格子ボルツマン・シミュレーションにおける磁性粒子のブラウン運動 誘起のための粘度修正法*

佐藤 明^{*1}

On the Viscosity-Modifying Method for Activating the Brownian Motion of Magnetic Particles in Lattice Boltzmann Simulations

Akira SATOH^{*1}

^{*1} Faculty of Systems Science and Technology, Akita Prefectural University,
84-4, Ebinokuchi, Tsuchiya-aza, Yuri-honjo, 015-0055 Japan

In order to apply the lattice Boltzmann method to a flow problem of magnetic suspensions, we have investigated the feasibility of the viscosity-modifying method that is expected to be a technique for sophisticating the activating method of the particle Brownian motion based on fluctuation hydrodynamics. We have addressed a magnetic suspension in thermodynamic equilibrium to clarify the influences of various factors such as the roughness of a lattice system and the volumetric fraction of magnetic particles on the scaling coefficient of viscosity. From the snapshots and pair correlation functions of magnetic particles, it is seen that the viscosity-modifying method can show good agreement with the results of Monte Carlo method in both quantitative and qualitative points. This good agreement is almost independent of the roughness of a lattice system if a relatively fine lattice system is used. The scaling coefficient of viscosity is almost constant and independent of the strengths of magnetic particle-field and particle-particle interactions, and also is almost constant for the variation of the volumetric fraction and the number of particles for a given lattice system unless a coarse lattice system is used. We may conclude from these results that the lattice Boltzmann method with the viscosity-scaling procedure is quite a possible technique for simulating a flow problem of magnetic particles under a non-uniform applied magnetic field.

Key Words : Lattice Boltzmann Method, BGK Collision Model, Fluctuation Hydrodynamics, Viscosity-Modifying Method, Brownian Motion, Magnetic Suspension

1. 緒 言

機能性流体として代表的な磁性流体⁽¹⁾や磁気粘性流体⁽²⁾は磁性粒子を母液に懸濁した磁性サスペンションである。これら機能性流体は磁場および流れ場中で複雑な挙動を示すことから、マイクロ流体科学の分野では主に磁性粒子の凝集現象とレオロジー特性に関して精力的に研究が行われてきた⁽³⁾⁽⁷⁾。

粒子サスペンションのマイクロ流体科学的な解析手法としては、流れを伴わない熱力学的平衡状態を問題にする場合と、流れ場中での粒子挙動を解明するための非平衡状態を問題とする場合では、用いるマイクロ解析法は大きく異なる。前者の代表的な方法はモンテカルロ法⁽⁸⁾⁽⁹⁾であり、後者の解析方法としては散逸粒子動力学法⁽¹⁰⁾⁽¹²⁾や格子ボルツマン法⁽¹²⁾⁽¹⁴⁾などがある。

散逸粒子動力学法⁽¹⁰⁾⁽¹²⁾では懸濁粒子の挙動と流れ場を同時に解くことが可能である。この方法では、溶媒分子をある程度一まとめにした仮想の流体粒子をシミュレーションの対象とする。仮想流体粒子を対象とすることで仮想流体粒子の運動の特性時間を懸濁粒子のそれに近づけることができ、このことにより磁性粒子と仮想流体粒子を同時にシミュレートすることが可能となる。

仮想流体粒子の概念を用いたサスペンションの流れ解析のもう一つの有望な方法は格子ボルツマン法⁽¹²⁾⁽¹⁴⁾である。この方法の粒子サスペンションへの適用に関する先駆的な研究はすでに行われており⁽¹⁵⁾⁽¹⁶⁾、非常に有効な方法であることが明らかとなっている。一方、磁性サスペンションの場合には、磁性粒子のまわりに界面活性剤層や電気二重層などの変形可能な被覆層が存在するため⁽¹⁾⁽⁹⁾、懸濁粒子のブラウン運動の誘起法を組み込んだ格子ボルツマン法の有効性のさらなる検討が必要である。

* 原稿受付 2011 年 7 月 28 日

^{*1} 正員, 秋田県立大学システム科学技術学部機械知能システム学科
(〒015-0055 秋田県由利本荘市土谷字海老ノ口 84-4)
E-mail: asatoh@akita-pu.ac.jp

以上の背景から、前報ではブラウン運動誘起法として、揺動流体力学に基づいた方法とブラウン動力学法的なランダム力を粒子の運動方程式に組み込んだハイブリッド型の方法を検討した⁽¹⁷⁾。その結果、格子を適切に設定し、分子動力学法で用いられる速度スケーリング法を組み込むことで、前者の方法の結果はモンテカルロ法による結果⁽⁹⁾と非常に良く一致することが明らかとなった。この結論は熱力学平衡状態の磁性サスペンション系に対するものであるが、工学的応用に重要な流れ場および磁場勾配下でのシミュレーション法としては難点があると言わざるを得ない。なぜなら、流れ場と粒子の運動を同時に解かなければならない環境下では、速度スケーリング法の適用は極めて困難であるからである。前報では2次元のポアズイユ流をシミュレートするために粘度修正法を提案して、磁性粒子の磁場勾配中での挙動の解析に主眼をおいて検討を行った⁽¹⁸⁾。

本研究の目的は、揺動流体力学に基づく格子ボルツマン法において、粒子のブラウン運動の高精度な誘起法としての粘度修正法を詳細に検討することにある。そのために、熱力学的平衡状態にある磁性粒子サスペンション系を対象として、粘度のスケーリング値に及ぼす種々の影響を詳細に検討する。さらに、理論解を与えるものと考えられるモンテカルロ・シミュレーションを実行することにより、凝集構造のスナップショットや2体相関関数も取り上げ比較検討することで、ブラウン運動誘起のための粘度修正法の妥当性を検討する。

2. 格子ボルツマン法

2・1 BGK 格子ボルツマン法

格子ボルツマン法では、シミュレーション領域を図1(a)に示すように格子状に見立てる。本研究では、2次元の流れの問題を対象とするので、図1(b)に示すD2Q9モデル⁽¹²⁾⁽¹⁴⁾を用いる。従って、仮想流体粒子は、静止状態も含めれば $\alpha=0, 1, \dots, 8$ の9通りの速度が可能である。格子ボルツマン法としては有名なBGKモデルを用いたBGK格子ボルツマン法をここでは採用する。 α 方向の粒子分布関数は、反対方向の隣接格子点の α 方向の分布関数にのみ依存し、他の格子点の分布関数には依存しない。任意の格子点の位置ベクトルを $\mathbf{r}$ とし、時間 t における α 方向の粒子分布関数を $f_\alpha(\mathbf{r}, t)$ とすると、 Δt 時間後の粒子分布関数 $f_\alpha(\mathbf{r} + \mathbf{c}_\alpha \Delta t, t + \Delta t)$ は次式から求まる⁽¹²⁾⁽¹⁴⁾。

$$\left. \begin{aligned} f_\alpha(\mathbf{r} + \mathbf{c}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) &= \tilde{f}_\alpha(\mathbf{r}, t) \\ \tilde{f}_\alpha(\mathbf{r}, t) &= f_\alpha(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\tau} \{ f_\alpha^{(0)}(\mathbf{r}, t) - f_\alpha(\mathbf{r}, t) \} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに、 τ は衝突の緩和時間(無次元量)であり、 $f_\alpha^{(0)}$ は平衡分布で、その点における巨視的な流体速度を $\mathbf{u}$ ($u = |\mathbf{u}|$)、密度を ρ_0 とすれば、次のようになる。

Fig.1 D2Q9 model for two-dimensional lattice Boltzmann simulations: (a) the lattice model and (b) the unit cell for D2Q9 model

$$f_{\alpha}^{(0)} = \rho_0 w_{\alpha} \left\{ 1 + 3 \frac{\mathbf{c}_{\alpha} \cdot \mathbf{u}}{c^2} - \frac{3u^2}{2c^2} + \frac{9}{2} \frac{(\mathbf{c}_{\alpha} \cdot \mathbf{u})^2}{c^4} \right\} \quad (2)$$

上式で、 w_{α} は重み係数、 $\mathbf{c}_{\alpha}$ は格子速度で D2Q9 モデルでは次のようになる。

$$w_{\alpha} = \begin{cases} 4/9 & \text{for } \alpha=0 \\ 1/9 & \text{for } \alpha=1,2,3,4 \\ 1/36 & \text{for } \alpha=5,6,7,8 \end{cases} \quad |\mathbf{c}_{\alpha}| = \begin{cases} 0 & \text{for } \alpha=0 \\ c & \text{for } \alpha=1,2,3,4 \\ \sqrt{2}c & \text{for } \alpha=5,6,7,8 \end{cases} \quad (3)$$

この式において、 c は格子点間の移動速度で、単位格子の一辺の長さを Δx 、時間きざみを Δt とすれば、 $c=\Delta x/\Delta t$ である。

格子ボルツマン・シミュレーションのための格子系としては、前報⁽⁷⁾と同様に、界面活性剤層内にも格子を設定する格子系を用いる。

2・2 境界条件

取り扱うべき境界面は、シミュレーション領域の境界面と粒子表面上の境界面である。本研究の場合、熱力学的平衡状態にある系を対象としているので、領域境界面では周期境界条件⁽⁸⁾⁽⁹⁾を用いる。すなわち、図 1(a)を用いると、任意の時間 t において、例えば、左側の境界での粒子分布関数 $f_{\alpha}(x, y, t)|_{\text{left}} (\alpha=0, 1, 2, \dots, 8)$ が右側の境界面での粒子分布関数 $f_{\alpha}(x, y, t)|_{\text{right}}$ に等しいとする。

粒子表面上の境界面では前報⁽⁹⁾で検討した平衡線形 YMLS 法を採用する。本境界モデルについて図 2 を用いて簡単に説明する。格子点上のある方向の粒子分布関数について考える(図 2 の場合、 $\alpha=2$ の方向)。図中の $\mathbf{r}_w$ は粒子表面上の点、その隣の粒子内の点を $\mathbf{r}_p$ 、流体側の点を $\mathbf{r}_l$ 、その隣の格子点を $\mathbf{r}_l$ とすれば、点 $\mathbf{r}_l$ の右側の格子点が物体内部となってしまうので、 $f_2(\mathbf{r}_l, t+\Delta t)$ の値が式(1)からは求まらない。もし、 $\mathbf{r}_w$ の位置での粒子分布関数が既知であるとするならば、 $\mathbf{r}_l$ の位置での $f_2(\mathbf{r}_l, t+\Delta t)$ を用いて、 $\mathbf{r}_l$ の位置での粒子分布関数 $f_2(\mathbf{r}_l, t+\Delta t)$ が、直線を用いた内挿法により得られる。この際、平衡線形 YMLS 法では、 $f_2(\mathbf{r}_w, t+\Delta t)$ として式(2)で示した平衡分布を用いる。

2・3 揺動流体力学によるブラウン運動の誘起法

ミクロンオーダー以下の粒子を懸濁した粒子サスペンション系の場合には、粒子のブラウン運動を物理的に妥当なレベルで誘起することが非常に重要である。その方法の一つとして、格子ボルツマン法では揺動流体力学⁽²⁰⁾に基づくブラウン運動の誘起法⁽¹⁵⁾⁽¹⁷⁾が用いられている。

揺動流体力学においては、懸濁粒子にランダム力を作用させるには、応力テンソルに応力の揺らぎ成分 $s_{ij} (i, j = x, y)$ を付加する。この応力の揺らぎ成分は粒子分布関数の基礎方程式 (1) にその揺らぎ項 $f_{\alpha}^{(fluc)}$ として現れることになる。 $f_{\alpha}^{(fluc)}$ の表式は次のとおりである。

Fig.2 Equilibrium linear YMLS boundary model

$$f_{\alpha}^{(fluc)} = -\frac{1}{2c_s^4} w_{\alpha} \sum_k \sum_l s_{kl} c_{ak} c_{al} \quad (4)$$

ただし、 c_s は音速で格子点間の移動速度 c との関係は $c_s = c/\sqrt{3}$ である。また、応力の揺らぎ成分 s_{ij} は次の確率特性を満足しなければならない。

$$\overline{s_{ij}(\mathbf{r}_1, t_1) s_{kl}(\mathbf{r}_2, t_2)} = 2kT\eta(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ij}\delta_{kl})\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\delta(t_1 - t_2) \quad (5)$$

ここに、 δ_{ij} などはクロネッカーのデルタ、 $\delta(*)$ はディラックのデルタ関数、 k はボルツマン定数、 T は液温、 η は母液の粘度で $\eta = \rho_0 \Delta t c^2 (2\tau - 1)/6$ (ρ_0 は流体の密度) である。

2・4 ブラウン運動の誘起レベルの精密化のための粘度修正法

磁性粒子のブラウン運動を誘起するには、前報⁽⁷⁾のように、揺らぎによる粒子分布関数を懸濁粒子と相互作用する近接格子点のみに付加することになる。全格子点に揺らぎの粒子分布関数を付加する方法もあるが、平均操作より得られた速度がかなりのランダム成分を有することになり、各方向の粒子分布関数を用いて平均操作により得られる速度が十分な精度を与える格子ボルツマン法の長所を損なうことになる。さらに、各格子点に揺らぎの粒子分布関数を発生させるには、膨大な乱数発生を必要として、またそれに伴う処理に膨大な計算時間が必要となる。以上の考察から、懸濁粒子と相互作用する隣接格子点のみに揺らぎの粒子分布関数を付加し、粒子のブラウン運動を誘起する方法を本研究では採用する。揺らぎの粒子分布関数に関しては、式(5)の確率特性に従って一様乱数を用いて応力の揺らぎ成分を発生させ、その値を用いて揺らぎの粒子分布関数を式(4)から求めることになる。各時間ステップごとに、懸濁粒子に隣接する格子点すべてに対して、異なる乱数を用いて揺らぎの粒子分布関数を計算し、その値を用いて粒子の並進と回転のランダム変位を計算して、他の力とトルクを加味して、粒子の運動を追跡することになる。

任意の磁性粒子 i に作用するランダム力 $\mathbf{F}_i^{(fluc)}$ は、近接格子点からの揺らぎ項 $f_{\alpha}^{(fluc)}$ に基づく力の和から求められ、ランダムトルク $\mathbf{T}_i^{(fluc)}$ も同様にして得られる。

しかしながら、前報の研究結果⁽⁷⁾によれば、以上の方法だけでは粒子のブラウン運動を妥当なレベルで誘起することができないことがわかっている。そこで分子動力学法で用いられる速度スケールリング法をある時間ステップ間隔ごとに導入することで、モンテカルロ法の結果とほぼ完全に一致することを明らかにした。ところが、磁性サスペンションの工学的応用を考えた場合、熱力学的非平衡である流れの問題では、速度スケールリング法の適用は極めて困難である。なぜなら、流れ問題の格子ボルツマン・シミュレーションの場合、粒子の運動とともに流れ場自体も同時に解析しなければならないので、粒子位置での巨視的な平均速度を用いる速度スケールリング法が不適切であるからである。

式(5)の応力の揺らぎ成分の確率特性からわかるように、揺らぎ成分 s_{ij} は母液の粘度に依存し、粘度が大きいほど、大きなランダム力が誘起されることが理解できる。そこで、速度をスケールリングする代わりに、粘度の値を修正することで、粒子速度から求めた系の温度が理論値を与えるような方法を検討する。この修正粘度の値を用いて適切なレベルのブラウン運動を誘起させる方法を粘度修正法と呼ぶことにする。具体的な修正粘度の求め方は次のとおりである。緩和時間を与えることによって $\eta = \rho_0 \Delta t c^2 (2\tau - 1)/6$ の式より初期の粘度を設定し、式(11)-(14)に従って粒子を移動させ、全粒子の並進速度より求めた温度が理論値より高ければ、粘度を数パーセント減少させ、逆に低ければ粘度を数パーセント増加させ、次のステップの粒子の移動の手続きを実行する。このように粒子速度から得られた温度が理論値に向かうようにランダム力を修正し、理論値と一致した段階でその粘度の値を修正粘度として採用する。なお、以上のような修正粘度を用いて角速度により求めた温度も、十分な精度で理論値と一致する。後の結果の項では、修正粘度 η' と隣接格子点以外の粘度 η (一定) の比である修正係数 $c_{\eta} = \eta'/\eta$ に着目して議論することになる。

3. 磁性粒子分散系の格子ボルツマン・シミュレーション

磁性粒子のモデルとしては、中心に磁気双極子を有し、その表面を界面活性剤によって一様に被覆された球状粒子を考える。粒子固体部の直径を D 、界面活性剤層の厚さを δ_0 とすれば、このような粒子 i, j 間の磁気的な相互作用のエネルギー $u_{ij}^{(m)}$ 、粒子 i と印加磁場 $\mathbf{H} (H=|\mathbf{H}|)$ との相互作用のエネルギー $u_i^{(H)}$ 、および、界面活性剤層の重畳に起因する粒子間相互作用のエネルギー $u_{ij}^{(V)}$ は、文献(1,9,12)に書かれているとおりである。これらのエネルギーの式より、粒子間磁気力と界面活性剤による粒子 i に作用する力とトルクの式が得られる。ここではこれらの式の無次元化した式を示す。無次元化に際して、時間の代表時間を Δt 、距離を Δx 、速度を c ($=\Delta x/\Delta t$)、力を $\rho_0(\Delta x)^3/(\Delta t)^2$ の代表値を用いると、力およびトルクの無次元表示は次のとおりである。

$$\mathbf{F}_{ij}^{(m)*} = -R_m \frac{1}{\tilde{r}_{ij}^4} \left[-(\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j) \mathbf{t}_{ij} + 5(\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{t}_{ij})(\mathbf{n}_j \cdot \mathbf{t}_{ij}) \mathbf{t}_{ij} - (\mathbf{n}_j \cdot \mathbf{t}_{ij}) \mathbf{n}_i - (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{t}_{ij}) \mathbf{n}_j \right] \quad (6)$$

$$\mathbf{F}_{ij}^{(V)*} = R_V \mathbf{t}_{ij} \ln(\tilde{D}_1/\tilde{r}_{ij}) \quad \text{for } 1 \leq \tilde{r}_{ij} \leq \tilde{D}_1 \quad (7)$$

$$\mathbf{T}_{ij}^{(m)*} = -R_m \frac{D^*}{3} \cdot \frac{1}{\tilde{r}_{ij}^3} \left[(\mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_j) - 3(\mathbf{n}_j \cdot \mathbf{t}_{ij}) \mathbf{n}_i \times \mathbf{t}_{ij} \right] \quad (8)$$

$$\mathbf{T}_i^{(H)*} = R_H \mathbf{n}_i \times \mathbf{h} \quad (9)$$

以上の式で、上付き添字*は無次元化された量を意味する。さらにオーバーチルド($\sim$)は粒子直径 D を基準とした無次元量である。 $\mathbf{F}_{ij}^{(m)*}$ は粒子 j が粒子 i に作用する磁気力、 $\mathbf{F}_{ij}^{(V)*}$ は粒子 j との界面活性剤の重なりにより生じる斥力、 $\mathbf{T}_{ij}^{(m)*}$ は粒子 j が磁気力によって粒子 i に作用するトルク、 $\mathbf{T}_i^{(H)*}$ は磁気モーメントが印加磁場の方向からずれることによって生じるトルクである。また、 $\mathbf{n}_i$ は磁気モーメント $\mathbf{m}_i$ の方向を表す単位ベクトルで、 $\mathbf{n}_i = \mathbf{m}_i/m$ ($m=|\mathbf{m}_i|$)、 $\mathbf{h} = \mathbf{H}/H$ 、 $\mathbf{t}_{ij}$ は粒子 i, j 間を結ぶベクトル $\mathbf{r}_{ij}$ ($=\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$) の単位ベクトル表現で、 $\mathbf{t}_{ij} = \mathbf{r}_{ij}/r_{ij}$ 、 $r_{ij} = |\mathbf{r}_{ij}|$ 、 D_1 は界面活性剤層を含めた粒子の直径で $D_1 = D + 2\delta_0$ である。上式に現れた無次元パラメータ R_m, R_V, R_H は従来の凝集現象の研究で用いられてきた無次元パラメータ λ ($=\mu_0 m^2/(4\pi D^3 kT)$)、 ξ ($=\mu_0 m H/kT$)、 λ_V ($=\pi D^2 n_s/2$) とは次の関係式で表される。

$$R_m = \frac{1}{D^*} \lambda, \quad R_V = \frac{1}{3\delta^*} \lambda_V, \quad R_H = \frac{1}{3} \xi \quad (10)$$

以上の導出においては、格子ボルツマン法の理論⁽⁹⁾より、 $kT = m_0 c^2/3$ (m_0 は 1 格子当たりの仮想流体粒子の質量) なる関係を考慮した。また、 λ と ξ はそれぞれ粒子と粒子、粒子と磁場との磁気的な相互作用の大きさを表す無次元パラメータ、 λ_V は界面活性剤層の重畳に起因する斥力の大きさを表す無次元パラメータ、 μ_0 は真空の透磁率、 n_s は粒子表面の単位面積当たりの界面活性剤分子の数である。

結局、任意の粒子 i に作用する力 $\mathbf{F}_i^*$ は他の粒子から作用する力 $\mathbf{F}_{ij}^{(m)*}$ および $\mathbf{F}_{ij}^{(V)*}$ の総和、ならびに、まわりの格子からの力 $\mathbf{F}_i^{(luc)*}$ およびランダム力 $\mathbf{F}_i^{(fluc)*}$ の和となる。粒子 i に作用するトルク $\mathbf{T}_i^*$ は $\mathbf{T}_{ij}^{(m)*}$ 、 $\mathbf{T}_i^{(H)*}$ 、 $\mathbf{T}_i^{(luc)*}$ 、 $\mathbf{T}_i^{(fluc)*}$ の総和からなる。

任意の磁性粒子 i の運動方程式の無次元表示は次のとおりである⁽¹⁷⁾⁽¹⁹⁾。

$$\mathbf{r}_i^*(t^*+1) = \mathbf{r}_i^*(t^*) + \mathbf{v}_i^*(t^*) + \frac{2}{\pi \rho_p^* D^{*2}} \mathbf{F}_i^*(t^*) \quad (11)$$

$$\mathbf{v}_i^*(t^*+1) = \mathbf{v}_i^*(t^*) + \frac{4}{\pi \rho_p^* D^{*2}} \mathbf{F}_i^*(t^*) \quad (12)$$

$$\mathbf{n}_i^*(t^*+1) = \mathbf{n}_i^*(t^*) + \boldsymbol{\omega}_i(t^*) \times \mathbf{n}_i(t^*) \quad (13)$$

$$\boldsymbol{\omega}_i^*(t^*+1) = \boldsymbol{\omega}_i^*(t^*) + \frac{32}{\pi \rho_p^* D^{*4}} \mathbf{T}_i^*(t^*) \quad (14)$$

なお、本研究では2次元の格子ボルツマン法を採用しているため、先の研究⁽¹⁷⁾⁽¹⁹⁾と同様に、磁性粒子と仮想流体粒子の相互作用を計算するに際しては磁性粒子を単位長さの円柱粒子と見なして処理している。

4. シミュレーションのための諸量の設定

シミュレーションを行うに際して、前報の結果⁽³⁾⁽¹⁷⁾⁽¹⁹⁾を参考にし、以下のような諸量の値を設定した。磁性粒子の無次元密度を $\rho_p^*=5$ 、緩和時間を $\tau=0.7$ とし、代表例として、無次元直径を $D^*=15$ 、磁性粒子の初期体積分率を $\phi_i=0.2$ 、粒子数を $N_p=196$ 、シミュレーション領域の大きさを $(l_x^*, l_y^*)=(420, 420)$ とし、特に断らない限りこの条件が用いられた。これらの設定条件下では多くの計算がIntel Quad Core i7-2600のCPUで約22時間要した。界面活性剤による相互作用の大きさを $\lambda_r=150$ 、粒子間の磁気的な相互作用の大きさを $\lambda=0\sim 20$ 、磁性粒子と磁場との相互作用の大きさを $\xi=0\sim 20$ と幅広く設定した。磁性粒子間の力を求めるためのカットオフ距離 $\tilde{r}_{\text{cutoff}} (=r_{\text{cutoff}}/D)$ は $\tilde{r}_{\text{cutoff}}=7.0$ を採用し、総時間ステップ数は $N_{\text{time}}=100,000$ 、初期の1割のステップ数での値を除いた値を用いて平均操作を行った。なお、今回は種々のパラメータの影響を検討しなければならないので、緩和時間を $\tau=0.7$ に限定したが、粘度が $\eta=\rho_0\Delta t c^2(2\tau-1)/6$ の式で表されることから予想されるように、緩和時間の値が変わると、理論的な温度を与える粘度の修正係数 c_η の値は変化することが予想されることを指摘しておく。

以下の結果の議論に際しては、定性的な比較においては磁性粒子の凝集構造のスナップショットの結果に着目し、定量的な検討においては粒子間の2体相関関数の結果に主として着目する。

5. 結果と考察

5.1 粘度修正法により得た磁性粒子の凝集構造の妥当性

まず、粘度修正法で得た磁性粒子の凝集構造の妥当性をモンテカルロ法で得た結果と比較検討することで明ら

Fig.3 Aggregate structures for LB: (a) for $\lambda=5$ and $\xi=1$; (b) for $\lambda=10$ and $\xi=1$; (c) for $\lambda=5$ and $\xi=10$; (d) for $\lambda=10$ and $\xi=10$

 Fig.4 Aggregate structures for MC: (a) for $\lambda=5$ and $\zeta=1$; (b) for $\lambda=10$ and $\zeta=1$; (c) for $\lambda=5$ and $\zeta=10$; (d) for $\lambda=10$ and $\zeta=10$

 Fig.5 Pair correlation functions for LB:
(a) for $\zeta=1$; (b) for $\zeta=10$

 Fig.6 Pair correlation functions for MC:
(a) for $\zeta=1$; (b) for $\zeta=10$

かにする．なお，モンテカルロ法は十分に確立されたシミュレーション法であり，本研究で対象としているような不確定要素のない単純な磁性粒子分散系でかつ正準集団を対象とする場合には，モンテカルロ法の結果は理論解と見なすことができることを前もって指摘しておく．

図 3 は粘度修正法を組み込んだ揺動流体力学に基づく格子ボルツマン・シミュレーションの結果である．図 3(a),(b) は磁場の強さが $\xi=1$ の場合，図 3(c),(d) は $\xi=10$ の場合のスナップショットで，粒子間相互作用の影響を見るために，図 3(a),(c) が $\lambda=5$ とした結果，図 3(b),(d) が $\lambda=10$ とした結果である．図 4 はモンテカルロ法による同様の凝集構造の結果である．なお，参考のために粘度の修正係数 c_η の値を示すと図 3(a),(b),(c),(d) に対してそれぞれ $c_\eta=0.48, 0.51, 0.53, 0.55$ である．磁場がブラウン運動の影響と同程度 ($\xi=1$) で粒子間相互作用がある程度支配的な図 3(a) の場合，粒子の磁気モーメントは磁場方向（紙面上方向）に強く拘束されることはないで，短い鎖状クラスタが種々の方向を向いて形成されていることがわかる．粒子間磁気力を非常に支配的にした $\lambda=10$ の図 3(b) の場合，非常に長い鎖状クラスタが形成され，磁気モーメントが磁場方向に拘束されることが少ないので，それらの鎖状クラスタがネットワーク状に結合していることがわかる．以上のクラスタ形成の定性的な特徴はモンテカルロ法によって得た凝集構造である図 4(a),(b) と非常によく一致している．磁場の影響がブラウン運動に対して支配的な $\xi=10$ の場合である図 3(c),(d) の結果は，磁場方向に鎖状クラスタを形成し，粒子間相互作用が $\lambda=5$ から $\lambda=10$ と大きくなるほどより長く顕著な鎖状クラスタを形成するようになる．さらにそのような鎖状クラスタが数本凝集して太い鎖状クラスタを形成する特徴は，モンテカルロ法の結果である図 4(d) と非常によく一致することが見て取れる．前報¹⁷⁾のブラウン動力学法とのハイブリッド型の格子ボルツマン法による非常に密な太い鎖状クラスタの形成と比較すると，粘度修正法による結果はモンテカルロ法による凝集構造を定性的にほぼ満足できるレベルで再現していることがわかる．

次に粒子間の 2 体相関関数に着目した定量的な考察を行う．図 5 は本格子ボルツマン法により得られた磁場方向の磁性粒子間の 2 体相関関数の結果であり，図 5(a) は磁場の強さが $\xi=1$ の場合，図 5(b) は $\xi=10$ の場合の結果である．なお，図 5(a) は図 3(a),(b) に相当し，図 5(b) は図 3(c),(d) に相当する．同様の場合のモンテカルロ法による結果を図 6 に示す．強磁場下である図 5(b) の場合磁場方向に太い鎖状クラスタを形成する特徴を有しているので，界面活性剤層を含めた粒子直径のほぼ整数倍の位置に鋭いピークを有する分布になっていることがわかる．この特徴は粒子間相互作用が $\lambda=5, 10$ でも変わらないが， λ の値が大きいほど粒子間磁気力が大きくなるので，若干短い位置にずれたところでピーク値を示すようになり，しかもより高いピーク値を示すようになる．これは図 3 からわかるように， λ の値が大きいほど安定した長い鎖状クラスタを形成することから，物理的に妥当な結果である．図 5(a) の $\xi=1$ の弱い印加磁場の結果もほぼ同じ特徴を有しているが，ただし図 3(b) からわかるように，磁場が弱く粒子間磁気力が大きくなるほど，磁場方向に限定されない鎖状クラスタのネットワーク構造の凝集体を形成するようになる．従って，本研究で対象としている磁場方向の 2 体相関関数のピーク値は， $\xi=10$ の場合の結果よりもかなり低くなっている．以上が粘度修正法に基づく本格子ボルツマン法の結果であるが，図 6 のモンテカルロ法の結果と比較すると，ピーク値の位置および高さに関して，ほぼ完全に満足できるレベルで一致していることがわかる．前報¹⁷⁾の速度スケール法を組み込んだブラウン動力学法とのハイブリッド型格子ボルツマン法による結果が，モンテカルロ法のピーク値のよりも 3 倍程度高いピーク値を与えてしまうことを考慮すると，ほぼ満足できるレベルでモンテカルロ法の結果と一致すると言える．

5・2 磁化曲線の妥当性

磁性粒子の回転ブラウン運動の誘起の妥当性は磁気モーメントの平均操作から評価される磁化曲線からも考察できる．図 7 は粒子間相互作用の大きさを $\lambda=1, 10$ と 2 通りに取って得た磁化の強さ M の値を飽和磁化の強さ M_0 で規格化した値が示してある．図 7(a) は本格子ボルツマン法による磁化曲線，図 7(b) はモンテカルロ法による磁化曲線である．図 7 から明らかなように，粒子の凝集現象が生じない $\lambda=1$ の場合と顕著な鎖状クラスタが生じる $\lambda=10$ のどちらの場合でも，印加磁場の強さがある程度大きい $\xi=5$ 以上では，本格子ボルツマン法の結果とモンテカルロ法の結果はほぼ，満足できるレベルで一致することがわかる．磁場が弱い $\xi=1$ の場合は， $\lambda=1$ のときにはほぼ一致するが， $\lambda=10$ のときにはモンテカルロ法との一致はあまりよくない．これは本シミュレーション法の欠

点を意味しているものではなく、 $\lambda=10$ で弱磁場の場合ネットワーク状の凝集構造を取るので、シミュレーションで用いた磁性粒子の数の影響が顕著に現れるためである。従って、凝集体が形成されない $\xi=\lambda=1$ の場合には、モンテカルロ法の結果とほぼ一致することがよく理解できる。なお、系を大きくしていけば $\lambda=10$ の場合でも平均操作の誤差に基づく不一致は改善していくが、最適な系の大きさは対象としている凝集体の形成状況や数密度に依存し、一概に確定的なことは言えない。従って、試行錯誤的に系の大きさを決めるのが通常である。

前項および本項の結果の考察から、粘度修正法を組み込んだ揺動流体力学法による格子ボルツマン法はモンテカルロ法の結果と十分に一致し、粒子のブラウン運動が支配的な粒子サスペンションのシミュレーション法として、非常に有効な方法であることが結論づけられる。従って次項以後では、本方法を熱力学的非平衡状態の流れ問題への適用を容易にするために、粘度修正法の特徴を詳細に説明することを試みる。

5・3 粘度のスケーリング係数と粒子間磁気力および磁場の強さとの関係

本項以後では、修正係数 c_η を乗じた $\eta'=c_\eta\eta$ の修正値を用いて粒子のブラウン運動を誘起し、粒子の速度から評価した系の温度が理論値の温度を与える修正係数 c_η の特徴について論じる。なお、以下に示す修正係数の誤差としてはほとんどが後に示す表 1 に表した程度であることに注意されたい。

図 8 は修正係数 c_η の粒子間の磁気的な相互作用の大きさ λ への依存性を、磁場の強さを $\xi=1,10$ の 2 通りに取って調べた結果である。体積分率など他のパラメータの設定値は第 4 節で示したとおりである。図 8 から、どちらの印加磁場の強さの場合でも、粒子間磁気力の大きさ λ の値にはほとんど依存せず、約 0.5 の値で一定していることがわかる。すなわち、前報の速度スケーリング法の結果で指摘したように⁽¹⁷⁾、近接格子点からの揺動流体力学に基づくランダム変位の誘起法では、粘度修正法を用いないと過度のブラウン運動が誘起されることが理解できる。

図 9 は修正係数 c_η の磁場の強さ ξ への依存性を、粒子間磁気力の大きさを $\lambda=1,10$ の 2 通りに取って調べた結果である。図 9 より、磁場の強さへの依存性はほとんど顕著ではなく、修正係数 c_η の値は磁場の強さの変化に対してほぼ一定である。ただし、 $\lambda=10$ の場合の方が若干大きな値を示しており、この傾向は磁場がゼロに漸近するほど減少することがわかる。粒子間磁気力の大きさが増すほど、修正係数の値が少し大きくなること、すなわち、粘度修正法を用いない場合ランダム変位の誘起が若干小さくなることは、粒子の凝集体形成と密接に関係している。 $\lambda=10$ のように粒子間磁気力が大きくなると、粒子は顕著に凝集して鎖状クラスタやネットワーク状のクラスタを形成するので、そのようなクラスタを形成する粒子のまわりの近接格子点の数は、凝集せずに単独で運動している粒子のそれと比較して減少する。揺動流体力学に基づくランダム力は近接格子点から粒子に作用するのでそのような作用点の減少によりブラウン運動が若干誘起されにくくなり、その結果少し大きな修正係数の値を与えるようになる。

Fig.7 Magnetization curves for $\lambda=1$ and 10: (a) for LB and (b) for MC

Fig.8 Dependence of the scaling factor of viscosity on the magnetic particle-particle interaction for $\zeta=1$ and 10

Fig.9 Dependence of the scaling factor of viscosity on the magnetic field strength for $\lambda=1$ and 10

5・4 粘度の修正係数に及ぼす粒子直径および粒子の体積分率の影響

粘度の修正係数 c_η に及ぼす粒子直径 D^* の影響すなわち格子の粗さの影響の結果を図 10 に示す。なお、粒子直径が大きいということはより緻密な格子を用いていることを意味することに注意されたい。図 10 には $(\lambda, \zeta) = (10, 10), (1, 10), (10, 1)$ の 3 通りの場合に対して得られた結果が示してある。 $(\lambda, \zeta) = (10, 10)$ および $(10, 1)$ の場合の結果を見ると、修正係数は粒子直径が $D^*=12$ 程度までは一定で約 0.5 の値を保つが、それよりも粒子直径が小さくなると、急激に小さな値を取るようになり、 $D^*=8$ 程度ではほぼ $c_\eta=0$ となってしまう。すなわち、粒子直径が小さくなるほど、粘度修正法を用いないと粒子のブラウン運動がより過度に誘起されるようになることを意味している。このことは先の研究でも指摘されたことであり⁽¹⁷⁾、粒子直径が小さくなると格子の幾何学的な形状に基づく擬似的なランダム力が発生することから生じるものである。従って、 $D^*=8$ 程度以下の格子を用いた場合には、粘度をゼロにして揺動流体力学的にランダム力を発生させなくても、この幾何学形状に基づく擬似的なランダム力が支配的になってしまうので、本粘度修正法が適用できなくなってしまうことを意味している。このように粗い格子を用いた場合に対して、ブラウン運動を妥当なレベルで誘起させる方法は今後の研究課題である。 $(\lambda, \zeta) = (1, 10)$ の場合の結果を見ると、前述の場合と比較すれば粒子直径の変化に対してほぼ一定であると言えることができるが、粒子直径が小さくなるほど修正係数の値は若干大きくなる傾向があることがわかる。このような修正係数の特徴の相違は粒子が顕著な凝集構造を取るか単独で運動しているかに大きく依存している。 $(\lambda, \zeta) = (10, 10)$ および $(10, 1)$ の場合、粒子は顕著に凝集して磁場方向に鎖状クラスタを形成するかネットワーク状の凝集構造を取るが、 $(\lambda, \zeta) = (1, 10)$ の場合粒子は凝集することなしにほとんど単独で運動している。前者の場合両隣に他の粒子が密な状態で存在しているので、そのような状態でランダム変位が加わると、界面活性剤層の顕著な重なりが生じるのでその結果ランダム変位が一層増幅されるようになる。このような状況は粒子直径が小さくなるほど顕著に現れることになる。 $(\lambda, \zeta) = (1, 10)$ の場合、両隣に他の粒子が存在しないので、ランダム変位が増幅されることはない。このように、粒子直径が小さいほど、凝集構造に基づくランダム変位の影響が顕著に生じるようになることが理解できる。

次に修正係数に及ぼす粒子の体積分率の影響を考察する。図 11 は $\zeta=\lambda=10$ とし、粒子直径を $D^*=15, 12, 10$ の 3 通りに取った場合の修正係数 c_η の体積分率 ϕ_v への依存性を調べた結果である。粒子直径が $D^*=15, 12$ の場合、ほぼ修正係数の値は一致しており、体積分率とともに修正係数は若干減少するが、顕著な変化ではない。後の 2 体相関関数の結果からわかるように、体積分率が小さいほどより安定した鎖状クラスタを形成するので、このような状況下では先に示したように両隣の粒子との相互作用でランダム変位が増幅される傾向がある。これが、体積分率の減少とともに修正係数が小さくなる理由である。以上の特徴は $D^*=10$ のように粒子直径が小さくなる程顕著に現れるようになる。

Fig.10 Dependence of the scaling factor of viscosity on the diameter of magnetic particles

Fig.11 Dependence of the scaling factor of viscosity on the volumetric fraction of magnetic particles

Table 1 Dependence of the scaling factor of viscosity on the number of magnetic particles

	N_p		
	49	100	196
$D^*=15$	$c_\eta = 0.64^{+0.03}_{-0.07}$	$0.57^{+0.06}_{-0.03}$	$0.55^{+0.03}_{-0.03}$
$D^*=12$	$0.58^{+0.08}_{-0.05}$	$0.54^{+0.06}_{-0.08}$	$0.54^{+0.03}_{-0.04}$
$D^*=10$	$0.40^{+0.05}_{-0.07}$	$0.32^{+0.05}_{-0.10}$	$0.37^{+0.03}_{-0.03}$

5・5 粘度の修正係数に及ぼす磁性粒子の粒子数の影響

粘度の修正係数に及ぼす磁性粒子の数への影響を、粒子直径を $D^*=15, 12, 10$ の3通りに取って得た結果を表1に示す。なお、磁場の強さおよび粒子間磁気力の大きさは $\zeta=\lambda=10$ とした場合である。誤差の程度として、10個のサブ平均値の最大値と最小値の平均値からのずれとして、平均値の数値に付してある。前項の体積分率への影響と同様に、粒子直径が $D^*=15, 12$ の場合には値がよく一致し、粒子数の変化に対してほぼ一定で変化しないことがわかる。粒子数が $N_p=49$ の場合は若干大きな値となるが、誤差の範囲内なのでそれほど大きな変化とは見なせない。粒子直径が $D^*=10$ の場合、粘度の修正係数は元々小さな値となるが、誤差の範囲内で、系の粒子数への顕著な依存性は見取することはできない。このように、与えられた粒子直径すなわち用いる格子粗さに対して、粘度の修正係数は系の粒子数には顕著に依存しないと考えられる。凝集形態の特徴を十分表現できる粒子数が存在すれば、粘度の修正係数を決定づけるのは、粒子間相互作用の大きさが主要な要因であるからである。

5・6 2体相関関数の第1ピークと第2ピークの高さに及ぼす粒子直径および体積分率の影響

最後に、磁性粒子の凝集現象に及ぼす格子粗さの影響および体積分率の影響を、磁場方向の2体相関関数の第1ピーク値と第2ピーク値の高さに着目して定量的に論じる。図12は格子粗さすなわち粒子直径の影響を (λ, ζ) の3通りの場合に対して調べた結果であり、モンテカルロ法の結果も併せて示してある。 $(\lambda, \zeta)=(10, 10)$ および $(1, 10)$ の場合、第1ピークと第2ピークの高さはともに粒子直径にほとんど依存しないことがわかる。これは $D^*=10$ のようにある程度粗い格子を用いても、磁性粒子の凝集構造を粒子直径に関係なく的確に捕獲できることを意味している。一方、 $(\lambda, \zeta)=(10, 1)$ の場合、粒子直径に若干依存し粗い格子用いるに従って第1ピークの値が多少減少するようになるが、それほど顕著ではないと言える。先の研究¹⁷⁾のブラウン動力学法とのハイブリッド型の格子ボルツマン法が、モンテカルロ法の値の約3倍のピーク値を与えることを考慮すると、本粘度修正法を用いた格子ボルツマン法は物理的に妥当な凝集構造を与えることができると言える。

Fig.12 Dependence of the first and second peak of the pair correlation function on the diameter of magnetic particles

Fig.13 Dependence of the first and second peak of the pair correlation function on the volumetric fraction of magnetic particles

図 13 は 2 体相関関数のピーク値の体積分率への依存性を粒子直径を $D^*=15, 12, 10$ の 3 通りに取って示したものである。図 13 からわかるように、2 体相関関数の第 2 ピーク値の値はモンテカルロ法の結果とほぼ完全に一致することがわかる。また、第 1 ピーク値に関しては、 $D^*=10, 12, 15$ のような緻密な格子を用いると、モンテカルロ法の結果とほぼ一致することが見て取れる。ただし、 $D^*=10$ の場合には、希釈な $\phi_v=0.05$ のときにはモンテカルロ法の結果より若干低い値を与えるが、スナップショットの定性的な特徴はモンテカルロ法の結果と非常によく一致し、相違は見て取ることができない。このように 2 体相関関数の第 1 ピーク値は用いた格子の粗さに非常に敏感に反映されるが、 $D^*=10$ の場合でもモンテカルロ法の結果とほぼ満足できる一致を示すことは、粘度修正法を用いた格子ボルツマン法が粒子サスペンション系に対して比較的大きな粒子直径を用いれば、格子の粗さに関係なく物理的に妥当な凝集構造の結果を与えることができる、と結論づけることができる。

6. 結 言

磁性粒子サスペンション系への流体問題への適用を計るために、揺動流体力学に基づいた粒子のブラウン運動誘起法に関して、ブラウン運動の誘起レベルの精密化を実現するための粘度修正法に関して詳細に検討した。粒子のブラウン運動のレベルは粘度が大きいほど大きなランダム力が発生するので、その値を修正することでランダム力のレベルを妥当なレベルにするのが本粘度修正法概念である。本研究では熱力学的平衡状態にある磁性粒子サスペンション系を対象として、今後の非平衡状態の流れの問題への適用を計るために、粘度のスケール値に及ぼす格子粗さや体積分率などの種々の影響を詳細に検討した。結果の妥当性は理論解と考えられるモンテカルロ法の結果と比較することで行った。具体的には、定性的な議論として凝集構造のスナップショット、定量的な議論として 2 体相関関数や磁化曲線を取り上げた。得られた結果を要約すると以下ようになる。まず、粘度修正法の妥当性に関しては、磁性粒子の太い鎖状クラスタの形成やネットワーク構造などの凝集は、モンテカルロ法の結果と比較すると、スナップショットによる定性的にならびに 2 体相関関数や磁化曲線など定量的にも非常によく一致する。このような一致は、ある程度緻密な格子系を用いる限り、粒子径に依存せず得られるものである。さらに、粘度修正法の特徴としては、 $D^*=15$ などのように与えられた粒子直径に対して、粘度の修正係数は粒子間磁気力および磁場の強さにはほとんど依存せずそれらの変化に対してほぼ一定である。粗い格子系を用いなければ、体積分率の変化に対して粘度の修正係数はほぼ一定である。磁性粒子が顕著に凝集するような条件下では、粒子直径が減少するほど修正係数が小さな値を取るようになる。用いた格子系に対して、系の粒子数が変化しても、修正係数が顕著に変化することはない。以上より、流れ場および非一様磁場の環境下で、粒子の疎な状態や凝集体が生じる密な状態が生じるような局所的に体積分率の変化する状態や、印加磁場の非一様性

により磁性粒子に働く体積力が系内で変化するような状態が生じる流体問題をシミュレートする方法として、本粘度修正法は非常に可能性のある方法であると結論づけることができる。

本研究の一部は文部科学省の科学研究費補助金・基盤研究 B(20360048)の補助を受けてなされた。ここに付記して謝意を表する。

文 献

- (1) Rosensweig, R.E., “Ferrohydrodynamics”, (1985), Cambridge University Press.
- (2) Bullough, W.A.(Ed.), “Electro-Rheological Fluids, Magneto-Rheological Suspensions and Associated Technology”, (1996), World Scientific, Singapore.
- (3) 佐藤 明, “強磁性コロイド分散系における太い鎖状クラスタ形成に関するモンテカルロ・シミュレーション”, 日本機械学会論文集 B 編, Vol. 61, No. 583 (1995), pp. 926-932.
- (4) 佐藤 明, Chantrell, R.W., 神山 新一, Coverdale, G.N., “強磁性微粒子の太い鎖状クラスタ形成に関する 3 次元モンテカルロ・シミュレーション”, 日本機械学会論文集 B 編, Vol. 61, No. 588 (1995), pp. 2961-2967.
- (5) 佐藤 明, Chantrell, R.W., Coverdale, G.N., 神山 新一, “強磁性コロイド分散系の単純せん断流中での挙動に関するストークス動力学シミュレーション”, 日本機械学会論文集 B 編, Vol.63, No.613 (1997), pp.3017-3024.
- (6) 佐藤 明, Chantrell, R.W., Coverdale, G.N., “単純せん断流中での強磁性コロイド分散系の挙動に関するブラウン動力学シミュレーション”, 日本機械学会論文集 B 編, Vol.64, No.620 (1998), pp.1033-1040.
- (7) 佐藤 明, Coverdale, G.N., “振動せん断流下での強磁性コロイド分散系の動的特性に関するストークス動力学シミュレーション”, 日本機械学会論文集 B 編, Vol.66, No.643 (2000), pp.796-803.
- (8) Allen, M.P., and Tildesley, D.J., “Computer Simulation of Liquids”, (1987), Clarendon Press.
- (9) 佐藤 明, 分子シミュレーション—アドバンス実践編—, (2009), V2 ソリューション.
- (10) Hoogerbrugge, P.J., and Koelman, J.M.V.A., “Simulating microscopic hydrodynamic phenomena with dissipative particle dynamics”, *Europhysics Letters*, Vol. 19 (1992), pp.155-160.
- (11) Espanol, P., and Warren, P., “Statistical mechanics of dissipative particle dynamics”, *Europhysics Letters*, Vol. 30 (1995), pp. 191-196.
- (12) Satoh, A., “Introduction to Practice of Molecular Simulation: Molecular Dynamics, Monte Carlo, Brownian Dynamics, Lattice Boltzmann and Dissipative Particle Dynamics”, (2010), Elsevier Insights.
- (13) Succi, S., “The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond”, (2001), Clarendon Press.
- (14) Rothman, D.H., and Zaleski, S., “Lattice-Gas Cellular Automata, Simple Models of Complex Hydrodynamics”, (1997), Cambridge University Press.
- (15) Ladd, A.J.C., “Short-time motion of colloidal particles: numerical simulation via a fluctuating lattice-Boltzmann equation”, *Physical Review Letters*, Vol. 70 (1993), pp.1339-1342.
- (16) Ladd, A.J.C., “Numerical simulations of particulate suspensions via a discretized Boltzmann equation. Part I. Theoretical foundation”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 271 (1994), pp.285-309.
- (17) 佐藤 明, “格子ボルツマン法の磁性粒子分散系への適用のためのブラウン運動誘起法の検討”, 日本機械学会論文集 B 編, Vol.76, No.770 (2010), pp.1534-1542.
- (18) 佐藤 明, “2 次元平行平板間内の磁場勾配環境下での磁性サスペンションの流れに関する格子ボルツマン・シミュレーション”, 日本機械学会論文集 B 編. (印刷中)
- (19) 佐藤 明, Chantrell, R.W., “格子ボルツマン法の多粒子分散系への適用”, 日本機械学会論文集 B 編, Vol.75, No.758 (2009), pp.2011-2018.
- (20) Landau, L D., and Lifshitz, E. M. (translated by J. B. Sykes and W. H. Reid), “Fluid Mechanics, 2nd Ed.”, (1987), Butterworth-Heinemann.