SMP 複合材料の形状固定性のマイクロ
メカニクスによるモデル化*荒木 栄 敏^{*1}, 樋口 彰 彦^{*2}

Micromechanical Modeling of Shape Fixity Effect of a SMP Composite

Shigetoshi ARAKI^{*3} and Akihiko HIGUCHI^{*3} Department of Mechanical and System Engineering, Kyoto Institute of Technology,
Matsugasaki, Sakyo-ku, Kyoto-shi, Kyoto, 606-8585 Japan

Deformation induced in a shape memory polymer in its rubber state under an applied load may be fixed at a lower degree of temperature than its glass transition temperature when the load is removed. In this study, micromechanical modeling of such a shape fixity effect of the SMP is examined and its magnitude of shape fixity coefficients, which implies the ratio of the residual strain to the initial applied strain in the rubber state, is expressed as a function of the elastic moduli of the SMP. Moreover, a SMP composite material containing many non-shape fixed fillers is modeled by using the eigenstrains for constituents of the composite. It is demonstrated that its macroscopic shape fixity coefficient can be expressed in terms of these eigenstrains successfully. The magnitude of the shape fixity coefficient of the composite material decreases with increase in the aspect ratio of the constitutive spheroidal reinforcement.

Key Words: Micromechanics, Equivalent Inclusion Method, Shape Fixity Effect, SMP Composite Material

1. 緒 言

1980 年代後半に Rogers らによってその概念が提案されたインテリジェントマテリアル⁽¹⁾の一つに形状記憶ポリマー(Shape Memory Polymer)がある⁽²⁾. SMP は形状記憶合金と同じように形状記憶効果を有するが, これに加えて形状固定性も有する材料である. 例えば, TiNi 合金の形状回復は熱弾性マルテンサイト変態によって生じるのに対して, SMP のそれは高分子材料特有のガラス転移をその駆動力とするものであり, 既に芝刈機のオートチョークなどに応用されている⁽²⁾. このような SMP を用いたインテリジェントマテリアルを創製するために, その基本的な力学特性や構成式などについて様々な検討がなされている^{(3)~(6)}. 著者らは, ガラス転移点の設計の自由度を利用して, 種々のガラス転移点を有する SMP 粒子を SMP 母材に混入した複合材料に対して剛性解析を行っており, ガラス転移点分布を調整することで, 温度

に対して剛性を望みのままに変化させうる可能性を示唆している^{(7)~(9)}.

SMP の有するもう一つの特徴である形状固定性効果は, ガラスの転移点以上の温度でゴム状態にある SMP に変形を加え, これを保持したままガラス転移点以下の温度まで冷却することによって, その形状が固定されるというものである⁽³⁾⁽⁴⁾. このような形状固定性が生じる源は, ガラス転移点を挟んでその弾性係数が大きく変化することであり, 例えば, ゴム状態の SMP に炭素繊維などの柔軟な繊維を混ぜ合わせて複合化し, これを好みの形状に成形した後, これを冷却することで, 複雑形状で高い剛性を有する構造部材をより安易にかつ安価に作製しようという試みがなされている⁽¹⁰⁾. しかしながら, このような SMP 複合材料の形状固定性に対する研究は, わずかにポリウレタン系 SMP 単体に対する実験的評価は行われているものの, これを力学的に取り扱ったものは著者の知る限り存在しないのが実状である.

そこで本研究では, SMP 母材に炭素繊維などの形状固定効果を持たない強化基材を含む複合材料に対して, マイクロメカニクスの手法を用いてこれをモデル化し, その巨視的な形状固定性効果を定式化することを目的とする. さらに, 得られた結果を用いて具体

* 原稿受付 2010 年 2 月 9 日.

^{*1} 正員, 京都工芸繊維大学大学院 工芸科学研究科機械システム工学専攻 (〒606-8585 京都市左京区松ヶ崎御所海道町).^{*2} 学生員, 京都工芸繊維大学大学院 工芸科学研究科機械システム工学専攻.

E-mail: araki@mech.kit.ac.jp

的に数値計算を行い、強化基材の含有率や形状が形状固定性に与える効果を明らかにする。

2. SMP 単体の形状固定性のモデル化

図1は、SMP 単体に生じる形状固定性効果の模式図である。まず、(I)で示したゴム状態のSMPに作用応力 $\sigma_{33}^{0(I)}$ を負荷して変形を与え、この変形を保ったまま、SMPのガラス転移点以下の温度まで冷却する。この(II)の状態から、温度を保ったまま除荷したものが状態(III)である。状態(II)から状態(III)にかけて、除荷に伴う弾性変形の回復が生じるものの、状態(I)で与えた変形の全てが回復するわけではなく、ある割合が固定させることになる。このような効果はSMPの形状固定性効果と呼ばれている。

図1のモデルを用いて、形状固定される割合を検討する。状態(I)におけるSMPの体積弾性係数と剛性率をそれぞれ $K^{(I)}$ 、 $\mu^{(I)}$ 、ガラス状態でのそれらを $K^{(II)}$ 、 $\mu^{(II)}$ とおく。さらに、状態(II)において、SMP内の弾性ひずみの一部が固有ひずみ ε_{ij}^S に置き換わると考える。この固有ひずみ ε_{ij}^S が除荷後の状態(III)で残るひずみである。

状態(I)ではSMPはゴム状態であるため、 $K^{(I)}$ は無限大となる。したがって、この状態での全ひずみの x_3 方向の偏差成分 $\varepsilon_{33}^{(I)}$ と静水圧成分 $\varepsilon_{ii}^{(I)}$ は、それぞれ、

$$\varepsilon_{33}^{(I)} = \frac{\sigma_{33}^{0(I)}}{2\mu^{(I)}}, \quad \varepsilon_{ii}^{(I)} = 0 \quad (1\cdot a)$$

となる。また、状態(II)と状態(III)における全ひずみは、それぞれ、

$$\varepsilon_{33}^{(II)} = \frac{\sigma_{33}^{0(II)}}{2\mu^{(II)}} + \varepsilon_{33}^S, \quad \varepsilon_{ii}^{(II)} = \frac{\sigma_{ii}^{0(II)}}{3K^{(II)}} + \varepsilon_{ii}^S \quad (1\cdot b)$$

$$\varepsilon_{33}^{(III)} = \varepsilon_{33}^S, \quad \varepsilon_{ii}^{(III)} = \varepsilon_{ii}^S \quad (1\cdot c)$$

となる。状態(I)から状態(II)にかけて変形が保持されるので、式(1)から、

$$\frac{\sigma_{ii}^{0(II)}}{3K^{(II)}} + \varepsilon_{ii}^S = 0, \quad \frac{\sigma_{33}^{0(II)}}{2\mu^{(II)}} = \frac{\sigma_{33}^{0(I)}}{2\mu^{(I)}} + \varepsilon_{33}^S \quad (2)$$

Fig. 1 Shape fixity effect of a monolithic SMP

なる関係を得る。この状態では未知量の数が多すぎるため、状態(I)と状態(II)で作用応力が変化しない、すなわち、 $\sigma_{33}^{0(I)} = \sigma_{33}^{0(II)}$ と仮定する。このとき、式(2)の関係を満足する $\sigma_{ii}^{0(II)}$ と ε_{ii}^S の関係は無数に存在するが、状態(I)で体積変化が生じないため、これに対応する作用応力の静水圧成分を零と置く。これにより、 $\varepsilon_{ii}^S = 0$ となるため、これ以降は偏差成分にのみ着目することにする。

式(2)で $\sigma_{33}^{0(II)} = \sigma_{33}^{0(I)}$ とおき、式(1・a)を代入すると、

$$\varepsilon_{33}^S = \varepsilon_{33}^{(I)} \left(1 - \frac{\mu^{(I)}}{\mu^{(II)}} \right) \quad (3)$$

となる。さらに、式(1・c)に式(3)を代入すると、

$$\varepsilon_{33}^{(III)} = \varepsilon_{33}^{(I)} \left(1 - \frac{\mu^{(I)}}{\mu^{(II)}} \right) \quad (4)$$

を得る。今、SMP 単体に対して、状態(I)で与えた全ひずみの偏差成分と状態(III)で最終的に残る全ひずみの偏差成分の割合を形状固定性指数 α_{smp} と定義すると、式(4)より、

$$\alpha_{smp} = \frac{\varepsilon_{33}^{(III)}}{\varepsilon_{33}^{(I)}} = 1 - \frac{\mu^{(I)}}{\mu^{(II)}} \quad (5)$$

となる。ポリウレタン系のSMPでは、ゴム状態(I)での剛性率 $\mu^{(I)}$ に対してガラス状態での $\mu^{(II)}$ は、その値が30倍程度変化すると言われている⁽⁶⁾。これが図1に示した形状固定性の原因となっており、その形状固定の割合はほぼ100%に近いものであると報告されている⁽⁴⁾。式(5)に剛性率比 $\mu^{(I)}/\mu^{(II)} = 1/30$ を代入すると α_{smp} の値は約0.97となり、これと良く一致していることがわかる。

3. SMP 複合材料の形状固定性のモデル化

3.1 SMP 複合材料の解析モデル 図2は、SMP 母材中に強化基材を多数含む複合材料の模式図であり、それぞれの状態は図1に対応している。SMP 母材の弾性定数と固有ひずみ ε_{ij}^S はSMP 単体の場合と同じ記号を用いている。強化基材 Ω は、形状固定性を有さず、その形状は楕円体で一方に配列しているものとする。体積弾性係数と剛性率をそれぞれ K^* 、 μ^* とおく。また、作用応力については前章の仮定を踏襲し、状態(I)、状態(II)ともに σ_{ij}^0 と置いた。

3.2 状態(I)の巨視的全ひずみ 状態(I)における母材の応力-ひずみ関係式は、

$$\sigma_{ij}^0 + \bar{\sigma}_{ij}^{(I)} = 2\mu^{(I)}(\varepsilon_{ij}^{0(I)} + \varepsilon_{ij}^{(I)}) \quad (6\cdot a)$$

$$\sigma_{ii}^0 + \bar{\sigma}_{ii}^{(I)} = 3K^{(I)}(\varepsilon_{ii}^{0(I)} + \varepsilon_{ii}^{(I)}) \quad (6\cdot b)$$

となる。ここで作用応力と作用ひずみの間には、

Fig. 2 Shape fixity effect of a SMP composite containing many non-shape fixed fillers

$$\sigma_{ij}^0 = 2\mu^{(I)} \epsilon_{ij}^{0(I)}, \quad \sigma_{ii}^0 = 3K^{(I)} \epsilon_{ii}^{0(I)} \quad \dots\dots\dots (7)$$

なる関係がある。強化基材 Ω の等価式は、

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^0 + \bar{\sigma}_{ij}^{(I)} + \sigma_{ij}^{\infty(I)} &= 2\mu^* (\epsilon_{ij}^{0(I)} + \bar{\epsilon}_{ij}^{(I)} + \epsilon_{ij}^{(I)}) \\ &= 2\mu^{(I)} (\epsilon_{ij}^{0(I)} + \bar{\epsilon}_{ij}^{(I)} + \epsilon_{ij}^{(I)} - \epsilon_{ij}^{*(I)}) \quad \dots\dots\dots (8 \cdot a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ii}^0 + \bar{\sigma}_{ii}^{(I)} + \sigma_{ii}^{\infty(I)} &= 3K^* (\epsilon_{ii}^{0(I)} + \bar{\epsilon}_{ii}^{(I)} + \epsilon_{ii}^{(I)}) \\ &= 3K^{(I)} (\epsilon_{ii}^{0(I)} + \bar{\epsilon}_{ii}^{(I)} + \epsilon_{ii}^{(I)} - \epsilon_{ii}^{*(I)}) \quad \dots\dots\dots (8 \cdot b) \end{aligned}$$

となる。 $\sigma_{ij}^{\infty(I)}$ は固有応力であり、 $\epsilon_{ij}^{(I)}$ は母材と強化基材の弾性係数の違いを代行する等価固有ひずみである。 $\bar{\sigma}_{ij}^{(I)}$, $\bar{\epsilon}_{ij}^{(I)}$ は相互作用場であり、Mori-Tanaka の定理⁽¹¹⁾ より、

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij}^{(I)} &= -f' \sigma_{ij}^{\infty(I)} = 2\mu^{(I)} \bar{\epsilon}_{ij}^{(I)} \\ &= -2\mu^{(I)} f \left[\left(S_{ijkl} - \frac{1}{3} S_{mmkl} \right) \epsilon_{kl}^{*(I)} - \epsilon_{ij}^{*(I)} \right] \quad \dots\dots\dots (9 \cdot a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ii}^{(I)} &= -f \sigma_{ii}^{\infty(I)} = 3K^{(I)} \bar{\epsilon}_{ii}^{(I)} \\ &= -3K^{(I)} f (S_{iikl} \epsilon_{kl}^{*(I)} - \epsilon_{ii}^{*(I)}) \quad \dots\dots\dots (9 \cdot b) \end{aligned}$$

となる。ここで S_{ijkl} は強化基材の Eshelby テンソル、 f は体積含有率である。等価式(8)を解いて得られる等価固有ひずみ $\epsilon_{ij}^{*(I)}$ を用いると、状態(I)の巨視的全ひずみ $\bar{\epsilon}_{ij}^{(I)}$ は次式で与えられる。

$$\bar{\epsilon}_{ij}^{(I)} = \epsilon_{ij}^{0(I)} + f \epsilon_{ij}^{*(I)} \quad \dots\dots\dots (10)$$

3・3 特別な場合に対する等価固有ひずみの一般解

著者らは、既報⁽¹²⁾ で任意形状の楕円体強化基材を多

数含む複合材料を解析し、等価固有ひずみや巨視的弾性係数の一般解を求めている。しかしながら、この一般解は、図2に示した状態(I)のような非圧縮性母材などの特殊な状況を想定したものではなく、このような場合には適用できない解である。

今、考慮しなければならない特殊な状況を整理すると、

- 【1】 強化基材が空孔。
- 【2】 母材と強化基材の体積弾性係数が等しい。
- 【3】 母材と強化基材の剛性率が等しい。
- 【4】 母材と強化基材のポアソン比が等しい。
- 【5】 非圧縮性母材。
- 【6】 非圧縮性強化基材。

という6つの場合が考えられる。無論、これらが同時に生じる場合も想定しなければならない。しかしながら、【1】と【2】、【1】と【3】、【1】と【4】の組合せは当然除外して良く、また、【1】と【6】、すなわち非圧縮性空孔も物理的観点から除外できる。これらの状況を踏まえて既報で求めた一般解の修正を行うことにする。

図2の状態(I)において、強化基材 Ω が固有ひずみ ϵ_{ij}^p を有している場合の等価式は、

$$\begin{aligned} 2\mu^{(I)} \left\{ \epsilon_{ij}^{0(I)} + (1-f) \left[\left(S_{ijkl} - \frac{1}{3} S_{mmkl} \right) (\epsilon_{kl}^{*(I)} + \epsilon_{kl}^p) - (\epsilon_{ij}^{*(I)} + \epsilon_{ij}^p) \right] \right\} \\ = 2\mu^* \left\{ \epsilon_{ij}^{0(I)} + (1-f) \left[\left(S_{ijkl} - \frac{1}{3} S_{mmkl} \right) (\epsilon_{kl}^{*(I)} + \epsilon_{kl}^p) - (\epsilon_{ij}^{*(I)} + \epsilon_{ij}^p) \right] + \epsilon_{ij}^{*(I)} \right\} \quad \dots\dots\dots (11 \cdot a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3K^{(I)} \{ \epsilon_{ii}^{0(I)} + (1-f) [S_{iikl} (\epsilon_{kl}^{*(I)} + \epsilon_{kl}^p) - (\epsilon_{ii}^{*(I)} + \epsilon_{ii}^p)] \} \\ = 3K^* \{ \epsilon_{ii}^{0(I)} + (1-f) [S_{iikl} (\epsilon_{kl}^{*(I)} + \epsilon_{kl}^p) - (\epsilon_{ii}^{*(I)} + \epsilon_{ii}^p)] + \epsilon_{ii}^{*(I)} \} \quad \dots\dots\dots (11 \cdot b) \end{aligned}$$

となる。既報の結果⁽¹²⁾ を用いると、等価固有ひずみの偏差成分と静水圧成分は、

$$\epsilon_{ii}^{*(I)} + \epsilon_{ii}^p = -\frac{2(1-\nu^{(I)})}{3(1-f)D_1} \left[(1+\nu^{(I)})G_1 \left(\frac{\sigma_{ii}^0}{3K^{(I)}} - L_K \epsilon_{ii}^p \right) + (F_1 + 3D_{III}) \left(\frac{\sigma_{11}^0}{2\mu^{(I)}} - L_\mu' \epsilon_{11}^p \right) + F_3 \left(\frac{\sigma_{22}^0}{2\mu^{(I)}} - L_\mu' \epsilon_{22}^p \right) \right]$$

$$+ F_2 \left(\frac{\sigma_{33}^0}{2\mu^{(n)}} - L_{\mu'} \epsilon_{33}^p \right) \dots\dots\dots (12 \cdot a)$$

$$\epsilon_{ii}^{*(n)} + \epsilon_{ii}^p = -\frac{2(1-\nu^{(n)})}{3(1-f)D_i} \left\{ \frac{9}{2} D_{ii} \left(\frac{\sigma_{ii}^0}{3K^{(n)}} - L_K \epsilon_{ii}^p \right) + 3(1-2\nu^{(n)}) \left[G_1 \left(\frac{\sigma_{11}^0}{2\mu^{(n)}} - L_{\mu'} \epsilon_{11}^p \right) + G_2 \left(\frac{\sigma_{22}^0}{2\mu^{(n)}} - L_{\mu'} \epsilon_{22}^p \right) + G_3 \left(\frac{\sigma_{33}^0}{2\mu^{(n)}} - L_{\mu^{(n)}} \epsilon_{33}^p \right) \right] \right\} \dots\dots\dots (12 \cdot b)$$

となる。式(12)の分母の係数 D_i は、

$$D_i = L_i \left\{ (L_{ii} + H_i^e - 1)^2 - \left[\frac{3}{2} H_{ii}^e + \frac{2}{27} (1-2\nu^{(n)})^2 H_{iii}^e + \frac{2}{3} (1-2\nu^{(n)}) H_{iv}^e \right] \right\} - \frac{2}{9} (1-2\nu^{(n)}) (1+\nu^{(n)}) \\ \times \left[(L_{ii} - 1) H_{iii}^e + \frac{2}{3} (1-2\nu^{(n)}) H_{iv}^e + 3 H_{vi}^e \right] \dots\dots\dots (13)$$

であり、この式に含まれる係数 L_i と L_{ii} は、それぞれ、

$$L_i = \frac{3(1-\nu^{(n)})}{1-f} \frac{K^*}{K^* - K^{(n)}} - 2(1-2\nu^{(n)}) \dots\dots\dots (14 \cdot a)$$

$$L_{ii} = \frac{2(1-\nu^{(n)})}{1-f} \frac{\mu^*}{\mu^* - \mu^{(n)}} - \frac{1}{3} (1-2\nu^{(n)}) \dots\dots\dots (14 \cdot b)$$

である。なお、式(12)から式(14)で用いた係数 F_i , G_i , H_i^e などは既報⁽¹²⁾ で定めたものであり、付録にその定義を示す。

式(13)と式(14)より、前述の条件【2】と【3】の場合には、それぞれ L_i と L_{ii} は発散することになる。また、非圧縮性母材の場合【5】では L_i が零となり、これに伴って D_i も零となるため、結局、式(12)の等価固有ひずみは発散することになる。そこで、 L_i については、これを分母に含む新たな係数、

$$L_i^M = \frac{(1-2\nu^{(n)})}{L_i + 2(1-2\nu^{(n)})} = \frac{(1-f)}{3(1-\nu^{(n)})} \left[(1-2\nu^{(n)}) g^{(n)} - \frac{(1-2\nu^*)(1+\nu^{(n)})}{(1+\nu^*)} \right] \dots\dots\dots (15 \cdot a)$$

を定義する。この係数 L_i^M は、前述の【1】から【6】のいかなる場合にも発散することはない。また、 L_{ii} については、【3】の剛性率が同じ場合の発散を避けるために、

$$L_{ii}^M = (g^{(n)} - 1) L_{ii} \dots\dots\dots (15 \cdot b)$$

なる係数を定義する。ここで、

$$g^{(n)} = \mu^* / \mu^{(n)} \dots\dots\dots (16)$$

である。これらの係数を用いて、式(12)の等価固有ひずみの解に含まれる係数を整理することで、等価固有ひずみの解の発散を避けることができる。成分に依存しないものは、

$$D_i^M = \frac{(g^{(n)} - 1)^2 L_i^M}{(1-2\nu^{(n)})} D_i \\ = (g^{(n)} - 2L_i^M) D_{ii}^M - \frac{2}{9} (1+\nu^{(n)}) (g^{(n)} - 1) L_i^M \left\{ L_{ii}^M H_{iii}^e - (g^{(n)} - 1) \left[H_{iii}^e - \frac{2}{3} (1-2\nu^{(n)}) H_{iv}^e - 3 H_{vi}^e \right] \right\} \dots\dots\dots (17 \cdot a)$$

$$D_{ii}^M = (g^{(n)} - 1)^2 D_{ii} \\ = \{ L_{ii}^M + (g^{(n)} - 1)(H_i^e - 1) \}^2 - (g^{(n)} - 1)^2 \left[\frac{3}{2} H_{ii}^e + \frac{2}{27} (1-2\nu^{(n)})^2 H_{iii}^e + \frac{2}{3} (1-2\nu^{(n)}) H_{iv}^e \right] \dots\dots\dots (17 \cdot b)$$

$$D_{iii}^M = \frac{(g^{(n)} - 1) L_i^M}{(1-2\nu^{(n)})} D_{iii} = (g^{(n)} - 2L_i^M) [L_{ii}^M + (g^{(n)} - 1)(H_i^e - 1)] - \frac{1}{9} (1+\nu^{(n)}) (g^{(n)} - 1) L_i^M H_{iii}^e \dots\dots\dots (17 \cdot c)$$

$$D_{iv}^M = (g^{(n)} - 1) D_{iv} = L_{ii}^M + (g^{(n)} - 1)(H_i^e - 1) \dots\dots\dots (17 \cdot d)$$

であり、成分に依存するものは、

$$F_i^M = \frac{L_i^M}{(1-2\nu^{(n)})} F_i = \frac{2}{3} (1+\nu^{(n)}) L_i^M \left[(1-3H_i^e) - \frac{1}{3} H_{iii}^e \right] + 3(g^{(n)} - 2L_i^M) R_i \dots\dots\dots (18 \cdot a)$$

$$G_i^M = (g^{(n)} - 1) G_i = (1-3H_i^e) [D_{iv}^M + 3(g^{(n)} - 1) R_i] - (g^{(n)} - 1) \left[\frac{2}{9} (1-2\nu^{(n)}) H_{iii}^e + H_{iv}^e \right] \dots\dots\dots (18 \cdot b)$$

$$\xi_i^M = \frac{(g^{(n)} - 1) L_i^M}{(1-2\nu^{(n)})} \xi_i = (g^{(n)} - 1) F_i^M + 2(L_i^M G_i^M + D_{iii}^M) \dots\dots\dots (18 \cdot c)$$

$$\eta_i^M = \frac{(g^{(n)} - 1) L_i^M}{(1-2\nu^{(n)})} \eta_i = (g^{(n)} - 1) F_i^M - (L_i^M G_i^M + D_{iii}^M) \dots\dots\dots (18 \cdot d)$$

となる。これらの係数を用いると、式(12)の一般解は、

$$\epsilon_{ii}^{*(n)} + \epsilon_{ii}^p = -\frac{2(1-\nu^{(n)})}{3(1-f)D_i^M} \left\{ (g^{(n)} - 1) L_i^M G_i^M \left(\frac{\sigma_{ii}^0}{2\mu^{(n)}} - L_K^M \epsilon_{ii}^p \right) + [(g^{(n)} - 1) F_i^M + 3D_{iii}^M] \left[(g^{(n)} - 1) \frac{\sigma_{11}^0}{2\mu^{(n)}} - g^{(n)} \epsilon_{11}^p \right] \right\}$$

$$+(g^{(I)}-1)F_3^M\left[(g^{(I)}-1)\frac{\sigma_{22}^0}{2\mu^{(I)}}-g^{(I)'}\varepsilon_{22}^p\right]+(g^{(I)}-1)F_2^M\left[(g^{(I)}-1)\frac{\sigma_{33}^0}{2\mu^{(I)}}-g^{(I)'}\varepsilon_{33}^p\right]\} \dots\dots\dots (19\cdot a)$$

$$\varepsilon_{ii}^{*(I)}+\varepsilon_{ii}^p=-\frac{2(1-\nu^{(I)})L_1^M}{3(1-f)D_1^M}\left\{\frac{9D_{11}^M}{2(1+\nu^{(I)})}\left(\frac{\sigma_{ii}^0}{2\mu^{(I)}}-L_1^M\varepsilon_{ii}^p\right)+3\left\{G_1^M\left[(g^{(I)}-1)\frac{\sigma_{11}^0}{2\mu^{(I)}}-g^{(I)'}\varepsilon_{11}^p\right]\right.\right. \\ \left.\left.+G_2^M\left[(g^{(I)}-1)\frac{\sigma_{22}^0}{2\mu^{(I)}}-g^{(I)'}\varepsilon_{22}^p\right]+G_3^M\left[(g^{(I)}-1)\frac{\sigma_{33}^0}{2\mu^{(I)}}-g^{(I)'}\varepsilon_{33}^p\right]\right\}\right\} \dots\dots\dots (19\cdot b)$$

となる。他の成分は上式の下付添字(1, 2, 3)を循環置換することで求められる。なお、巨視的全ひずみは、この等価固有ひずみを用いて、

$$\bar{\varepsilon}_{ij}^{(I)}=\varepsilon_{ij}^{0(I)}+f(\varepsilon_{ij}^{*(I)}+\varepsilon_{ij}^p) \dots\dots\dots (20)$$

で与えられる。さらに、この一般解と式(15)～式(18)で定義した新しい係数を用いて巨視的弾性係数の一般解を表すと、

$$\frac{\bar{E}_{33}}{E}=\frac{1}{1-\frac{2(1-\nu^{(I)})f}{3(1-f)D_1^M}\left[\frac{3}{2}L_1^MD_{11}^M+(1-\nu^{(I)})(g^{(I)}-1)\xi_3^M\right]} \dots\dots\dots (21)$$

となる。

さて、図2に示した状態(I)の等価固有ひずみ $\varepsilon_{ij}^{*(I)}$ は、改良した一般解(19)に $\varepsilon_{ij}^p=0$ と $\nu^{(I)}=1/2$ を代入し、他と区別するために、新しく定義した係数の右肩に添字(I)を付加して、

$$\varepsilon_{33}^{*(I)}=-\frac{(g^{(I)}-1)}{6(1-f)D_1^{M(I)}\mu^{(I)}}\{L_1^{M(I)}G_3^{M(I)}\sigma_{ii}^0+(g^{(I)}-1)F_2^{M(I)'}\sigma_{11}^0+(g^{(I)}-1)F_1^{M(I)'}\sigma_{22}^0 \\ +[(g^{(I)}-1)F_3^{M(I)}+3D_{11}^{M(I)}]'\sigma_{33}^0\} \dots\dots\dots (22\cdot a)$$

$$\varepsilon_{ii}^{*(I)}=-\frac{L_1^{M(I)}}{2(1-f)D_1^{M(I)}\mu^{(I)}}\{D_{11}^{M(I)}\sigma_{ii}^0+(g^{(I)}-1)[G_1^{M(I)'}\sigma_{11}^0+G_2^{M(I)'}\sigma_{22}^0+G_3^{M(I)'}\sigma_{33}^0]\} \dots\dots\dots (22\cdot b)$$

となる。式(22)を式(10)に代入すると状態(I)の巨視的全ひずみが求まる。

3・4 状態(II)の巨視的全ひずみ 状態(II)では母材に固有ひずみ ε_{ij}^s が生じるため、応力-ひずみ関係式は、

$$\sigma_{ij}^0+\sigma_{ij}^{(II)}=2\mu^{(II)}(\varepsilon_{ij}^{0(II)}+\varepsilon_{ij}^{(II)}-\varepsilon_{ij}^s) \dots\dots\dots (23\cdot a)$$

$$\sigma_{ii}^0+\sigma_{ii}^{(II)}=3K^{(II)}(\varepsilon_{ii}^{0(II)}+\varepsilon_{ii}^{(II)}-\varepsilon_{ii}^s) \dots\dots\dots (23\cdot b)$$

となる。このような状態は直接解くことはできないため、材料全域に渡ってその全ひずみから ε_{ij}^s だけを取り去る。これにより、結局、強化基材内には固有ひずみ $-\varepsilon_{ij}^s$ が存在することになる。このとき、強化基材 Ω の等価式は、

$$\sigma_{ij}^0+\sigma_{ij}^{(II)}+\sigma_{ij}^{s(II)}=2\mu^{(II)}(\varepsilon_{ij}^{0(II)}+\varepsilon_{ij}^{(II)}+\varepsilon_{ij}^{(II)}+\varepsilon_{ij}^s)=2\mu^{(II)}(\varepsilon_{ij}^{0(II)}+\varepsilon_{ij}^{(II)}+\varepsilon_{ij}^{(II)}+\varepsilon_{ij}^s-\varepsilon_{ij}^{s(II)}) \dots\dots\dots (24\cdot a)$$

$$\sigma_{ii}^0+\sigma_{ii}^{(II)}+\sigma_{ii}^{s(II)}=3K^{(II)}(\varepsilon_{ii}^{0(II)}+\varepsilon_{ii}^{(II)}+\varepsilon_{ii}^{(II)}+\varepsilon_{ii}^s)=3K^{(II)}(\varepsilon_{ii}^{0(II)}+\varepsilon_{ii}^{(II)}+\varepsilon_{ii}^{(II)}+\varepsilon_{ii}^s-\varepsilon_{ii}^{s(II)}) \dots\dots\dots (24\cdot b)$$

となる。また、式(7)と同様に、

$$\sigma_{ij}^0=2\mu^{(II)'}\varepsilon_{ij}^{0(II)}, \quad \sigma_{ii}^0=3K^{(II)}\varepsilon_{ii}^{0(II)} \dots\dots\dots (25)$$

なる関係がある。状態(II)での等価固有ひずみ $\varepsilon_{ij}^{*(II)}$ は、改良した一般解(19)に $\varepsilon_{ii}^p=\varepsilon_{ii}^s=0$ と $\varepsilon_{ij}^p=-\varepsilon_{ij}^s$ を代入するとともに、右肩添字(I)を(II)に換えることで、

$$\varepsilon_{33}^{*(II)}-\varepsilon_{33}^s=-\frac{2(1-\nu^{(II)})}{3(1-f)D_1^{M(II)}}\left\{(g^{(II)}-1)L_1^{M(II)}G_3^{M(II)}\frac{\sigma_{ii}^0}{2\mu^{(II)}}+(g^{(II)}-1)F_2^{M(II)}\left[(g^{(II)}-1)\frac{\sigma_{11}^0}{2\mu^{(II)}}+g^{(II)'}\varepsilon_{11}^s\right]\right. \\ \left.+(g^{(II)}-1)F_1^{M(II)}\left[(g^{(II)}-1)\frac{\sigma_{22}^0}{2\mu^{(II)}}+g^{(II)'}\varepsilon_{22}^s\right]+[(g^{(II)}-1)F_3^{M(II)}+3D_{11}^{M(II)}]\left[(g^{(II)}-1)\frac{\sigma_{33}^0}{2\mu^{(II)}}+g^{(II)'}\varepsilon_{33}^s\right]\right\} \\ \dots\dots\dots (26\cdot a)$$

$$\varepsilon_{ii}^{*(II)}=-\frac{2(1-\nu^{(II)})L_1^{M(II)}}{(1-f)D_1^{M(II)}}\left\{\frac{3}{2(1+\nu^{(II)})}D_{11}^{M(II)}\frac{\sigma_{ii}^0}{2\mu^{(II)}}+G_1^{M(II)}\left[(g^{(II)}-1)\frac{\sigma_{11}^0}{2\mu^{(II)}}+g^{(II)'}\varepsilon_{11}^s\right]\right. \\ \left.+G_2^{M(II)}\left[(g^{(II)}-1)\frac{\sigma_{22}^0}{2\mu^{(II)}}+g^{(II)'}\varepsilon_{22}^s\right]+G_3^{M(II)}\left[(g^{(II)}-1)\frac{\sigma_{33}^0}{2\mu^{(II)}}+g^{(II)'}\varepsilon_{33}^s\right]\right\} \dots\dots\dots (26\cdot b)$$

となる。状態(II)での巨視的全ひずみは、式(26)の等価固有ひずみを用い、先に材料全域から差し引いた ε_{ij}^s を再び加えることで求まり、

$$\bar{\varepsilon}_{33}^{(II)}=\varepsilon_{33}^{0(II)}+f(\varepsilon_{33}^{*(II)}-\varepsilon_{33}^s)+\varepsilon_{33}^s \dots\dots\dots (27\cdot a)$$

$$\bar{\varepsilon}_{ii}^{(II)}=\varepsilon_{ii}^{0(II)}+f\varepsilon_{ii}^{*(II)} \dots\dots\dots (27\cdot b)$$

となる。

3・5 状態(III)の巨視的全ひずみ 状態(III)における母材の応力-ひずみ関係式は、

$$\sigma_{ij}^{(II)} = 2\mu^{(II)}(\epsilon_{ij}^{(II)} - \epsilon_{ij}^s) \quad (28 \cdot a)$$

$$\sigma_{ii}^{(II)} = 3K^{(II)}(\epsilon_{ii}^{(II)} - \epsilon_{ii}^s) \quad (28 \cdot b)$$

となり、強化基材 Ω の等価式は、状態(II)と同様の操作を行うことで、

$$\sigma_{ij}^{(II)} + \sigma_{ij}^{s(II)} = 2\mu^*(\epsilon_{ij}^{(II)} + \epsilon_{ij}^{(II)} + \epsilon_{ij}^s) = 2\mu^{(II)}(\epsilon_{ij}^{(II)} + \epsilon_{ij}^{(II)} + \epsilon_{ij}^s - \epsilon_{ij}^{s(II)}) \quad (29 \cdot a)$$

$$\sigma_{ii}^{(II)} + \sigma_{ii}^{s(II)} = 3K^*(\epsilon_{ii}^{(II)} + \epsilon_{ii}^{(II)} + \epsilon_{ii}^s) = 3K^{(II)}(\epsilon_{ii}^{(II)} + \epsilon_{ii}^{(II)} + \epsilon_{ii}^s - \epsilon_{ii}^{s(II)}) \quad (29 \cdot b)$$

となる。しかしながら、式(29)と式(24)を比較することで、状態(III)の等価固有ひずみ $\epsilon_{ij}^{s(III)}$ は、状態(II)の等価固有ひずみ $\epsilon_{ij}^{s(II)}$ の解(26)で作用応力を零とおく。すなわち、

$$\epsilon_{33}^{s(III)} = \epsilon_{33}^{s(II)}|_{\sigma_{33}=0} \quad (30 \cdot a)$$

$$\epsilon_{ii}^{s(III)} = \epsilon_{ii}^{s(II)}|_{\sigma_{33}=0} \quad (30 \cdot b)$$

により求め、式(26)の結果を用いることで最終的に、

$$\epsilon_{33}^{s(III)} = \epsilon_{33}^{s(II)} + \frac{(1-\nu^{(II)})(g^{(II)}-1)}{3(1-f)D_1^{M(II)}\mu^{(II)}} \{ L_1^{M(II)}G_3^{M(II)}\sigma_{ii}^0 + (g^{(II)}-1)F_2^{M(II)'}\sigma_{11}^0 + (g^{(II)}-1)F_1^{M(II)'}\sigma_{22}^0 + [(g^{(II)}-1)F_3^{M(II)} + 3D_{III}^{M(II)}]'\sigma_{33}^0 \} \quad (31 \cdot a)$$

$$\epsilon_{ii}^{s(III)} = \epsilon_{ii}^{s(II)} + \frac{(1-\nu^{(II)})L_1^{M(II)}}{(1-f)D_1^{M(II)}\mu^{(II)}} \left[\frac{3D_{II}^{M(II)}}{2(1+\nu^{(II)})}\sigma_{ii}^0 + (g^{(II)}-1)G_1^{M(II)'}\sigma_{11}^0 + (g^{(II)}-1)G_2^{M(II)'}\sigma_{22}^0 + (g^{(II)}-1)G_3^{M(II)'}\sigma_{33}^0 \right] \quad (31 \cdot b)$$

となる。また、状態(III)の巨視的全ひずみは、

$$\bar{\epsilon}_{33}^{(III)} = f(\epsilon_{33}^{s(III)} - \epsilon_{33}^s) + \epsilon_{33}^s \quad (32 \cdot a)$$

$$\bar{\epsilon}_{ii}^{(III)} = f\epsilon_{ii}^{s(III)} \quad (32 \cdot b)$$

となる。

3.6 複合材料の形状固定性指数 未知量である

固有ひずみ ϵ_{ij}^s を求めるために、単体のときと同様に、状態(I)と状態(II)の巨視的全ひずみの偏差成分を等置する、すなわち、 $\bar{\epsilon}_{33}^{(I)} = \bar{\epsilon}_{33}^{(II)}$ とおく。このとき、式(10)と式(27・a)より、

$$\begin{aligned} \epsilon_{33}^{(I)} + f'\epsilon_{33}^{s(I)} &= \epsilon_{33}^{(II)} + f(\epsilon_{33}^{s(II)} - \epsilon_{33}^s) + \epsilon_{33}^s \\ \therefore \epsilon_{33}^s &= \frac{\epsilon_{33}^{(I)} - \epsilon_{33}^{(II)} + f(\epsilon_{33}^{s(I)} - \epsilon_{33}^{s(II)})}{(1-f)} \end{aligned} \quad (33)$$

となる。式(33)を式(32・a)に代入し、再び式(10)を用いて整理すると、

$$\bar{\epsilon}_{33}^{(III)} = \bar{\epsilon}_{33}^{(I)} - \epsilon_{33}^{(II)} + f(\epsilon_{33}^{s(III)} - \epsilon_{33}^{s(II)}) \quad (34)$$

を得る。

SMP 単体の場合と同様に、SMP 複合材料の形状固定性指数を、作用応力の静水圧成分 σ_{ii}^0 を零と置いたときの状態(I)の巨視的全ひずみの偏差成分と状態(III)で最終的に残る全ひずみの偏差成分の比である、すなわち、

$$\bar{\alpha}_{33} = \frac{\bar{\epsilon}_{33}^{(III)}|_{\sigma_{33}=0}}{\bar{\epsilon}_{33}^{(I)}|_{\sigma_{33}=0}} \quad (35)$$

と定義する。式(35)に式(34)と式(10)を代入した後、式(31・a)と式(22・a)の等価固有ひずみをさらに代入すると、最終的に、

$$\bar{\alpha}_{33} = 1 - \frac{\mu^{(II)}}{\mu^{(I)}} \cdot \frac{1 - \frac{2f}{3(1-f)}\beta^{(II)}}{1 - \frac{2f}{3(1-f)}\beta^{(I)}} \quad (36)$$

を得る。ここで $\beta^{(i)}$ ($i = I, II$) は次式である。

$$\begin{aligned} \beta^{(i)} &= \frac{(1-\nu^{(i)})(g^{(i)}-1)}{D_1^{M(i)}} \left[(g^{(i)}-1)F_2^{M(i)'}\frac{\sigma_{11}^0}{\sigma_{33}^0} + (g^{(i)}-1)F_1^{M(i)'}\frac{\sigma_{22}^0}{\sigma_{33}^0} + (g^{(i)}-1)F_3^{M(i)} + 3D_{III}^{M(i)} \right] \end{aligned} \quad (37)$$

4. 解析結果及び考察

4.1 解析モデルと材料定数 本研究ではポリウレタン系 SMP 母材を想定し、ゴム状態とガラス状態での剛性率をそれぞれ、 $\mu^{(I)} = 9.20$ MPa, $\mu^{(II)} = 0.329$ GPa とした⁽⁶⁾。また、ガラス状態でのポアソン比は $\nu^{(II)} = 0.38$ を用いた。強化基材は形状固定性効果を持たない E-ガラスを想定し、その剛性率とポアソン比は $\mu^* = 29.7$ GPa, $\nu^* = 0.22$ を用いた。強化基材の形状は x_3 軸を回転対称軸とする回転楕円体に限定し、 σ_{33}^0 のみが作用する状態を想定している。

4.2 巨視的形状固定性指数の解析結果 図3は、

Fig. 3 $\bar{\alpha}_{33}$ versus f

式(36)で $\sigma_{11}^0 = \sigma_{22}^0 = 0$ と置いたときの巨視的形狀固定性指数 $\bar{\alpha}_{33}$ の強化基材の体積含有率 f による変化を示したものである。パラメータは強化基材のアスペクト比 ω であり、これは x_3 回転対称軸方向の主半軸の長さに対する x_1 軸方向の主半軸の長さの比である。図中の●印は、式(5)で示したSMP母材単体の形状固定性指数 α_{smp} である。図より、強化基材の体積含有率 f が零であるときには、 ω の値によらず $\bar{\alpha}_{33}$ は α_{smp} と一致しており、また、 f の増加につれて $\bar{\alpha}_{33}$ の値は単調減少していることがわかる。強化基材は形状固定効果を持たないため、その含有率が増加するにしたがって、 $\bar{\alpha}_{33}$ の値が減少することは極めて当然の結果である。しかしながら、その度合いは強化基材の形状によって大きく異なることがわかる。

図4は、 $f=0.2$ のときの $\bar{\alpha}_{33}$ と強化基材のアスペクト比 ω との関係を示したものである。図より、アスペクト比 $\omega=10^{-2}$ の扁平な円盤形状から $\omega=10$ 程度の短繊維までの間では、 $\bar{\alpha}_{33}$ はほぼ一定であるが、 $\omega=10$ を越えると急激に減少することがわかる。さらに $\omega=192.5$ を越えると負になることがわかる。このような傾向を説明するために、図2に示した状態(I)で材料全体に与えられた変形量の内、母材が受け持つ変形量の割合を求めてみることにする。今、母材内の全ひずみの偏差成分 $\epsilon_{ij}^{(1)M}$ は、

$$\epsilon_{ij}^{(1)M} = (1-f)(\epsilon_{ij}^{(0)} + \epsilon_{ij}^{(1)}) \dots \dots \dots (38)$$

で与えられる。したがって、これに式(9)から求まる $\epsilon_{ij}^{(1)}$ と作用場(7)とを代入すれば良い。このようにして求めた巨視的全ひずみの偏差成分に対する母材のその比 $\epsilon_{33}^{(1)M} / \epsilon_{33}^{(1)}$ の結果を、図中の破線で示す。図より、 $\epsilon_{33}^{(1)M} / \epsilon_{33}^{(1)}$ の値は $\omega=10 \sim 10^2$ 程度までの区間では若干その挙動が異なるものの、ほぼ $\bar{\alpha}_{33}$ の挙動と同じような挙動を示していることがわかる。したがって、 $\bar{\alpha}_{33}$ がこのような傾向を示した原因は、ゴム状

Fig. 4 $\bar{\alpha}_{33}$, $\epsilon_{33}^{(1)M} / \epsilon_{33}^{(1)}$ and $\bar{E}_{33}/E^{(II)}$ versus ω

態の母材に与えられた変形の大きさの違いによるものであると考えられる。 $\omega=192.5$ を越えたときに、 $\bar{\alpha}_{33}$ が負になる原因は、状態(II)から状態(III)にかけての強化基材の弾性回復による効果が母材の形状固定性効果を上回ったために生じたものと考えられる。

図4の図中には、さらに最終状態(III)での巨視的な弾性係数 $\bar{E}_{33}/E^{(II)}$ を一点鎖線で示している。図より、強化基材のアスペクト比 ω が1を越えて増加するにつれて $\bar{E}_{33}$ は増加していることがわかる。したがって、巨視的形狀固定性指数 $\bar{\alpha}_{33}$ と弾性係数 $\bar{E}_{33}$ とは、強化基材のアスペクト比 ω の増加につれて逆の傾向を示し、互いに相反するものであることがわかった。

この結果を受けて、同じ体積含有率で最も弾性係数が高くなる連続繊維($\omega \rightarrow \infty$)に対する弾性係数 $\bar{E}_{33}(\omega \rightarrow \infty)$ で正規化した巨視的弾性係数 $\bar{E}_{33}$ と $\bar{\alpha}_{33}$ との積を、

$$\rho = \frac{\bar{E}_{33}}{\bar{E}_{33}(\omega \rightarrow \infty)} \cdot \bar{\alpha}_{33} \dots \dots \dots (39)$$

とおく。上式で定義した ρ は最大値が1となる係数であり、形状固定性と巨視的な剛性を兼ね備えた複合材料を作製する際の目安となる指数であると考えられる。以降、これを形状固定性最適化指数と呼ぶことにする。

図5は、形状固定性最適化指数 ρ の ω による変化を示したもので、強化基材の体積含有率 f をパラメータに取っている。図より、 f の値により若干の違いがあるものの、 $\omega=50$ 付近で ρ が最大値を示しており、この程度のアスペクト比の強化基材を用いることで、形状固定性も剛性も良好なものが創製できることがわかった。したがって、これまでに示した本解析手法によって、形状固定性と剛性が共に良好な複合材料の設計が可能となると思われる。

Fig. 5 ρ versus ω

5. 結 言

本研究では、マイクロメカニクスの手法を用いて SMP 複合材料の形状固定性のモデル化を行い、ゴム状態の巨視的全ひずみの偏差成分とガラス状態のそれとを等置することで、巨視的な形状固定性の度合を表す形状固定指数 $\bar{a}_{ij}$ を強化基材の等価固有ひずみを用いて表すことができた。さらに、得られた解を用いて、回転楕円体強化基材に対して具体的に計算した結果、強化基材のアスペクト比の増加につれて形状固定指数は減少し、また、形状固定性と剛性とが共に良好となるアスペクト比が存在することを明らかにした。

付 録

係数 L_K, L_μ は、

$$L_K = \frac{K^*}{K^* - K} \quad (40 \cdot a)$$

$$L_\mu = \frac{\mu^*}{\mu^* - \mu} \quad (40 \cdot b)$$

である⁽¹²⁾。また、 $H_i^e \sim H_{Vi}^e$ は、著者らが定めた形状因子の不変量であり、

$$H_i^e = (H_i^e - H_{12}^e) + (H_2^e - H_{23}^e) + (H_3^e - H_{31}^e) \quad (41 \cdot a)$$

$$H_{ii}^e = [(H_i^e - H_{12}^e)^2 + (H_2^e - H_{23}^e)^2 + (H_3^e - H_{31}^e)^2] - \frac{1}{3}(H_i^e)^2 \quad (41 \cdot b)$$

$$H_{iii}^e = (1 - 3H_i^e)^2 + (1 - 3H_2^e)^2 + (1 - 3H_3^e)^2 \quad (41 \cdot c)$$

$$H_{iv}^e = (1 - 3H_i^e)(H_2^e - H_{23}^e) + (1 - 3H_2^e)(H_3^e - H_{31}^e) + (1 - 3H_3^e)(H_i^e - H_{12}^e) \quad (41 \cdot d)$$

$$H_v^e = (1 - 3H_i^e)^3 + (1 - 3H_2^e)^3 + (1 - 3H_3^e)^3 \quad (41 \cdot e)$$

$$H_{vi}^e = (1 - 3H_i^e)^2(H_2^e - H_{23}^e) + (1 - 3H_2^e)^2(H_3^e - H_{31}^e) + (1 - 3H_3^e)^2(H_i^e - H_{12}^e) \quad (41 \cdot f)$$

と定義している⁽¹²⁾。ここで、 H_i^e などは、主半軸の長さ $a_3 > a_1 > a_2$ の楕円体強化基材に対しては、

$$H_3^e = \frac{\omega_3 \omega_2}{(\omega_3^2 - 1)(\omega_3^2 - \omega_2^2)^{1/2}} [F(\theta, k) - E(\theta, k)] \quad (42 \cdot a)$$

$$H_2^e = \frac{1}{1 - \omega_2^2} \left[1 - \frac{\omega_3 \omega_2 E(\theta, k)}{(\omega_3^2 - \omega_2^2)^{1/2}} \right] \quad (42 \cdot b)$$

$$H_3^e + H_i^e + H_2^e = 1 \quad (42 \cdot c)$$

$$H_{31}^e = \frac{1}{\omega_3^2 - 1} (H_i^e - H_3^e) \quad (42 \cdot d)$$

$$H_{12}^e = \frac{\omega_2^2}{1 - \omega_2^2} (H_2^e - H_i^e) \quad (42 \cdot e)$$

$$H_{23}^e = \frac{\omega_3^2}{\omega_2^2 - \omega_3^2} (H_3^e - H_2^e) \quad (42 \cdot f)$$

で与えられる。上式中の ω_3 はアスペクト比、

$$\omega_3 = \frac{a_3}{a_1} > 1, \quad \omega_2 = \frac{a_2}{a_1} < 1 \quad (43)$$

である。また、 $F(\theta, k)$ と $E(\theta, k)$ はそれぞれ第一種と第二種の不完全楕円積分であり、 θ と k はそれぞれ、

$$\theta = \sin^{-1} \left(1 - \frac{\omega_2^2}{\omega_3^2} \right)^{1/2}, \quad k = \left(\frac{\omega_3^2 - 1}{\omega_3^2 - \omega_2^2} \right)^{1/2} \quad (44)$$

で与えられる⁽¹²⁾。

これらの係数を用いて、成分に依存しない係数 D_i などは、

$$D_i = L_i D_{ii} - 2(1 - 2\nu) D_v \quad (45 \cdot a)$$

$$D_{ii} = (D_{iv})^2 - \left[\frac{3}{2} H_{ii}^e + \frac{2}{27} (1 - 2\nu)^2 H_{iii}^e + \frac{2}{3} (1 - 2\nu) H_{iv}^e \right] \quad (45 \cdot b)$$

$$D_{iii} = L_i D_{iv} - \frac{1}{9} (1 + \nu) (1 - 2\nu) H_{iii}^e \quad (45 \cdot c)$$

$$D_{iv} = L_{ii} + H_i^e - 1 \quad (45 \cdot d)$$

$$D_v = \frac{1}{9} (1 + \nu) \left[(L_{ii} - 1) H_{iii}^e + \frac{2}{3} (1 - 2\nu) H_v^e + 3 H_{vi}^e \right] \quad (45 \cdot e)$$

$$D_{vi} = -D_i + \left[L_{ii} + \frac{1}{3} (1 - 2\nu) \right] D_{iii} \quad (45 \cdot f)$$

と、また、成分に依存するものは、

$$F_i = \frac{2}{3} (1 + \nu) (1 - 2\nu) \left[(1 - 3H_i^e)^2 - \frac{1}{3} H_{iii}^e \right] + 3 L_i R_i \quad (46 \cdot a)$$

$$G_i = (1 - 3H_i^e) (D_{iv} + 3R_i) - \frac{2}{9} (1 - 2\nu) H_{iii}^e - H_{iv}^e \quad (46 \cdot b)$$

$$R_i = \frac{2}{9} (1 - 2\nu) (1 - 3H_i^e) + (H_2^e - H_{23}^e) - \frac{1}{3} H_i^e \quad (46 \cdot c)$$

と定めている。なお、他の成分については、下付添字 (1, 2, 3) の順列置換によって得られる。

文 献

- (1) Tani, J., *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 60, No. 576 (1994), pp. 2518-2525.
- (2) Hayashi, S., *Nikkei Mechanical*, Vol. 7 (1989), pp. 116-120.
- (3) Tobushi, H. and Hayashi, S., *Science of Machine*, Vol. 45, No. 11 (1993), pp. 1136-1140.
- (4) Tobushi, H. and Hayashi, S., *Science of Machine*, Vol. 46, No. 6 (1994), pp. 646-652.
- (5) Tobushi, H., Hayashi, S. and Kojima, S., *JSME International Journal, Series I*, Vol. 35, No. 3 (1992), pp. 296-302.
- (6) Tobushi, H., Hayashi, S., Yamada, E. and Hashimoto, T., *Transactions of the Japan Society of Mechanical*

- Engineers, Series A*, Vol. 64, No. 617 (1998), pp. 186-192.
- (7) Araki, S., Ono, H., Yamada, S. and Saito, K., *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol. 67, No. 659 (2001), pp. 1140-1147.
- (8) Araki, S., Ono, H. and Saito, K., *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol. 68, No. 666 (2002), pp. 244-252.
- (9) Araki, S., Ono, H. and Saito, K., *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol. 68, No. 666 (2002), pp. 253-257.
- (10) Shimamura, H., Ishizawa, J. and Hayashi, S., *Japan Plastics*, Vol. 57, No. 1 (2006), pp. 124-129.
- (11) Mori, T. and Tanaka, K., *Acta Metallurgica*, Vol. 21 (1973), pp. 571-574.
- (12) Araki, S. and Yamashita, H., *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol. 74, No. 745 (2008), pp. 1227-1234.
-