等温壁を有する圧縮性チャネル乱流の DNS データによる 圧縮性一方程式型 SGS モデルに関する研究*

岡本 正芳^{*1}, 池本 晃史^{*2}, 佐野 智哉^{*3}

Investigation for a One-Equation SGS Model Using DNS Data of Compressible Turbulent Channel Flow with Isothermal Walls

Masayoshi OKAMOTO^{*1}, Terufumi IKEMOTO and Tomoya SANO

^{*1} Department of Mechanical Engineering, Shizuoka University
Johoku 3-5-1, Naka-ku, Hamamatsu, Shizuoka, 432-8561, Japan

Using the data of the direct numerical simulation (DNS) for the turbulent compressible channel flow with the isothermal walls, a priori test for the one-equation subgrid-scale (SGS) model for turbulent compressible flows is performed. It is confirmed that the model expressions for the grid-scale (GS) viscous and diffusive terms, SGS temperature-dilatation term with the filtering DNS's heat flux, SGS stress-strain term are effective. The SGS stress and flux are modeled by using the GS strain and coherent structure model function. From a posteriori result of the large-eddy-simulation (LES) using the proposed SGS model, the present model can reproduce the DNS one qualitatively.

Key Words : One-Equation SGS Model, Turbulent Compressible Channel Flow, LES, DNS

1. は じ め に

流体速度が音速に近くなってくると圧縮・膨張により流体媒質の密度変化が生じ、衝撃波が形成されるなど、密度変化のない非圧縮性流れとはまったく異なる物理現象が生じる。そのため超音速飛翔体の開発には圧縮性流れについての理解を深めることが必要不可欠である。また、圧縮性効果が重要になる航空関連分野では高レイノルズ数乱流での解析が求められる。正確な数値解を得られる直接数値計算 (DNS) のこのような乱流流れへの適用は今日の進化した計算機能力を持ってしてもとても可能であるとはいえない。そこで、実用面では、コンピュータの能力と予測性能を考えると小さなスケールにのみサブグリッドスケール (SGS) モデルを導入するラージ・エディ・シミュレーション (LES) の必要性が最近では非常に高まっている。

近年、Kobayashi⁽¹⁾ は幾何形状の情報を必要とするような壁関数を用いずに LES を実行できるコヒーレント構造スモグリンスキーマモデルを提案している。このモデルはテストフィルターをかけるという計算中におけるフィルター操作を必要とするダイナミックモデルよりも実用面で高い簡便性と有効性を持っていると思われる。岡本・吉田⁽²⁾ はこのモデルの概念を SGS 運動エネルギーを使用した渦粘性型モデルに導入して、新しい圧縮性乱流場に対する一方程式型 SGS モデルを提案し、長野・岡本⁽³⁾ による定数粘性および拡散係数の圧縮性混合層乱流の DNS データを用いてアプリオリテストとアポストリオリテストを実行してきた。また、このモデルの基礎的な部分は Yoshizawa⁽⁴⁾ により提案された乱流統計理論である 2 スケール直接相関近似理論 (TSDIA) を用いた Okamoto⁽⁵⁾ による解析結果を活用してきた。

本研究では圧縮性乱流場の DNS による検討例 (森西ら^(6,7) など) が比較的少ない圧縮性壁乱流において SGS モデルの評価を実施する。池本・岡本⁽⁸⁾ はこれまで上・下壁面が等温壁の場合の 3 種類のマッハ数に対するチャ

* 原稿受付 2011 年 3 月 28 日

^{*1} 正員, 静岡大学工学部機械工学科 (〒432-8561 静岡県浜松市中区城北 3-5-1)

^{*2} 正員, 菱友システムズ (〒455-0024 愛知県名古屋市中区大江町 6-19)

^{*3} 菱友システムズ (〒455-0024 愛知県名古屋市中区大江町 6-19)

E-mail: tmmokam@ipc.shizuoka.ac.jp

ネル乱流に対する DNS を実行してきた。そのデータを利用して開発している SGS モデルに対してアプリオリテストとアポストリオリテストを行って、その有効性を検討するのが本研究の目的である。

2. 基礎方程式

圧縮性乱流場に対する支配方程式は、以下に示す密度 ρ の方程式、運動量 ρu_i の方程式、内部エネルギーと運動エネルギーの総和である全エネルギー $E_T = p/(\gamma - 1) + \rho u_i u_i / 2$ の方程式、気体状態方程式からなる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} = -\frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i \quad (2)$$

$$\frac{\partial E_T}{\partial t} = -\frac{\partial (E_T + p) u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i u_i \quad (3)$$

$$p = \frac{1}{\gamma M^2} \rho \theta \quad (4)$$

ここで、 u_i は速度、 p は圧力、 θ は温度、 γ は比熱比、 M はマッハ数である。また、 σ_{ij} は粘性応力、 q_j は温度フラックスであり、その表現は分子粘性係数 μ とプラントル数 Pr を用いて

$$\sigma_{ij} = 2\mu \left(s_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{ij} \right) \quad (5)$$

$$q_j = \frac{\mu}{M^2 Pr (\gamma - 1)} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \quad (6)$$

と書ける。式 (5) に表れる歪テンソル s_{ij} と渦度テンソル w_{ij} は次のように定義した。

$$s_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (7)$$

$$w_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (8)$$

式 (1)~(4) より温度の方程式は

$$\frac{\partial \rho \theta}{\partial t} = -\frac{\partial \rho \theta u_j}{\partial x_j} - (\gamma - 1) \rho \theta \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \gamma (\gamma - 1) M^2 \frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \gamma (\gamma - 1) M^2 \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (9)$$

と求まる。また、本研究では分子粘性係数 μ をサザーランドの公式

$$\mu = \mu_0 \frac{273.2 + C}{\theta + C} \left(\frac{\theta}{273.2} \right)^{3/2} \quad (10)$$

により与える。ここで、定数は空気の有次元の場合 $\mu_0 = 1.72 \times 10^{-5}$ と $C = 111$ である。

LES の基礎式を導出するためには DNS 基礎方程式にフィルター操作を施す必要がある。SGS 密度に関連した様々な項の出現による式の複雑化を避けるため、ファブル平均型のフィルター

$$\bar{\rho}(\mathbf{x}, t) = \iiint d^3 \mathbf{x}' G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}', t) \quad (11)$$

$$\bar{u}_i(\mathbf{x}, t) = \frac{\iiint d^3 \mathbf{x}' G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}', t) u_i(\mathbf{x}', t)}{\iiint d^3 \mathbf{x}' G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}', t)} \quad (12)$$

$$\bar{\theta}(\mathbf{x}, t) = \frac{\iiint d^3 \mathbf{x}' G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}', t) \theta(\mathbf{x}', t)}{\iiint d^3 \mathbf{x}' G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}', t)} \quad (13)$$

を採用する。このフィルター操作を基礎式 (1), (2), (9) に施すと、グリッドスケール (GS) の方程式が以下のよう
に導かれる。

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} = -\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_j}{\partial x_j} \quad (14)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i}{\partial t} = -\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j}{\partial x_j} - \frac{1}{\gamma M^2} \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{\theta}}{\partial x_i} + \frac{\partial (\bar{\sigma}_{ij} - \tau_{ij})}{\partial x_j} + \bar{\rho} \tilde{f}_i \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{\theta}}{\partial t} = & -\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{u}_j \tilde{\theta}}{\partial x_j} - (\gamma - 1) \bar{\rho} \tilde{\theta} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_j} - \Phi + \gamma(\gamma - 1) M^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\bar{q}_j - \frac{h_j}{\gamma(\gamma - 1) M^2} \right) \\ & + \gamma(\gamma - 1) M^2 \Pi + \gamma(\gamma - 1) M^2 \bar{\sigma}_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (16)$$

ここで、 τ_{ij} は SGS 応力、 h_j は SGS フラックス、 Φ は SGS 温度膨張相関量、 Π は SGS 応力歪相関量、 $\bar{\sigma}_{ij}$ は GS 応力、 $\bar{q}_j$ は GS フラックスであり、その具体的な表現は

$$\tau_{ij} = \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j - \bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j \quad (17)$$

$$h_j = \bar{\rho} \tilde{\theta} \tilde{u}_j - \bar{\rho} \tilde{\theta} \tilde{u}_j \quad (18)$$

$$\Phi = (\gamma - 1) \left(\bar{\rho} \tilde{\theta} \tilde{d} - \bar{\rho} \tilde{\theta} \tilde{d} \right) \quad (19)$$

$$\Pi = \bar{\sigma}_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \bar{\sigma}_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \quad (20)$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = 2\bar{\mu} \bar{s}_{ij} - \frac{2}{3} \bar{\mu} \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x_l} \delta_{ij} \quad (21)$$

$$\bar{q}_j = \frac{1}{M^2 \text{Pr}(\gamma - 1)} \bar{\mu} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x_j} \quad (22)$$

である。これらの項は SGS 量に関連しているので、LES を行うためにはモデリングが必要な量である。SGS 応力および SGS 温度フラックスには非圧縮性乱流やパッシブスカラー場における SGS モデリングの知識が利用できる
と考えられる。SGS 応力歪相関量には Okamoto-Shima⁽⁹⁾ の非圧縮性乱流に対する一方程式型 SGS モデリングを
活用する。

一方、SGS 運動エネルギー ($\bar{\rho} K_{SGS} = \tau_{ii}/2$) の輸送方程式のモデリングを行う際に必要となる SGS 速度 u'_i の方
程式は全速度 u_i と GS 速度 $\tilde{u}_i$ の方程式の差から

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} = -\tilde{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} - u'_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\gamma M^2 \bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{\theta}}{\partial x_i} + \frac{1}{\gamma M^2 \bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{\theta}}{\partial x_i} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial (\bar{\sigma}_{ij} - \tau_{ij})}{\partial x_j} \quad (23)$$

と求まる。分子粘性の働きにより流体の運動エネルギーは内部 (熱) エネルギーへと変換されるスケールは非常に
小さな Kolmogorov 長さスケール ℓ_K で特徴づけられる。圧縮性流れでは式 (3) が意味するようにエネルギー保存
則の立場から内部エネルギーを考慮する必要がある。そこで、 ℓ_K よりも大きなスケールの LES フィルターをかけ
て GS 量を解析する際にも、内部エネルギーのゲインとしての役割を果たす分子粘性による散逸効果を、SGS エ
ネルギーのような小さなスケールの情報をモデルの上で取り扱うことが有効であると考えられる。

3. 計算対象と計算手法

計算対象は図 1 に示したようなチャンネル流である。これまでに池本・岡本⁽⁸⁾ により実行された DNS データを
利用して、解析および比較を行う。計算条件は基準温度を 1K、上・下壁面を等温壁としてその温度は 300K とし、
基準温度における音速と摩擦速度に基づくマッハ数 $M = 1, 1.5, 2$ 、比熱比とプラントル数は対象を空気として
 $\gamma = 1.4$ 、 $Pr = 0.72$ としている。駆動一定外力によって決定されるレイノルズ数は非圧縮性乱流時の摩擦速度と
チャンネル半幅で 180 である。DNS の空間離散化には主流方向・スパン方向に 8 次精度中心差分法、壁垂直方向に
2 次精度中心差分法を、時間発展には 4 次精度 Adams-Bashforth 法を用いた。計算領域は $5\pi \times 2 \times 2\pi$ 、計算格子
数は $256 \times 160 \times 128$ である。壁面垂直方向には圧縮性特有の壁面漸近挙動を捉えるため、かなり細かい不等間隔

格子を利用している。境界条件としては主流方向・スパン方向に周期境界条件を、壁垂直方向には速度にはノンスリップ条件を温度には等温条件を与えている。池本・岡本⁽⁸⁾の DNS では主流方向およびスパン方向の密度の 2 点相関量は $M=2$ においてやや相関が残るものの、おおむねゼロに漸近しているデータとなっている。これに対して、本研究における LES では空間の離散化は同一のものであるが、時間発展は 2 次精度 Adams-Bashforth 法を採用している。計算領域は一致させ、計算格子数には粗い格子解像度の $64 \times 80 \times 64$ を適用した。

Fig. 1 Flow configuration and coordinate system.

4. アプリオリテスト

アプリオリテストを実行するため、DNS データに先に示したファブル平均型のフィルターを施すが、ここでは差分法計算で容易にフィルターをかけられるトップハットフィルター

$$G(x) = \begin{cases} 1/\Delta & |x| \leq \Delta/2 \\ 0 & |x| > \Delta/2 \end{cases} \quad (24)$$

を x および z 方向にのみ適用した。本論文ではフィルター代表長さ Δ を DNS 解像度の 2 倍とした結果を示している。 Δ を DNS 解像度の 4 倍としたテストや壁垂直方向である y 方向にもトップハットフィルターを適用したテストも実行したが、ここで提示していく結果と本質的には差異はなかった。また、各量毎の等高線図はスケールをそろえて提示している。

4.1 SGS 応力と SGS フラックス

まずはじめに、SGS 応力 τ_{ij} と SGS フラックス h_j の評価を行う。検討するモデル表現は計算安定性の高い勾配拡散型モデルで、それぞれ

$$\tau_{ij} = \frac{2}{3} \bar{\rho} K_{SGS} \delta_{ij} - 2\mu_{SGS} \left(\tilde{s}_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \delta_{ij} \right) \quad (25)$$

$$h_j = -\frac{\mu_{SGS}}{\text{Pr}_T} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x_j} \quad (26)$$

と表記される。SGS 渦粘性率に対するモデリングとしては岡本・吉田⁽²⁾により提案された SGS エネルギーを陽に利用したものがあるが、アポストリオリテストで計算不安定性が生じたため、ここでは Kobayashi⁽¹⁾によって提案されたコヒーレント構造型モデル

$$\mu_{SGS} = C_A \Delta^2 \tilde{s} \left(\frac{|Q_2|}{E} \right)^{3/2} \quad (27)$$

を使用する。本研究ではモデル定数はアポストリオリテストでの最適化の結果からの $C_A = 0.1$ と、理論値である $\text{Pr}_T = 0.911$ を利用する。ただし、Kobayashi のモデルにおけるモデル定数 $C_A = 0.05$ を利用しても $M=1$ での平均速度分布では $C_A = 0.1$ の結果と比較して 5 % 程度の過小予測になるだけである。また、SGS 応力歪相関項のモ

デル定数を変更することで C_A の最適値を変更することは可能であり、最終的なモデル定数の決定にはさらなる検証乱流場での検討が必要になってくる。ここで、GS 歪テンソルの大きさ $\tilde{s}$ 、GS 速度勾配テンソルの大きさ E 、GS 速度勾配テンソルの第二不変量 Q_2 の定義は

$$\tilde{s} = \sqrt{2s_{ij}s_{ij}} \quad (28)$$

$$E = \frac{1}{2}(\tilde{w}_{ij}\tilde{w}_{ij} + \tilde{s}_{ij}\tilde{s}_{ij}) \quad (29)$$

$$Q_2 = \frac{1}{2}(\tilde{w}_{ij}\tilde{w}_{ij} - \tilde{s}_{ij}\tilde{s}_{ij} + \tilde{s}_{ii}\tilde{s}_{jj}) \quad (30)$$

である。このモデル表現はスマゴリンスキーモデルのように壁からの距離を利用して算出する壁関数やダイナミックモデルのように陽にフィルター操作が不要であるといった利点がある。

これらのモデル表現に対するアプリオリテストの結果を図 2 と 3 に与える。これらの結果は必ずしもこのモデル表現が高い相関性を有しているようには見えない。以降、定量的評価を行うためモデル表現の値と DNS にフィルターをかけた LES における真値の比により、相関角

$$\phi_g = \arctan \frac{\bar{g}_{Model}}{\bar{g}_{DNS}} \quad (31)$$

を導入する。 $\phi_g = \pi/4$ の時、モデルの値と DNS が一致することを意味している。 $M = 2$ における平均相関角の結果を図 4 に与える。平均的に見てもモデル表現は DNS と高い相関性は有していない。しかし、コヒーレント構造モデルにおけるモデル関数は $|Q_2^+|$ が大きい場所で局所的に寄与が大きくなることが期待できる。そこで、 $|Q_2^+|$ が大きい位置でのみモデル表現と DNS の SGS 応力およびフラックスの相関性を確認すると、最大 3 倍程度の平均相関角を SGS 応力では示すことを確認できる。この評価においても SGS フラックスの方がモデル表現の相関性は低い。計算安定性など重視して本研究ではこのモデル表現を利用する。

Fig. 2 Instantaneous distributions of τ_{12} at $y^+ = 20$ and $M = 2$, (a) DNS data, (b) model. Red region is positive and blue one is negative.

Fig. 3 Instantaneous distributions of h_2 at $y^+ = 20$ and $M = 2$, (a) DNS data, (b) model. Red region is positive and blue one is negative.

4.2 GS 応力と GS フラックス

分子粘性係数 μ はサザーランドの公式 (10) によって決定されるため温度に依存している。これによりこの流れ場では GS 応力 (21) と GS フラックス (22) にもモデリングが必要となる。ここでは、以下のように分子粘性・拡散係数と速度・温度勾配を単純に分離したもの

$$\bar{\sigma}_{ij} = 2\bar{\mu}\tilde{s}_{ij} - \frac{2}{3}\bar{\mu}\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}\delta_{ij} \quad (32)$$

$$\bar{q}_j = \frac{\bar{\mu}}{M^2 \text{Pr}(\gamma - 1)} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x_j} \quad (33)$$

Fig. 4 Profiles of $\langle \phi_{\tau_{12}} \rangle$ and $\langle \phi_{h_2} \rangle$ at $M = 2$.

を利用し、アプリオリテストを実行した。瞬間場に対するフィルター操作を行った DNS データとモデル表現での値の等値面図を図 5 と 6 にそれぞれ GS 応力 $\bar{\sigma}_{12}$ と GS フラックス $\bar{q}_2$ に関して与える。両図ともモデル表現は非常に DNS の結果に近いものとなっている。相関角の各断面における確率密度関数 (PDF) を示しているのが図 7 である。どちらも $\bar{\sigma}_{12,Model} = \bar{\sigma}_{12,DNS}$ と $\bar{q}_{2,Model} = \bar{q}_{2,DNS}$ を意味する相関角が $\pi/4$ で非常に鋭いピークを有する確率密度分布となっている。ただし、GS 応力では壁から離れた位置では分布の裾野が若干広がっていく様子が確認できる。y 座標に対する相関角の平均値が図 8 である。非常に $\pi/4$ に近い値となっているが、GS 応力の方は壁から離れるとわずかに小さな値へとシフトしている。これらの結果は式 (32) と (33) のモデリングが高精度で有効であることを示唆している。

Fig. 5 Instantaneous distributions of $\bar{\sigma}_{12}$ at $y^+ = 5$ and $M = 2$, (a) DNS data, (b) model. Red region is positive and blue one is negative.Fig. 6 Instantaneous distributions of $\bar{q}_2$ at $y^+ = 5$ and $M = 2$, (a) DNS data, (b) model. Red region is positive and blue one is negative.

4.3 SGS 温度膨張相関項

次に式 (19) の SGS 温度膨張相関項に着目する。Vreman et al.⁽¹⁰⁾ はこの項を式 (16) の SGS 温度フラックスの発散項と一括して次式のようにモデリングを行うことを推奨している。

$$\Phi = (\gamma - 1) \frac{\partial h_j}{\partial x_j} \quad (34)$$

このモデリングは岡本・吉田⁽²⁾ の圧縮性混合層乱流でのアプリオリテストでも乱れの活発領域では非常に有効になっていることが確認されている。 $M = 2$ でのバッファー層の位置 $y^+ = 20$ での結果を図 9 に示す。ここでの SGS

Fig. 7 PDFs of $\phi_{\sigma_{12}}$ and ϕ_{q_2} . Fig. 8 Profiles of $\langle \phi_{\sigma_{12}} \rangle$ and $\langle \phi_{q_2} \rangle$ at $M = 2$.

温度フラックス h_j は式 (26) のモデル表現ではなく DNS データから算出している。等高線のパターンは強弱の違いが多少確認できるが、非常に高い対応関係が表れている。相関角の PDF (図 10) では相関角が $\pi/4$ 付近にかなり高いピークを有する確率密度関数となっている。この最大確率を示す値は壁からの距離に依存していないようである。各マッハ数に対する平均相関角の結果である図 11 をみると壁から離れるに従ってやや相関角は $\pi/4$ より低下するが、かなり高い相関を示している。また、マッハ数が増加するとその傾向は顕著になっていく。ただし、 h_j に対してモデル表現 (26) を適用すれば図 3 と 4 が示したように、その相関性は低いものとなっていく。

Fig. 9 Instantaneous distributions of Φ at $y^+ = 20$ and $M = 2$, (a) DNS data, (b) model. Red region is positive and blue one is negative.

4.4 SGS 応力歪相関項

内部エネルギーに関連した温度方程式 (16) に表れている SGS 応力歪相関項は、SGS 運動エネルギーの分子粘性を介したエネルギー変換を意味する項である。Okamoto-Shima⁽⁹⁾ による非圧縮性 1 方程式 SGS モデルや岡本・吉田⁽²⁾ による粘性係数や拡散係数を定数とした圧縮性混合層乱流に対する圧縮性 1 方程式型 SGS モデル開発の際に利用した以下のようなモデル表現とする。

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 \quad (35)$$

$$\Pi_1 = C_\epsilon \frac{\bar{\rho} K_{SGS}^{3/2}}{\Delta} \quad (36)$$

Fig. 10 PDF of φ_Φ at $M = 2$. Fig. 11 Profiles of $\langle \varphi_\Phi \rangle$.

$$\Pi_2 = 2\bar{\mu} \frac{\partial \sqrt{K_{SGS}}}{\partial x_j} \frac{\partial \sqrt{K_{SGS}}}{\partial x_j} \quad (37)$$

ここで、モデル定数 C_ε は非圧縮性乱流における理論解析と最適化テストの結果から $C_\varepsilon = 0.84$ としている。このモデル表現は非圧縮性乱流場における SGS エネルギーが熱へと単純に変換されることを想定しているため、正值しかとれないモデル表現となっている。圧縮性混合層乱流でのアプリオリテストではその妥当性は高いものではなかった。しかし、極壁近傍の位置 $y^+ = 5$ の結果である図 12 をみると、DNS データにフィルターをかけた結果もほとんど全領域で正の値をとっており、モデルとかなりよい対応関係が明瞭に確認できる。定量的な評価を行うため、相関角 $\varphi_\Pi = \arctan(\Pi_{Model}/\Pi_{DNS})$ の PDF を図 13 に示す。壁近傍ではやや $\pi/4$ に近いところにピークが出現している。しかし、壁から離れると DNS との高い相関性は消えていく。平均値レベルでは図 14 が示すように壁で高い相関を示し、壁から離れても若干高い相関が残っているようである。壁近傍での高い相関性は Π_2 による寄与が、バッファ層付近では Π_1 の寄与によるものである。よってこのモデル表現は等温壁を有する圧縮性チャネル乱流場では有効な表現であると思われる。

Fig. 12 Instantaneous distributions of Π at $y^+ = 5$ and $M = 2$, (a) DNS data, (b) model. Red region is positive and blue one is negative.

5. アポステリオリテスト

これまで示してきた SGS モデルを用いて実際の LES 解析を行う際には SGS エネルギーの輸送方程式が必要になる。その方程式は

$$\frac{\partial K_{SGS}}{\partial t} = -\tilde{u}_j \frac{\partial K_{SGS}}{\partial x_j} - \frac{\tau_{ij}}{\bar{\rho}} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\Pi}{\bar{\rho}} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\nu + C_d \nu_{SGS}) \frac{\partial K_{SGS}}{\partial x_j} \right\} \quad (38)$$

とする。モデル定数 $C_d = 1.0$ とし、このモデル方程式の詳細は文献 2 を参照してもらいたい。

図 15 は平均速度分布である。DNS においてマッハ数が増加して圧縮性効果が強くなると対数領域で上方にシフトしていく様子が LES でも定性的には再現できている。しかし、低マッハ数の場合対数領域でわずかに過小予測

Fig. 13 PDF of φ_{Π} at $M = 2$. Fig. 14 Profile of $\langle \varphi_{\Pi} \rangle$ at $M = 2$.

となっている。平均密度 $\langle \rho \rangle$ と平均温度の分布を図 16 に与えた。平均密度では DNS を LES は非常によく再現できている。一方、平均温度では LES の結果はわずかではあるが流路中央部で過小予測となっている。

Fig. 15 Mean velocity U^+ profile. Fig. 16 Profiles of mean density $\langle \rho \rangle$ and temperature Θ .

図 17 は乱流エネルギーの結果を示している。LES の結果は若干ピーク値を大きく予測しているが、マッハ数の増加につれて、ピークが壁から離れる傾向など LES は DNS をよく再現できている。一方、平均 SGS エネルギーの分布である図 18 では LES において SGS 成分の寄与が約 1 割程度有している。より直接的にモデルの寄与を把握するため、図 19 に分子粘性係数と SGS 粘性係数の比を与える。モデルの寄与は分子粘性係数と比較して 3～5 割程度で、高温化している高マッハ数のケースの方が相対的な寄与は小さくなっている。平均速度分布での DNS よりも本 LES の結果の方がマッハ数の影響を強く受ける傾向にあるのは、 $M=1$ で強く、 $M=2$ で SGS 渦粘性係数を弱く評価している可能性がある。図 20 と図 21 にレイノルズ剪断応力 $\langle u''v'' \rangle$ と温度フラックス $\langle v''\theta'' \rangle$ をそれぞれ示す。LES 結果は $M=1$ では過大な結果を示したが、その他のケースでは非常によく DNS を再現できている。逆に温度フラックスでは $M=2$ のみ過小予測している。しかし、おおむね両平均量を LES は再現できていると思われる。

最後に瞬間場の低速ストリーク構造と渦構造の可視化結果を図 22 に示す。LES では格子解像度が粗いため DNS で可視化された渦構造はほとんど検出されていないが、低速ストリーク構造が大きくなる傾向などは LES によって捉えられている。

Fig. 17 Turbulent energy K profile. Fig. 18 SGS energy K_{SGS} profile.

Fig. 19 Ratio of the SGS viscosity to molecular one.

Fig. 20 Reynolds shear stress $\langle u''v'' \rangle$. Fig. 21 Heat flux $\langle v''\theta'' \rangle$.

6. 結 言

本研究では等温壁を有する圧縮性チャネル乱流の DNS データを利用して、コヒーレント構造モデル関数を導入した圧縮性一方程式型 SGS モデルに対するアプリオリテストを実行した。以前の圧縮性自由乱流の場合とは異なる

Fig. 22 Instantaneous distributions of Π at $y^+ = 5$ and $M = 2$, (a) DNS data, (b) model. Red region is positive and blue one is negative.

り, SGS 応力歪相関項のモデルは壁近傍ではかなりの有効性が確認できた。また, GS 粘性応力や GS 温度フラックスのモデリングでは粘性係数と拡散係数を速度勾配および温度勾配から単純に分離したもので DNS とかなり高い相関性がみられた。また, 本 SGS モデルを用いた LES 計算でも DNS を再現することができた。しかし, 今後はより圧縮性効果の強い乱流場でのモデル検証およびモデル定数の最終的な最適化や SGS エネルギーを陽に含んだモデル表現のさらなる開発といった課題が残っている。

謝 辞

本研究は, 文部科学省の科学研究費補助金 (基盤研究 (C) No. 22560162) により遂行された。ここに記し, 謝意を表す。

文 献

- (1) Kobayashi, H., “The subgrid-scale models based on coherent structures for rotating homogeneous turbulence and turbulent channel flow”, *Physics of Fluids*, Vol.17, (2005), pp.1-12.
- (2) 岡本正芳, 吉田光晴, “圧縮性混合層乱流の DNS データを利用した圧縮性一方程式型 SGS モデルに関する研究”, 日本機械学会論文集 B 編, Vol.74, No.743, (2008), pp.1540-1547.
- (3) 長野聡, 岡本正芳, “時間発展型圧縮性混合層乱流の直接数値計算”, 日本機械学会東海支部講演会講演論文集, (2006), pp.321-322.
- (4) Yoshizawa, A., “Statistical analysis of the deviation of the Reynolds stress from its eddy-viscosity representation”, *Physics of Fluids*, Vol.27, (1983), pp.1377-1387.
- (5) Okamoto, M., “Theoretical Investigation of an Eddy-Viscosity-Type Representation of the Reynolds Stress”, *Journal of the Physical Society of Japan*, Vol.63, (1994), pp.2102-2122.
- (6) 森西洋平, 谷澤征哉, 玉野真司, 中林功一, “低レイノルズ数圧縮性チャネル乱流統計量の無次元パラメータ依存性 (第 1 報, 平均流れ場と乱れの統計量)”, 日本機械学会論文集 B 編, Vol.69, No.680, (2003), pp.808-815.
- (7) 森西洋平, 谷澤征哉, 玉野真司, 中林功一, “低レイノルズ数圧縮性チャネル乱流統計量の無次元パラメータ依存性 (第 2 報, エネルギーの変換およびレイノルズ応力の輸送)”, 日本機械学会論文集 B 編, Vol.69, No.680, (2003), pp.816-823.
- (8) 池本晃史, 岡本正芳, “DNS による圧縮性チャネル乱流に対する数値解析的研究”, 日本機械学会年次大会講演論文集, (2009), pp.47-48.
- (9) Okamoto, M. and Shima, N., “Investigation for the one-equation-type subgrid model with eddy-viscosity expression including the shear-damping effect”, *JSME International Journal Series B*, Vol.42, (1999), pp.154-161.
- (10) Vreman, B., Geurts, B. and Kuerten, H., “Subgrid-modelling in LES of compressible flow”, *Applied Scientific Research*, Vol.54, (1995), pp.191-203.