$ として連続体スピン $\mathbf{W}$ を用い得る。 $(\cdot)$ は物質時間微分を示す。 $\mathbf{E}$ は接線弾性係数テンソルであるが、Hooke 形の次式で与えられると仮定する。

$$\left. \begin{aligned} E_{ijkl} &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{E}{2(1+\nu)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\ E_{ijkl}^{-1} &= \frac{2-\nu}{3E} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1+\nu}{2E} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここに、 E および ν はそれぞれヤング率およびポアソン比である。また、 δ_{ij} は Kronecker のデルタつまり $i = j: \delta_{ij} = 1, i \neq j: \delta_{ij} = 0$ である。

3. 下負荷面モデル

下負荷面モデル⁽²¹⁾に基づいて、本節では、金属の弾塑性構成式を定式化する。まず、等方・移動硬化を有する次の降伏面を仮定する。

$$f(\hat{\boldsymbol{\sigma}}) = F(H) \quad (5)$$

ここに、

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} \equiv \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha} \quad (6)$$

F は、等方硬化変数 H の関数で、硬化関数と呼ばれる。2階テンソル $\boldsymbol{\alpha}$ は背応力 (移動硬化変数) であ

る。なお、 f は $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ の1次の同次関数で、任意のスカラー s に対して $f(|s|\hat{\boldsymbol{\sigma}}) = |s|f(\hat{\boldsymbol{\sigma}})$ を満たすとする。

降伏面の内部における応力変化による塑性ひずみ速度を表現するため、応力が降伏面に近づくにつれて、塑性ひずみ速度が発展すると仮定する。まず、現応力点を通して降伏面 (“正規降伏面” と改称) に相似な下負荷面の正規降伏面に対する大きさの比つまり “正規降伏比” を R ($0 \leq R \leq 1$) で示し、正規降伏面への接近の測度とする。正規降伏面式(5)に正規降伏比を導入して、下負荷面は次式で表される。

$$f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) = RF(H) \quad (7)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\sigma}} &\equiv \boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\alpha}} = R\hat{\boldsymbol{\sigma}}_y = \bar{\boldsymbol{\sigma}} + R\hat{\mathbf{s}}, \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}}_y \equiv \boldsymbol{\sigma}_y - \boldsymbol{\alpha} \\ \hat{\mathbf{s}} &\equiv \mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}, \quad \bar{\mathbf{s}} \equiv \mathbf{s} - \bar{\boldsymbol{\alpha}} = R\hat{\mathbf{s}} \\ \bar{\boldsymbol{\alpha}} &\equiv \mathbf{s} - R\hat{\mathbf{s}} \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}} &\equiv \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{s} = R\bar{\boldsymbol{\sigma}}_y, \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}_y \equiv \boldsymbol{\sigma}_y - \mathbf{s} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

下負荷面上の $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ は正規降伏面の $\boldsymbol{\alpha}$ に対する共役点である。 $\mathbf{s}$ は正規降伏面と下負荷面の相似中心である。 $\boldsymbol{\sigma}_y$ は下負荷面上の現応力点 $\boldsymbol{\sigma}$ に対する正規降伏面上の共役点である。

下負荷面式(7)を物質時間微分すれば、次式となる。

$$\frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} : \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} - \frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} : \dot{\bar{\boldsymbol{\alpha}}} = \dot{R}F + R\dot{F} \quad (9)$$

本式は次式で表される。

$$\bar{\mathbf{N}} : \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} - \bar{\mathbf{N}} : \left(\dot{\bar{\boldsymbol{\alpha}}} + \frac{\dot{F}}{F} \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\dot{R}}{R} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \right) = 0 \quad (10)$$

ここに、

$$\bar{\mathbf{N}} \equiv \frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} / \left\| \frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \right\| \quad (\|\bar{\mathbf{N}}\| = 1) \quad (11)$$

式(10)においては、Euler の同次関数の定理に基づく次式が用いられている。

$$\frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} = \frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} : \bar{\boldsymbol{\sigma}} \bar{\mathbf{N}} = \frac{f(\bar{\boldsymbol{\sigma}})}{\bar{\mathbf{N}} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \bar{\mathbf{N}} = \frac{RF}{\bar{\mathbf{N}} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \bar{\mathbf{N}} \quad (12)$$

なお、式(8)₃より、次式が成り立つ。

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\alpha}}} = R\dot{\bar{\boldsymbol{\alpha}}} - \dot{R}\hat{\mathbf{s}} + (1-R)\dot{\mathbf{s}} \quad (13)$$

応力が相似中心に一致しているとき、つまり、 $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{s}$ ($R=0$) であるとき、最も弾性的な応答が示される。したがって、相似中心は最も弾性的な応力状態に相当するが、塑性変形状態においては、応力に追従して相似中心は正規降伏面に漸近す

る. 最も弾性的な応力状態である相似中心が無制限に正規降伏面に近づくことは不合理である. なお, 相似中心が正規降伏面上にあるとき, 応力が相似中心に一致すると, 下負荷面は不定となる. 以下では, 相似中心の正規降伏面への無制限な接近を避けるように, 相似中心の発展則の定式化を行う. そこで, まず, 相似中心を通して, 背応力 α に関して相似な次式の“相似中心面”を導入しよう.

$$f(\hat{\mathbf{s}}) = \mathcal{H}_s F(H), \text{ i.e. } \mathcal{H}_s = f(\hat{\mathbf{s}}) / F(H) \quad (14)$$

ここに, $\mathcal{H}_s$ ($0 \leq \mathcal{H}_s \leq 1$) は正規降伏面に対する相似中心面の大きさの比で, 相似中心の正規降伏面への接近の度合を示し, “相似中心降伏比”と呼ばれる. 既述のように, 相似中心は, 正規降伏面の内部に存在しなければならないので, 相似中心降伏比は 1 以下でなければならない. したがって, 次の不等式が成り立たねばならない.

$$f(\hat{\mathbf{s}}) \leq \chi F(H), \text{ i.e. } \mathcal{H}_s \leq \chi \quad (15)$$

ここに, χ (< 1) は相似中心降伏比 $\mathcal{H}_s$ の最大値を示す材料定数である. 相似中心 $\mathbf{s}$ がその最外面 $f(\hat{\mathbf{s}}) = \chi F(H)$ に存在する限界状態において, 式(15)を物質時間微分すれば, 次式を得る.

$$\frac{\partial f(\hat{\mathbf{s}})}{\partial \hat{\mathbf{s}}} : \left(\dot{\hat{\mathbf{s}}} - \dot{\alpha} - \frac{\dot{F}}{F} \hat{\mathbf{s}} \right) \leq 0 \text{ for } \mathcal{H}_s = \chi \quad (16)$$

ここに, Euler の同次 (1 次) 関数の定理に基づく関係 $\{\partial f(\hat{\mathbf{s}}) / \partial \hat{\mathbf{s}}\} : \hat{\mathbf{s}} (= f(\hat{\mathbf{s}})) = \chi F$ が考慮されている. 不等式(16)を満たす次式を仮定しよう.

$$\dot{\hat{\mathbf{s}}} - \dot{\alpha} - \frac{\dot{F}}{F} \hat{\mathbf{s}} = c \lambda \left(\frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}{R} - \frac{\hat{\mathbf{s}}}{\chi} \right) \quad (17)$$

ここに, c は材料定数である. 式(17)の右辺において, 次式が成り立つことがわかる.

$$\frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}{R} - \frac{\hat{\mathbf{s}}}{\chi} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_y - \frac{\mathcal{H}_s}{\chi} \hat{\mathbf{s}}_y = \boldsymbol{\sigma}_y - \alpha - \frac{\mathcal{H}_s}{\chi} (\mathbf{s}_y - \alpha) \quad (18)$$

$$\left(= \begin{cases} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_y = \boldsymbol{\sigma}_y - \alpha = \boldsymbol{\sigma}_y - \mathbf{s} & \text{for } \mathcal{H}_s = 0 \ (\mathbf{s} = \alpha) \\ \boldsymbol{\sigma}_y - \mathbf{s}_y & \text{for } \mathcal{H}_s = \chi \end{cases} \right)$$

ここに,

$$\hat{\mathbf{s}}_y = \mathbf{s}_y - \alpha = \frac{1}{\mathcal{H}_s} \hat{\mathbf{s}} \quad (19)$$

$\mathbf{s}_y$ は, 相似中心面上の $\mathbf{s}$ に対する正規降伏面上の共役点である. 式(18)により, 式(17)の右辺は $\mathcal{H}_s$ の線形式で表されることがわかる. また, 式(17)が不等式(16)を満たすことは, 6 次元応力空間にお

いて, ベクトル $\boldsymbol{\sigma}_y - \mathbf{s}_y$ が相似中心面の外向き法線ベクトル $\partial f(\hat{\mathbf{s}}) / \partial \hat{\mathbf{s}}$ に対して鈍角をなすことからわかる. 式(17)より, 相似中心の発展則は次式で表される.

$$\dot{\hat{\mathbf{s}}} = c \|\mathbf{D}^p\| \left(\frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}{R} - \frac{\hat{\mathbf{s}}}{\chi} \right) + \dot{\alpha} + \frac{\dot{F}}{F} \hat{\mathbf{s}} \quad (20)$$

式(20)を式(13)に代入して, 次式を得る.

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\alpha}}} = R \dot{\alpha} + (1-R) \left[c \|\mathbf{D}^p\| \left(\frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}{R} - \frac{\hat{\mathbf{s}}}{\chi} \right) + \dot{\alpha} + \frac{\dot{F}}{F} \hat{\mathbf{s}} \right] - \dot{R} \hat{\mathbf{s}} \quad (21)$$

さらに, 式(21)を式(9)に代入して, 次式を得る.

$$\bar{\mathbf{N}} : \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} - \bar{\mathbf{N}} : \left[\dot{\alpha} + (1-R) \left\{ c \|\mathbf{D}^p\| \left(\frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}{R} - \frac{\hat{\mathbf{s}}}{\chi} \right) + \frac{\dot{F}}{F} \hat{\mathbf{s}} \right\} - \dot{R} \hat{\mathbf{s}} + \frac{\dot{F}}{F} \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\dot{R}}{R} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \right] = 0$$

つまり,

$$\bar{\mathbf{N}} : \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} - \bar{\mathbf{N}} : \left[\dot{\alpha} + c(1-R) \|\mathbf{D}^p\| \left(\frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}{R} - \frac{\hat{\mathbf{s}}}{\chi} \right) + \frac{\dot{F}}{F} \{ \bar{\boldsymbol{\sigma}} + (1-R) \hat{\mathbf{s}} \} + \frac{\dot{R}}{R} (\bar{\boldsymbol{\sigma}} - R \hat{\mathbf{s}}) \right] = 0 \quad (22)$$

さらに,

$$\left. \begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\sigma}} + (1-R) \hat{\mathbf{s}} &= \boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{s} - \alpha - (\mathbf{s} - \bar{\boldsymbol{\alpha}}) = \hat{\boldsymbol{\sigma}} \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}} - R \hat{\mathbf{s}} &= \boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\alpha}} - (\mathbf{s} - \bar{\boldsymbol{\alpha}}) = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \end{aligned} \right\}$$

の関係を検討すると, 式(22)は次式となる.

$$\bar{\mathbf{N}} : \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} - \bar{\mathbf{N}} : \left\{ \dot{\alpha} + c(1-R) \|\mathbf{D}^p\| \left(\frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}{R} - \frac{\hat{\mathbf{s}}}{\chi} \right) + \frac{\dot{F}}{F} \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\dot{R}}{R} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \right\} = 0 \quad (23)$$

さらに, 次の正規降伏比 $\bar{R}$ の発展則を導入する.

$$\dot{\bar{R}} = U(R) \|\mathbf{D}^p\| \text{ for } \mathbf{D}^p \neq 0 \quad (24)$$

ここに, U は次式を満たす R の単調減少関数である.

$$U(R) = \begin{cases} \rightarrow +\infty & \text{for } 0 \leq R \leq R_e : \text{quasi-elastic state} \\ > 0 & \text{for } R_e < R < 1 : \text{sub-yield state} \\ = 0 & \text{for } R = 1 : \text{normal-yield state} \\ < 0 & \text{for } R > 1 : \text{over normal-yield state} \end{cases} \quad (25)$$

R_e (< 1) は弾性限における R 値を示す材料定数である⁽²²⁾. 式(24), (25)により, $R > 1$ のとき $\dot{\bar{R}} < 0$ の関係が付与されているので, 塑性負荷状態において, 応力は自動的に正規降伏面に引き付けられる. 関数 U として, 式(25)を満たす次式を仮定する.

$$U(R) = u \cot \left(\frac{\pi}{2} \frac{R - R_e}{1 - R_e} \right) \quad (26)$$

ここに, u は一般に材料関数であり, また, $\langle \rangle$ は, $\langle s \rangle = (s + |s|)/2$ で定義される McCauley の括弧, つまり, $s \geq 0$ に対して $\langle s \rangle = s$, $s < 0$ に対して $\langle s \rangle = 0$ である.

さて, 次の関連流動則を採用しよう.

$$\mathbf{D}^p = \lambda \bar{\mathbf{N}} \quad (\lambda > 0) \quad (27)$$

式(24)および式(27)を式(23)に代入して, 次式を得る.

$$\bar{\mathbf{N}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \bar{\mathbf{N}} : \left\{ \lambda \mathbf{a} + c(1-R)\lambda \left(\frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}{R} - \frac{\hat{\mathbf{s}}}{\chi} \right) + \frac{F'\lambda h}{F} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{U}{R} \lambda \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \right\} = 0 \quad (28)$$

ここに,

$$F' \equiv dF/dH \quad (29)$$

$$h \equiv \dot{H}/\lambda, \quad \mathbf{a} \equiv \dot{\boldsymbol{\sigma}}/\lambda \quad (30)$$

式(28)は次のように表される.

$$\bar{\mathbf{N}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \lambda M^p = 0 \quad (31)$$

ここに,

$$M^p \equiv \bar{\mathbf{N}} : \left\{ \frac{F'h}{F} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{a} + \frac{U}{R} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + c(1-R) \left(\frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}{R} - \frac{\hat{\mathbf{s}}}{\chi} \right) \right\} \quad (32)$$

式(31)より, 次式が成り立つ.

$$\lambda = \frac{\bar{\mathbf{N}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}}{M^p}, \quad \mathbf{D}^p = \frac{\bar{\mathbf{N}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}}{M^p} \bar{\mathbf{N}} \quad (33)$$

式(2), (33)を式(1)に代入して, ひずみ速度は次式で与えられる.

$$\mathbf{D} = \mathbf{E}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\bar{\mathbf{N}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}}{M^p} \bar{\mathbf{N}} \quad (34)$$

これより, ひずみ速度で表された関連流動則における正值の比例係数 A は次式で与えられる.

$$A = \frac{\bar{\mathbf{N}} : \mathbf{E} : \mathbf{D}}{M^p + \bar{\mathbf{N}} : \mathbf{E} : \bar{\mathbf{N}}} \quad (35)$$

式(34)に式(35)を用いて, 応力速度は次式で表される.

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E} \mathbf{D} - \frac{\bar{\mathbf{N}} : \mathbf{E} : \mathbf{D}}{M^p + \bar{\mathbf{N}} : \mathbf{E} : \bar{\mathbf{N}}} \mathbf{E} : \bar{\mathbf{N}} \quad (36)$$

負荷基準は次式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D}^p \neq \mathbf{0} : A > 0, \\ \mathbf{D}^p = \mathbf{0} : \text{otherwise} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

現応力が常に負荷面の役割を有する下負荷面を通過するので, 降伏判定は不要である.

非比例負荷においては, 下負荷面の接線方向の応力速度による非弾性ひずみ速度つまり接線非弾性ひずみ速度を考慮する必要がある. 接線非弾性ひずみ速度を導入すれば, 式(34)および(36)は次式となる.

$$\mathbf{D} = \mathbf{E}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\bar{\mathbf{N}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}}{M^p} \bar{\mathbf{N}} + \frac{\xi R^r}{2G} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_t \quad (38)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E} \mathbf{D} - \frac{\bar{\mathbf{N}} : \mathbf{E} : \mathbf{D}}{M^p + \bar{\mathbf{N}} : \mathbf{E} : \bar{\mathbf{N}}} \mathbf{E} : \bar{\mathbf{N}} - \frac{2G\xi R^r}{1 + \xi R^r} \mathbf{D}_t' \quad (39)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_n' &\equiv \bar{\mathbf{n}}' \otimes \bar{\mathbf{n}}' \dot{\boldsymbol{\sigma}} = (\bar{\mathbf{n}}' : \dot{\boldsymbol{\sigma}}) \bar{\mathbf{n}}' \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}}_t' &\equiv \bar{\mathbf{I}}_t' : \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}' - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_n' \quad (\{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}})/\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}\} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}_t' = 0) \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

$$\bar{\mathbf{D}}_t' \equiv \bar{\mathbf{I}}_t' : \mathbf{D} = \mathbf{D}' - (\bar{\mathbf{n}}' : \mathbf{D}') \bar{\mathbf{n}}' \quad (41)$$

$$\bar{\mathbf{n}}' \equiv \left(\frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \right)' / \left\| \left(\frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \right)' \right\| \quad (\|\bar{\mathbf{n}}'\| = 1) \quad (42)$$

$$\bar{\mathbf{I}}_t' \equiv \bar{\mathbf{I}}' - \bar{\mathbf{n}}' \otimes \bar{\mathbf{n}}' \quad (43)$$

$$(\bar{I}_{ijkl}' \equiv \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} - \bar{n}_{ij}'\bar{n}_{kl}') \quad (44)$$

$$\bar{\mathbf{I}}' \equiv \bar{\mathbf{I}} - \frac{1}{3}\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad (45)$$

$$(\bar{I}_{ijkl}' \equiv \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}) \quad (45)$$

$$\bar{I}_{ijkl}' \equiv \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (45)$$

$G = E/\{2(1+\nu)\}$ はせん断弾性係数, ξ および $\tau (\geq 1)$ は材料定数である. $(\cdot)'$ は偏差部分を表す.

4. 再負荷特性の改善

式(24)における U が正規降伏比 R のみの関数であるとすれば, 初期条件 $\varepsilon^p = \varepsilon_0^p : R = R_0$ に対して, 固有の関係式 $\varepsilon^p - \varepsilon_0^p = f(R - R_0)$ ($\varepsilon^p \equiv \sqrt{2/3} \int \|\mathbf{D}^p\| dt$) が成り立つ. したがって, R の所定の変化の間に生じる塑性ひずみの大きさは, 単調負荷, 再負荷, 除荷, 逆負荷などの負荷状態によらず同じであることになる. これは, 特に再負荷曲線の先行初期負荷曲線への復帰が非現実的に緩慢で過度に開いたヒステリシスループをもたらし, また, 降伏面近傍での応力一定繰返し負荷においては, 著しく過大な塑性ひずみの集積つまり力学的ラチェット現象の予測につながる. そこで, この欠点を以下により改善しよう.

初期等方性材料においては, Masing 則⁽¹²⁾に見られるように, 初期負荷曲線の曲率に比して, 逆負荷曲線の曲率は小さく, さらに, 部分除荷-再負荷曲線の曲率は最も大きいといえる. なお, 下負荷面モデルにおいては, 相似中心は, 初期負荷状態においては降伏面の最内部にあるが, 負荷とともに正規降伏面に近づく. なお, 相似中心 $\mathbf{s}$ の正規降伏面への接近の度合は式(14)の相似中心降

伏比 $\mathcal{H}_s$ で表し得る。また、応力は、部分除荷後の再負荷過程および逆負荷過程においては、相似中心面のそれぞれ外側および内側に存在する。応力がどの程度、相似中心面の外向きまたは内向きにあるかは、相似中心点における外向き法線方向テンソルと相似中心点から応力に向かう方向テンソルのスカラー積、つまり、次の変数 S_σ で評価し得る。

$$S_\sigma \equiv \hat{\mathbf{n}}_s : \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_r}{\|\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_r\|} \quad (-1 \leq S_\sigma \leq 1) \quad (46)$$

$$= \begin{cases} \hat{\mathbf{n}}_s : \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}'}{\|\tilde{\boldsymbol{\sigma}}'\|} & \text{for } \text{tr } \hat{\mathbf{n}}_s = 0 \\ \pm \sqrt{3} \frac{\tilde{\sigma}_m}{\|\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\|} (= \pm \frac{\tilde{\sigma}_m}{|\tilde{\sigma}_m|} \text{ for } \tilde{\boldsymbol{\sigma}}' = \mathbf{0}) & \text{for } \hat{\mathbf{n}}_s = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{I} \end{cases}$$

ここに、

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_r \equiv \tilde{\boldsymbol{\sigma}}' + \left| \frac{1}{\sqrt{3}} \text{tr } \hat{\mathbf{n}}_s \right| \tilde{\sigma}_m \mathbf{I} \quad (47)$$

$$= \begin{cases} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}' & \text{for } \text{tr } \hat{\mathbf{n}}_s = 0 \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}} & \text{for } \hat{\mathbf{n}}_s = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{I} \end{cases}$$

$$\tilde{\sigma}_m \equiv \frac{1}{3} \text{tr } \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \quad \tilde{\boldsymbol{\sigma}}' \equiv \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \tilde{\sigma}_m \mathbf{I} \quad (48)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_s \equiv \frac{\partial f(\hat{\mathbf{s}})}{\partial \hat{\mathbf{s}}} / \left\| \frac{\partial f(\hat{\mathbf{s}})}{\partial \hat{\mathbf{s}}} \right\| \quad (\|\hat{\mathbf{n}}_s\| = 1) \quad (49)$$

$\hat{\mathbf{n}}_s$ は相似中心面上の現相似中心点における単位外向き法線を示す。変数 S_σ は塑性非圧縮性金属 ($\text{tr } \hat{\mathbf{n}}_s = 0$) から土の等方圧密 ($\hat{\mathbf{n}}_s = \pm \mathbf{I}/\sqrt{3}$) にわたる一般変形挙動に適用し得ると思われる。

以上の変数を導入して、式(26)における材料パラメータ u を次のように拡張する。

$$u = u_0 \exp(u_s \mathcal{H}_s S_\sigma) \quad (50)$$

$$= \begin{cases} u_0 \exp(u_s) & \text{for } \mathcal{H}_s = 1 \text{ and } S_\sigma = 1 \\ u_0 & \text{for } \mathcal{H}_s = 0 \text{ or } S_\sigma = 0 \\ u_0 \exp(-u_s) & \text{for } \mathcal{H}_s = 1 \text{ and } S_\sigma = -1 \end{cases}$$

ここに、 u_0 および u_s は材料定数であるが、前者は u の平均値に相当する。これにより、 u は負荷方向に増大し、その逆負荷方向には低下する。ゆえに、部分除荷後の再負荷曲線が初期負荷曲線に速やかに戻る現象が現実的に表現される。また、降伏面近傍の繰返し負荷における塑性ひずみの集積が抑制される。

5. 金属の材料関数

Mises 降伏条件に基づく等方・移動硬化材料の負

荷および相似中心面関数は、次式で与えられる。

$$\frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} = \left(\frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \right)' = \sqrt{\frac{3}{2}} \bar{\mathbf{n}}' = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}'}{\|\bar{\boldsymbol{\sigma}}'\|} \quad (51)$$

$$f(\hat{\mathbf{s}}) = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\hat{\mathbf{s}}'\|, \quad \frac{\partial f(\hat{\mathbf{s}})}{\partial \hat{\mathbf{s}}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\hat{\mathbf{s}}'}{\|\hat{\mathbf{s}}'\|} \quad (52)$$

また、硬化関数の具体形は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} F(\varepsilon^{pe}) &= F_0 [1 + h_1 \{1 - \exp(-h_2 H)\}], \\ F' &= F_0 h_1 h_2 \exp(-h_2 H), \\ \dot{H} = \dot{\varepsilon}^{EP} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \|\mathbf{D}^P\|, \quad h = \sqrt{\frac{2}{3}} \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

ここに、 h_1, h_2 は材料定数である。

移動硬化変数の発展則は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\alpha}} &= a_\alpha \left(r_\alpha F \bar{\mathbf{N}} - \sqrt{\frac{2}{3}} \boldsymbol{\alpha} \right) \|\mathbf{D}^P\| \\ &= a_\alpha \left(r_\alpha F \frac{\partial f(\bar{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} - \boldsymbol{\alpha} \right) \dot{\varepsilon}^{EP} \end{aligned} \quad (54)$$

$$\mathbf{a} = a_\alpha \left(r_\alpha F \bar{\mathbf{N}} - \sqrt{\frac{2}{3}} \boldsymbol{\alpha} \right) \quad (55)$$

ここに、 a_α および r_α は材料定数である。式(54)は、単軸負荷状態において、 $d\boldsymbol{\alpha}_a = a_\alpha (r_\alpha F \mp \boldsymbol{\alpha}_a) d\varepsilon_a^p$ (+ : 引張, - : 圧縮, $(\cdot)_a$: 軸方向成分) となる。

式(51)および(52)を式(14)および(50)に代入して、次の諸式を成り立つ。

$$\mathcal{H}_s = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\|\hat{\mathbf{s}}'\|}{F}, \quad \hat{\mathbf{n}}_s = \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}'}{\|\tilde{\boldsymbol{\sigma}}'\|} \quad (56)$$

$$u = u_0 \exp \left(u_s \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\|\hat{\mathbf{s}}'\|}{F} : \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}'}{\|\tilde{\boldsymbol{\sigma}}'\|} \right) \quad (57)$$

式(51), (53)および(55)を式(20)および(32)に代入して、相似中心の発展則および塑性係数は次式で表される。

$$\dot{\hat{\mathbf{s}}} = \|\mathbf{D}^P\| \left\{ c \left(\frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}{R} - \frac{\hat{\mathbf{s}}}{\chi} \right) + \mathbf{a} + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{F'}{F} \hat{\mathbf{s}} \right\} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} M^P &\equiv \frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}'}{\|\bar{\boldsymbol{\sigma}}'\|} : \left\{ \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{F'}{F} \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{a} + \frac{U}{R} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \right. \\ &\quad \left. + c(1-R) \left(\frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}{R} - \frac{\hat{\mathbf{s}}}{\chi} \right) \right\} \end{aligned} \quad (59)$$

6. 繰返し等方硬化鈍化の導入

金属の等方硬化は相当塑性ひずみで生じるが、除荷後の再降伏の初期段階に相当塑性ひずみの進展にかかわらず、単調負荷過程に比べて等方硬化の進展が鈍る現象が観察される。これは、再降伏が繰り返される繰返し負荷現象に著しい影響を与える。特に、ひずみ振幅一定の繰返し負荷に

おいては、ついには等方硬化が飽和するに至る。このような現象を表現するため、Chaboche ら⁽¹¹⁾による“塑性ひずみ記憶面の概念を修正して、Ohno⁽²³⁾により、塑性ひずみ空間において、塑性ひずみがある領域内にあるときには等方硬化が進まず、また、その領域が繰返し負荷とともに拡大する“等方非硬化領域”つまり“繰返し等方硬化鈍化”の概念が提案された。これは、応力が或る領域の境界に達すると塑性変形が生じるとする降伏面と類似の考えである。その後、Yoshida and Uemori^{(24),(25)}は、塑性ひずみを用いず、背応力が応力空間におけるある領域内にあるときには等方硬化が生じないという考えに基づく定式化を行っているが、移動硬化の生じない材料においては、等方硬化が鈍化する現象を表現できないことになる。これらの所論は、次のような欠点を有する。

1. 塑性ひずみや背応力が非硬化領域の境界に達すると、急に等方硬化が開始するとしており、滑らか条件^{(14),(15),(16)}に抵触する。また、これにより、滑らかな応力-ひずみ曲線は表現されない。
2. 塑性ひずみや背応力がこの境界に達したか否かの判定が必要である。
3. 塑性ひずみや背応力が非硬化領域から飛び出して行かないように引き戻す数値計算処理が求められる。

以下では、下負荷面の概念に基づいて、これらの不備を改善した等方硬化飽和現象の合理的定式化を示す。

塑性ひずみ空間において、塑性ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ が或る面内に有るときには等方硬化の進展が鈍化すると仮定し、その面を“正規等方硬化面”と称し、次式で表されたとする。

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}^p) = K \quad (60)$$

ここに、

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p \equiv \boldsymbol{\varepsilon}^p - \hat{\boldsymbol{\alpha}} \quad (61)$$

K および $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ は、等方硬化面の大きさおよび中心を表す内部変数であるが、これらの発展則は後述する。なお、Mises 材料に対して関数 $f(\boldsymbol{\varepsilon}^p)$ の具体形は次式で与えられる。

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}^p) = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\boldsymbol{\varepsilon}^p\| \quad (62)$$

また、現塑性ひずみ点 $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ を通って、正規等方硬化面に相似な形状・方向をもつ次式の“下等方硬化面”を導入しよう。

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}^p) = \hat{R}K \quad (63)$$

ここに、 $\hat{R}$ ($0 \leq \hat{R} \leq 1$) は、正規等方硬化面に対する下等方硬化面の大きさの比で、塑性ひずみの正規等方硬化面への接近の度合を表す。これを“正規等方硬化比”と呼び、既知変数 $\boldsymbol{\varepsilon}^p$, $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$, K を用いて $\hat{R} = f(\boldsymbol{\varepsilon}^p)/K$ から算定される。

下等方硬化面式(63)を物質時間微分して次式を得る。

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{\varepsilon}^p)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} : \mathbf{D}^p - \frac{\partial f(\boldsymbol{\varepsilon}^p)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} : \dot{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} = \hat{R} \dot{K} + \dot{\hat{R}} K \quad (64)$$

さて、正規等方硬化面の大きさ K の発展則の定式化に当って、次のように仮定する。

- 1) 正規等方硬化面は、塑性ひずみ速度が下等方硬化面の外向きに生じるときのみ膨張する。したがって、

$$\left. \begin{aligned} \dot{K} &> 0 \text{ for } \frac{\partial f(\boldsymbol{\varepsilon}^p)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} : \mathbf{D}^p > 0 \ (\hat{R} > 0) \\ \dot{K} &= 0 \text{ for } \frac{\partial f(\boldsymbol{\varepsilon}^p)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} : \mathbf{D}^p \leq 0 \ (\hat{R} \leq 0) \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

- 2) 正規等方硬化面の膨張速度は、塑性ひずみが正規等方硬化面に近づくにつれて、つまり、正規等方硬化比とともに増大する。したがって、 $\dot{K}$ は $\hat{R}$ の単調増加関数である。
- 3) $\dot{\hat{R}} < 0$ のとき $\dot{K} = 0$ であることを考慮して、正規等方硬化面が非膨張状態から除々に膨張し始めるため、つまり、滑らか条件を満たすためには、塑性ひずみが正規等方硬化面の中心にあるとき、膨張速度はゼロ、つまり、 $\hat{R} = 0$ のとき $\dot{K} = 0$ でなければならない。これらの仮定により、次の発展則を仮定する。

$$\begin{aligned} \dot{K} &= C \hat{R}^\zeta \left\langle \frac{\partial f(\boldsymbol{\varepsilon}^p)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} : \mathbf{D}^p \right\rangle \\ &= C \hat{R}^\zeta \left\langle \frac{\partial f(\boldsymbol{\varepsilon}^p)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} : \hat{\mathbf{N}} \right\rangle \|\mathbf{D}^p\| \end{aligned} \quad (66)$$

ここに、 C (≤ 1) および ζ (≥ 1) は材料定数である。

つぎに、等方硬化面の中心 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ の発展則の定式化に当って、次のように仮定する。

- 1) 等方硬化面の中心は、塑性ひずみ速度が下等方硬化面の外向きに生じるときのみ、移動する。つまり、

$$\left. \begin{aligned} \dot{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} &\neq \mathbf{0} \text{ for } \hat{\mathbf{N}} : \mathbf{D}^p > 0 \ (\hat{R} > 0) \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} &= \mathbf{0} \text{ for } \hat{\mathbf{N}} : \mathbf{D}^p \leq 0 \ (\hat{R} \leq 0) \end{aligned} \right\}$$

ここに、

$$\hat{\mathbf{N}} = \frac{\partial f(\hat{\mathbf{E}}^p)}{\partial \hat{\mathbf{E}}^p} / \left\| \frac{\partial f(\hat{\mathbf{E}}^p)}{\partial \hat{\mathbf{E}}^p} \right\| \quad (67)$$

- 2) 等方硬化面の中心の移動速度は, 正規等方硬化比とともに増大する. したがって, $\dot{\hat{\mathbf{a}}}$ は $\hat{R}$ の単調増加関数である.
- 3) $\dot{\hat{R}} < 0$ のとき $\dot{\hat{\mathbf{a}}} = \mathbf{0}$ であることを考慮して, 等方硬化面が停止状態から徐々に移動を開始するため, つまり, 滑らか条件を満たすためには, 塑性ひずみが正規等方硬化面の中心にあるとき, 移動速度はゼロ, つまり, $\dot{\hat{R}} = 0$ のとき $\dot{\hat{\mathbf{a}}} = \mathbf{0}$ でなければならない.
- 4) 等方硬化面の中心の移動方向は, 現塑性ひずみ点における下等方硬化面の外向き法線方向 $\hat{\mathbf{N}}$ である.

これらの仮定により, 次の発展則を仮定する.

$$\dot{\hat{\mathbf{a}}} = A \hat{R}^\zeta \langle \hat{\mathbf{N}} : \mathbf{D}^p \rangle \hat{\mathbf{N}} \quad (68)$$

ここに, A は材料定数であるが, 以下に, 適応条件を満たすように定式化される.

式(66)および(68)を適応条件式(64)に代入して次式を得る.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\hat{\mathbf{E}}^p)}{\partial \hat{\mathbf{E}}^p} : \mathbf{D}^p - \frac{\partial f(\hat{\mathbf{E}}^p)}{\partial \hat{\mathbf{E}}^p} : A \hat{R}^\zeta \langle \hat{\mathbf{N}} : \mathbf{D}^p \rangle \hat{\mathbf{N}} \\ = \hat{R} C \hat{R}^\zeta \left\langle \frac{\partial f(\hat{\mathbf{E}}^p)}{\partial \hat{\mathbf{E}}^p} : \mathbf{D}^p \right\rangle + \dot{\hat{R}} K \end{aligned} \quad (69)$$

本式に, $\hat{R} = 1$ において $\dot{\hat{R}} = 0$ でなければならないことを考慮すれば, 次式が得られる.

$$A = 1 - C \quad (70)$$

本式を式(68)に代入して, 等方硬化面の中心の発展則が次のように決定される.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{a}}} &= (1 - C) \hat{R}^\zeta \langle \hat{\mathbf{N}} : \mathbf{D}^p \rangle \hat{\mathbf{N}} \\ &= (1 - C) \hat{R}^\zeta \langle \hat{\mathbf{N}} : \hat{\mathbf{N}} \rangle \|\mathbf{D}^p\| \hat{\mathbf{N}} \end{aligned} \quad (71)$$

正規等方硬化面は, $C = 1$ の場合には, 移動せずに膨張し, $C = 0$ の場合には, 逆に膨張せずに移動する. したがって, 正規等方硬化面は, これらの両極限状態の状態で変化するとし, 次式を仮定する.

$$0 \leq C \leq 1 \quad (72)$$

なお, 適応条件式(64)に K および $\hat{\mathbf{a}}$ の発展式(69)および(71)を代入すれば,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{R}} &= \frac{1}{K} \left(\left\langle \frac{\partial f(\hat{\mathbf{E}}^p)}{\partial \hat{\mathbf{E}}^p} : \mathbf{D}^p \right\rangle - \frac{\partial f(\hat{\mathbf{E}}^p)}{\partial \hat{\mathbf{E}}^p} : \dot{\hat{\mathbf{a}}} - \hat{R} \dot{\hat{K}} \right) \\ &= \frac{1}{K} \left(\left\langle \frac{\partial f(\hat{\mathbf{E}}^p)}{\partial \hat{\mathbf{E}}^p} : \mathbf{D}^p \right\rangle \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial f(\hat{\mathbf{E}}^p)}{\partial \hat{\mathbf{E}}^p} : (1 - C) \hat{R}^\zeta \langle \text{tr}(\hat{\mathbf{N}} \hat{\mathbf{N}}) \rangle \|\mathbf{D}^p\| \hat{\mathbf{N}} \right. \end{aligned}$$

$$\left. - \hat{R} C \hat{R}^\zeta \left\langle \frac{\partial f(\hat{\mathbf{E}}^p)}{\partial \hat{\mathbf{E}}^p} : \hat{\mathbf{N}} \right\rangle \|\mathbf{D}^p\| \right)$$

により, 次式を得る.

$$\dot{\hat{R}} = \frac{1}{K} \left\langle \frac{\partial f(\hat{\mathbf{E}}^p)}{\partial \hat{\mathbf{E}}^p} : \mathbf{D}^p \right\rangle [1 - \{1 - C(1 - \hat{R})\} \hat{R}^\zeta] \quad (73)$$

したがって, 式(72)に留意して,

$$\frac{\dot{\hat{R}}}{\|\mathbf{D}^p\|} = \begin{cases} = \frac{1}{K} \left\langle \frac{\partial f(\hat{\mathbf{E}}^p)}{\partial \hat{\mathbf{E}}^p} : \hat{\mathbf{N}} \right\rangle & \text{for } \hat{R} = 0 \\ < \frac{1}{K} \left\langle \frac{\partial f(\hat{\mathbf{E}}^p)}{\partial \hat{\mathbf{E}}^p} : \hat{\mathbf{N}} \right\rangle & \text{for } \hat{R} < 1 \\ = 0 & \text{for } \hat{R} = 1 \\ < 0 & \text{for } \hat{R} > 1 \end{cases} \quad (74)$$

が成り立つ. なお, 塑性構成式の定式化においては, まず, 正規降伏比の発展則(24)が仮定され, それを下負荷面の適応条件に組み込むが, 以上においては, まず, 正規等方硬化面の大きさおよび移動の発展則を定式化し, これらを下負荷等方硬化面の適応条件(64)に代入することにより, 正規等方硬化比 $\hat{R}$ の発展式(73)が得られる.

さて, 等方硬化の進展に対して, 次のように仮定しよう.

- 1) 塑性ひずみ速度が下等方硬化面の外向きに生じるときのみ等方硬化が進展する. つまり,

$$\begin{cases} \dot{\hat{H}} > 0 & \text{for } \hat{\mathbf{N}} : \mathbf{D}^p > 0 \quad (\dot{\hat{R}} > 0) \\ \dot{\hat{H}} = 0 & \text{for } \hat{\mathbf{N}} : \mathbf{D}^p \leq 0 \quad (\dot{\hat{R}} \leq 0) \end{cases} \quad (75)$$

- 2) 塑性ひずみが正規等方硬化面に近づくにつれて, つまり, 正規等方硬化比が大になるにつれて, 等方硬化が顕著に進展する. したがって, $\dot{\hat{H}}$ は $\hat{R}$ の単調増加関数である.

- 3) $\dot{\hat{R}} < 0$ のとき $\dot{\hat{H}} = 0$ であることを考慮して, 等方硬化が停止状態から徐々に開始するため, つまり, 滑らか条件を満たすためには, 塑性ひずみが正規等方硬化面の中心にあるとき, 等方硬化の発展速度はゼロ, つまり, $\dot{\hat{R}} = 0$ のとき $\dot{\hat{H}} = 0$ でなければならない.

- 2) 塑性ひずみが正規等方硬化面上にあるとき ($\hat{R} = 1$), 単調負荷時の等方硬化則が成り立つ.

以上の仮定により, 式(53)₃を拡張して, 次の等方硬化則を仮定する.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{H}} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \hat{R}^\nu \langle \hat{\mathbf{N}} : \mathbf{D}^p \rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \hat{R}^\nu \langle \hat{\mathbf{N}} : \hat{\mathbf{N}} \rangle \|\mathbf{D}^p\| \\ h &= \sqrt{\frac{2}{3}} \hat{R}^\nu \langle \hat{\mathbf{N}} : \hat{\mathbf{N}} \rangle \end{aligned} \quad (76)$$

ここに, $\nu (\geq 1)$ は材料定数である.

等方非硬化領域の概念に伴って拡張された等方硬化則(76)および移動硬化則(55)を式(20)に用いて, 相似中心の移動則は次式で与えられる.

$$\dot{\mathbf{s}} = \|\mathbf{D}^p\| \left\{ c \left(\frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}{R} - \frac{\hat{\mathbf{s}}}{\chi} \right) + \mathbf{a} + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{F'}{F} \hat{R}^v \langle \hat{\mathbf{N}} : \bar{\mathbf{N}} \rangle \hat{\mathbf{s}} \right\} \quad (77)$$

また, 塑性係数式(59)は次式となる.

$$M^p = \frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}'}{\|\bar{\boldsymbol{\sigma}}'\|} : \left\{ \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{F'}{F} \hat{R}^v \langle \hat{\mathbf{N}} : \bar{\mathbf{N}} \rangle \hat{\mathbf{g}} + \mathbf{a} + \frac{U}{R} \tilde{\mathbf{g}} + c(1 - \bar{R}) \left(\frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}{R} - \frac{\hat{\mathbf{s}}}{\chi} \right) \right\} \quad (78)$$

以上においては, どのようにして塑性ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ を算定するかという問題が残されている.

塑性ひずみ速度 $\mathbf{D}^p$ は剛体回転に独立で客観性を有し, 構成関係において, 共回転応力速度 $\dot{\mathbf{g}}$ に関係付けられる. したがって, 式(3)において, $\mathbf{T}$ を塑性ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ とみなすとき, その共回転速度 $\dot{\mathbf{T}}$ は塑性ひずみ速度 $\mathbf{D}^p$ と見なし得る. つまり,

$$\mathbf{D}^p = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\varepsilon}^p + \boldsymbol{\varepsilon}^p \boldsymbol{\omega} \quad (79)$$

これより, 塑性ひずみは次式で与えられる.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \int (\mathbf{D}^p - \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\varepsilon}^p + \boldsymbol{\varepsilon}^p \boldsymbol{\omega}) dt \quad (80)$$

文 献

- (1) Drucker, D.C., Conventional and unconventional plastic response and representation, *Applied Mechanics Reviews* (ASME), Vol. 41 (1988), pp. 151-167.
- (2) Prager, W., A new methods of analyzing stresses and strains in work hardening plastic solids, *Journal of Applied Mechanics* (ASME), Vol. 23 (1956), pp. 493-496.
- (3) Armstrong, P.J. and Frederick, C.O., A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect, *CEGB Report RD/B/N 731* (1966).
- (4) Hashiguchi, K., Constitutive equations of elastoplastic materials with elastic-plastic transition, *Journal of Applied Mechanics* (ASME), Vol. 47 (1980), pp. 266-272.
- (5) Hashiguchi, K., Description of inherent/induced anisotropy of soils: Rotational hardening rule with objectivity, *Soils and Foundations*, Vol. 41, No. 6 (2001), pp. 139-145.
- (6) Hashiguchi, K. and Ozaki, S., Constitutive equation for friction with transition from static to kinetic friction and recovery of static friction, *Int. J. Plasticity*, Vol. 24 (2008), pp. 2102-2124.
- (7) Mroz, Z., On the description of anisotropic workhardening, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 15 (1967), pp. 163-175.
- (8) Iwan, W.D., On a class of models for the yielding behavior of continuous and composite systems, *Journal of Applied Mechanics* (ASME), Vol. 34 (1967), pp. 612-617.
- (9) Dafalias, Y. F. and Popov, E. P., A model of nonlinearly hardening materials for complex loading, *Acta Mechanica*, Vol. 23 (1975), pp. 173-192.
- (10) Krieg, R.D., A practical two surface plasticity theory, *Journal of Applied Mechanics* (ASME), Vol. 42 (1975), pp. 641-646.
- (11) Chaboche, J.L., Dang-Van, K. and Cordier, G., Modelization of the strain memory effect on the cyclic hardening of 316 stainless steel, *Transactions of the 5th International Conference of SMIRT*, Berlin, Division L., Paper No. L. 11/3, (1979).
- (12) Masing, G., Eigenspannungen und Verfestigung beim Messing, *Proceedings of 2nd International Congress of Applied Mechanics* (1926), Zurich, pp. 332-335.
- (13) Mroz, Z., Norris, V.A. and Zienkiewicz, O.C., An anisotropic, critical state model for soils subject to cyclic loading, *Geotechnique*, Vol. 31 (1981), pp. 451-469.
- (14) Hashiguchi, K., Fundamental requirements and formulation of elastoplastic constitutive equations with tangential plasticity, *International Journal of Plasticity*, Vol. 9 (1993), pp. 525-549.
- (15) Hashiguchi, K., The extended flow rule in plasticity, *International Journal of Plasticity*, Vol. 13 (1997), pp. 37-58.
- (16) Hashiguchi, K., Fundamentals in constitutive equation: continuity and smoothness conditions and loading criterion, *Soils and Foundations*, Vol. 40(3) (2000), pp. 155-161.
- (17) Prager, W., Recent development in the mathematical theory of plasticity, *Journal of Applied Mechanics* (ASME), Vol. 20 (1949), pp. 235-241.
- (18) Hashiguchi, K., The tangential plasticity, *Metals and Materials*, Vol. 4 (1998), pp. 652-656.
- (19) Hashiguchi, K. and Tsutsumi, S., Elastoplastic constitutive equation with tangential stress rate effect, *International Journal of Plasticity*, Vol. 17 (2001), pp. 117-145.
- (20) Hashiguchi, K., Extended subloading surface model with tangential stress rate effect, *Proceedings of International Conference of Computational and Experimental Engineering Sciences*, India, (2005), pp. 1410-1415.
- (21) Hashiguchi, K., Subloading surface model in unconventional plasticity, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 25 (1989), pp. 917-945.
- (22) Tsutsumi, S., Toyosada, M. and Hashiguchi, K., Extended subloading surface model incorporating elastic limit concept, *Proceedings of Plasticity 2006*, Halifax (2006), pp. 217-219.
- (23) Ohno, N., A constitutive model of cyclic plasticity with a non-hardening strain region, *Journal of Applied Mechanics* (ASME), Vol. 49 (1982), pp. 721-727.
- (24) Yoshida, F. and Uemori, T., A large-strain cyclic plasticity describing the Bauschinger effect and workhardening stagnation, *International Journal of Plasticity*, Vol. 18 (2002), pp. 661-686.
- (25) Yoshida, F. and Uemori, T., A model of large-strain cyclic plasticity and its application to springback simulation, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 45 (2003), pp. 1687-1702.