正方形角柱群内乱流の LES による体積平均乱流輸送方程式の考察*

桑田 祐丞^{*1}, 須賀 一彦^{*2}

A Study on the Volume Averaged Turbulence Transport Equations by Performing LES of Square Rod Array Flows

Yusuke KUWATA^{*1} and Kazuhiko SUGA^{*1} Department of Mechanical Engineering, Osaka Prefecture University
1-1 Gakuen-cho, Naka-ku, Sakai, Osaka, 599-8531, Japan

To understand the mechanism of the turbulence transport in porous media, large eddy simulations have been performed by a multiple-relaxation time lattice Boltzmann method. The porous media presently considered are square rod arrays. Changing the square rod size, five different cases of the porous media are analysed. Using the simulation data, the budget terms of the volume averaged Reynolds stress equations are investigated in detail. It is found that the behaviour of the production, redistribution and dissipation terms drastically changes when the porosity of the porous media becomes higher than 0.75. When the porosity becomes higher, it is observed that a perturbation by the Kármán vortex shedding propagates in the whole domain. This perturbation is the source of the cross-streamwise component of the Reynolds stress. It is confirmed that there is a relation between the porous characteristic scales and the turbulent length scale and one of the production terms of the transport equation of the volume averaged Reynolds stress can be modelled by the Darcy-Forchheimer form.

Key Words : Turbulence, Square Rod Array, Porous Media, Lattice Boltzmann Method, Large Eddy Simulation

1. 緒 言

多孔体が関連する流動現象は工業分野において、たとえば熱交換器や触媒装置内の流動などで見られ、自然界においても植生表面流れやビル群の流れなど数多くみられる。多孔体を流れ場にもつ工業製品の設計においては、多孔体内外の流動現象の予測が肝要となる。複雑な多孔体形状を忠実に再現した系での数値解析は非構造格子の利用や、格子ボルツマン法などで可能であるが⁽¹⁾⁽²⁾⁽³⁾、多孔体内の乱流解析にいたっては、膨大な計算格子数と計算コストが必要となるので、短時間での予測が求められる産業の設計現場における応用は難しい。そこで、体積平均を施したナビエ・ストークス方程式を基に、多孔体構造を直接解像しない巨視的な解析が提案されている⁽⁴⁾⁽⁵⁾。しかし、乱流モデルを用いた解析には、体積平均に加えてレイノルズ平均を施した二重平均系における支配方程式を閉じる必要がある。二重平均系における運動量式やレイノルズ応力方程式は、二重平均操作により多くの相関項を含み⁽⁶⁾⁽⁷⁾、解析を行うためにはこれらの相関項に対してモデル化を施す必要がある。二重平均系において、この問題を扱った乱流モデルはこれまでにいくつか報告されている⁽⁸⁾⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾。しかし二重平均系におけるレイノルズ応力方程式中の相関量に対するモデリングは難しく、十分な検討がなされているわけではない。そのため、二重平均系における乱流モデルは多くの課題を残していると考えられる。多孔体内における乱流モデルの構築には、二重平均系におけるレイノルズ応力方程式の各項の定量的な評価や乱流輸送メカニズムの解明が必要である。そこで本研究では、多孔体内などの複雑境界面を含む乱流場に対して適用が容易であり、並列計算に適した格子ボルツマン法を利用し、Kuwahara ら⁽¹¹⁾が行ったものと同じ千鳥配置正方形角柱群により多孔体形状を模擬した系

* 原稿受付 2013 年 4 月 26 日

^{*1} 学生員, 大阪府立大学大学院工学研究科機械系専攻 (〒599-8531 大阪府堺市中区学園町 1-1)^{*2} 正員, 大阪府立大学大学院工学研究科機械系専攻

E-mail: suga@me.osakafu-u.ac.jp

における LES を行い、二重平均系のレイノルズ応力方程式の各項間における詳細な収支解析を行った。そして各項の定量的な評価と乱流輸送に関する議論を通して、二重平均乱流モデルにおけるモデル項の構築に有用な知見を得ることを目指した。

2. 体積平均レイノルズ応力方程式

ある物理量 ϕ に関して体積平均を施すと、全相平均 $\langle \phi \rangle$ 、および流体相平均 $\langle \phi \rangle^f$ は

$$\langle \phi \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \phi dV, \quad \langle \phi \rangle^f = \frac{1}{\Delta V_f} \int_{\Delta V_f} \phi dV, \quad (1)$$

と定義される。ここで ΔV_f は体積平均を行う検査体積 ΔV (REV: Representative Elementary Volume) の流体相の体積であり、空隙率 ϕ は $\phi = \Delta V_f / \Delta V$ と定義される。また体積平均量からの分散 (dispersion) は $\tilde{\phi} = \phi - \langle \phi \rangle^f$ と定義される。ここで、体積平均と微分操作に関して、

$$\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right\rangle = \frac{\partial \langle \phi \rangle}{\partial x_k} + \frac{1}{\Delta V} \int_A n_k \phi dA, \quad (2)$$

の関係があり、 A は多孔体の固相障害物の表面積を表し、 n_k は固相表面に向かって垂直な単位ベクトルを表す。また体積平均とレイノルズ平均操作の間には以下の交換則が成り立つ⁽⁹⁾。

$$\langle \tilde{\phi} \rangle^f = \overline{\langle \phi \rangle^f}, \quad \langle \phi' \rangle^f = \langle \phi \rangle^{f'}, \quad \tilde{\phi}' = \tilde{\phi}', \quad \tilde{\tilde{\phi}} = \tilde{\phi}. \quad (3)$$

ここで $\overline{}$ はレイノルズ平均量で ϕ' はそこからの変動量を表す。これらを基に、速度を u_i とするときのレイノルズ応力 $\overline{u'_i u'_j}$ に体積平均を施した体積平均レイノルズ応力を記述すると以下のように二つの応力に分けることができる。

$$\underbrace{\langle \overline{u'_i u'_j} \rangle^f}_{R_{ij}^A} = \underbrace{\langle \overline{u'_i} \rangle^f \langle \overline{u'_j} \rangle^f}_{R_{ij}^M} + \underbrace{\langle \overline{\tilde{u}'_i \tilde{u}'_j} \rangle^f}_{R_{ij}^m}. \quad (4)$$

ここで、それぞれの応力を総応力 $R_{ij}^A = \langle \overline{u'_i u'_j} \rangle^f$ 、マクロスケール応力 $R_{ij}^M = \langle \overline{u'_i} \rangle^f \langle \overline{u'_j} \rangle^f$ および ミクロスケール応力 $R_{ij}^m = \langle \overline{\tilde{u}'_i \tilde{u}'_j} \rangle^f$ と呼ぶことにする。マクロスケール応力は REV より大きなスケールの乱れから生ずる応力であるのに対し、ミクロスケール応力は体積平均の分散の変動量の相関で表されており、REV 以下のスケールの乱れ、つまり多孔体の構造スケール程度かそれより小さなスケールによる乱れ応力を表している。

また、ナビエ・ストークス方程式に対して、均質で一樣な多孔質体を仮定して体積・レイノルズ平均の二重平均を施すと、運動量式は、

$$\frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle^f}{\partial t} + \langle \bar{u}_k \rangle^f \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle^f}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle \bar{p} \rangle^f}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle^f}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} (R_{ik}^M + R_{ik}^m + T_{ik}^D) - \bar{f}_i, \quad (5)$$

となる。ここで、 p は圧力、 ρ は流体の密度、 ν は流体の動粘性係数である。このように運動量式には三種類の応力項が現れ、 R_{ik}^M と R_{ik}^m に加えて、分散相関項 (dispersive covariance⁽¹²⁾) $T_{ik}^D = \langle \tilde{u}_i \tilde{u}_k \rangle^f$ が現れる。多孔体によって生じる形状抵抗、粘性抵抗からなる抗力項 f_i は Whitaker⁽⁴⁾⁽⁵⁾ にならい、

$$f_i = \frac{1}{\rho \Delta V} \int_A n_i \tilde{p} dA - \frac{\nu}{\Delta V} \int_A n_k \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} dA \simeq \frac{\varphi \nu}{K} \langle \hat{u}_i \rangle^f + \frac{\varphi^2 C_F}{\sqrt{K}} \sqrt{\langle \hat{u}_k \rangle^f{}^2} \langle \hat{u}_i \rangle^f, \quad (6)$$

のように多孔体の透過率 K とフォルヒハイマー係数 C_F を用いて Darcy-Forchheimer 項としてモデル化される。ここで $\hat{u}_i$ は多孔体に対する流体の相対速度を表している。抗力項 f_i は均質多孔体内流れでは、圧力勾配項とつりあうため、本研究では流速を変化させて層流状態において圧力勾配を調べることで透過率 K 、フォルヒハイマー係数 C_F を数値実験的に算出した。レイノルズ応力方程式に体積平均を施すことで、総応力 R_{ij}^A 、マクロスケール応力 R_{ij}^M およびミクロスケール応力 R_{ij}^m の輸送方程式をそれぞれ導くことができ、本研究で扱う一樣多孔体内の発達乱流においては、

$$R_{ij}^A: \quad 0 = \phi_{ij}^A + P_{ij}^A - \varepsilon_{ij}^A, \quad (7)$$

$$R_{ij}^M: \quad 0 = \phi_{ij}^M + P_{ij}^M - C_{ij}^M - F_{ij}^D - \varepsilon_{ij}^M, \quad (8)$$

$$R_{ij}^m: 0 = \phi_{ij}^m + P_{ij,1}^d + P_{ij,2}^d + C_{ij}^t + F_{ij}^D - \varepsilon_{ij}^m, \quad (9)$$

となる．ここで再分配項 ϕ_{ij}^A ，生成項 P_{ij}^A および散逸項 ε_{ij}^A は以下のように記述できる．

$$\phi_{ij}^A = \underbrace{\frac{\langle p' \rangle^f}{\rho} \left(\frac{\partial \langle u_i' \rangle^f}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j' \rangle^f}{\partial x_i} \right)}_{\phi_{ij}^M} + \underbrace{\left\langle \frac{\tilde{p}'}{\rho} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j'}{\partial x_i} \right) \right\rangle^f}_{\phi_{ij}^m}, \quad (10)$$

$$P_{ij}^A = - \underbrace{\left\langle \tilde{u}_i' \tilde{u}_k' \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_k} \right\rangle^f}_{P_{ij,1}^d} - \underbrace{\left\langle \tilde{u}_j' \tilde{u}_k' \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} \right\rangle^f}_{P_{ij,1}^d} \quad (11)$$

$$- \underbrace{\left\langle \tilde{u}_i' \langle u_k' \rangle^f \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_k} \right\rangle^f}_{P_{ij,2}^d} - \underbrace{\left\langle \tilde{u}_j' \langle u_k' \rangle^f \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} \right\rangle^f}_{P_{ij,2}^d} + \underbrace{\left\langle \tilde{u}_k' \tilde{u}_j \frac{\partial \langle u_i' \rangle^f}{\partial x_k} \right\rangle^f}_{P_{ij}^t} + \underbrace{\left\langle \tilde{u}_k' \tilde{u}_i \frac{\partial \langle u_j' \rangle^f}{\partial x_k} \right\rangle^f}_{P_{ij}^t}, \quad (12)$$

$$\varepsilon_{ij}^A = 2\nu \underbrace{\frac{\partial \langle u_i' \rangle^f}{\partial x_k} \frac{\partial \langle u_j' \rangle^f}{\partial x_k}}_{\varepsilon_{ij}^M} + 2\nu \underbrace{\left\langle \frac{\partial \tilde{u}_i'}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_k} \right\rangle^f}_{\varepsilon_{ij}^m}. \quad (13)$$

以上のように，再分配項 ϕ_{ij}^A はマクロスケール応力の再分配項 ϕ_{ij}^M とミクロスケール応力の再分配項 ϕ_{ij}^m の二つに分けることができる．生成項 P_{ij}^A は REV 内の速度分散の勾配による生成項であり， $P_{ij,1}^d$ ， $P_{ij,2}^d$ ， P_{ij}^t からなっている．粘性散逸率 ε_{ij}^A もマクロスケール応力の粘性散逸率 ε_{ij}^M とミクロスケール応力の粘性散逸率 ε_{ij}^m とに分けることができる．ミクロスケールとマクロスケール応力の輸送方程式内にはそれぞれに逆符号で対応する項 C_{ij}^t ， F_{ij}^D ：

$$C_{ij}^t = \left(\langle \tilde{u}_i' \tilde{u}_k' \rangle^f + \langle \tilde{u}_i' \tilde{u}_k' \rangle^f \right) \frac{\partial \langle u_j' \rangle^f}{\partial x_k} + \left(\langle \tilde{u}_j' \tilde{u}_k' \rangle^f + \langle \tilde{u}_j' \tilde{u}_k' \rangle^f \right) \frac{\partial \langle u_i' \rangle^f}{\partial x_k},$$

$$F_{ij}^D = \langle u_i' \rangle^f f_j' + \langle u_j' \rangle^f f_i'$$

$$= \frac{\langle u_i' \rangle^f}{\phi \rho \Delta V} \int_A n_j \tilde{p}' dA + \frac{\langle u_j' \rangle^f}{\phi \rho \Delta V} \int_A n_i \tilde{p}' dA - \frac{\nu \langle u_i' \rangle^f}{\phi \Delta V} \int_A n_k \frac{\partial \langle u_j' \rangle^f}{\partial x_k} dA - \frac{\nu \langle u_j' \rangle^f}{\phi \Delta V} \int_A n_k \frac{\partial \langle u_i' \rangle^f}{\partial x_k} dA, \quad (14)$$

が現れる．これら，マクロ～ミクロ乱流カスケード項 C_{ij}^t と抗力項 F_{ij}^D はマクロスケール応力とミクロスケール応力間のエネルギー分配を担う項である．

3. 計算手法

本研究では格子ボルツマン法による LES (たとえば文献⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾⁽¹⁵⁾ 参照) を行った．その手法の概略を以下に示す．

3.1 多緩和時間格子ボルツマン法

格子ボルツマン法は流体を有限個の仮想粒子の集合体とみなし，その仮想粒子の運動（並進運動・衝突運動）を格子ボルツマン方程式における密度分布関数の時間発展方程式を解き，密度分布関数のモーメントを計算することで巨視的流体運動の解析を行う⁽¹⁶⁾．本研究では高レイノルズ数流れに対応させるため，巨視的な物理変数に対して個々に最適な緩和係数を用いて衝突演算を行う多緩和時間格子ボルツマン法⁽¹⁷⁾を用いる．ある時刻 t ，位置ベクトル r における多緩和時間格子ボルツマン方程式における密度分布関数 f_α の時間発展方程式は，以下のように表される．

$$f_\alpha(r + e_\alpha \delta t, t + \delta t) - f_\alpha(r, t) = -M^{-1} \hat{S} [m_\alpha(r, t) - m_\alpha^{eq}(r, t)] + F. \quad (15)$$

ここで e_α は単位速度であり， δt は時間刻み， F は外力を表している．密度分布関数のモーメント m_α は密度，運動量，エネルギーなどの巨視的な物理量を表す．本研究では離散速度モデルに三次元 27 方向速度モデル (D3Q27) を

[illegible]
$$\hat{S} \equiv \text{diag}(0, 0, 0, 0, s_5, s_6, s_6, s_8, s_8, s_8, s_{11}, s_{11}, s_{11}, s_{14}, s_{14}, s_{14}, s_{17}, s_{18}, s_{19}, s_{19}, s_{21}, s_{21}, s_{21}, s_{24}, s_{24}, s_{24}, s_{27}).$$

と最適化されたものを用いた．緩和係数 s_6, s_8 は動粘性係数と関連付けられ，音速 c_s ，時間刻み δt を用いて，

のように表され, v を与えることで決定される. また局所平衡分布関数 f_{α}^{eq} は密度 ρ , 速度 $\mathbf{u}$ によって,

と記述される．D3Q27 速度モデルでは $c_s/c = 1/\sqrt{3}$, ($c = \Delta/\delta t$, Δ は格子間隔) , 重み係数 w_α は $w_\alpha = 8/27(\alpha = 0)$, $w_\alpha = 2/27(\alpha = 1 \cdots 6)$, $w_\alpha = 1/54(\alpha = 7 \cdots 18)$, $w_\alpha = 1/216(\alpha = 19 \cdots 27)$ となる．密度 ρ , 速度 $\mathbf{u}$, 圧力 p は密度分布関数のモーメントで,

と表される.

3.2 格子ボルツマン法における壁面境界条件

固体壁などの滑りなし境界条件を与えるために、格子ボルツマン法では一般的に跳ね返り (bounce-back) 境界条件が用いられる。これは壁面近傍の格子点において、壁面へ向かう粒子が壁面上で跳ね返り、再び元の格子点へ戻るとすることで壁面条件を満たすことができる手法である。本研究では壁面ノード点から半格子ずれた位置で壁面を設定する half-way bounce-back 境界条件を用いた。

3.3 SGS 乱流モデル

LES で用いられる一般的な SGS モデルである Smagorinsky モデルなどにおいては, SGS 渦粘性係数 ν_{SGS} の壁面漸近挙動 $\nu_{SGS} \propto O(y^3)$ を再現するために, 壁面垂直距離を用いた減衰関数が用いられるが, 複雑境界や境界の角部などでの取り扱いが困難である. そこで本研究では壁面垂直距離を用いることなく, 壁面漸近挙動を満たす WALE モデル⁽¹⁹⁾を用いた. WALE モデルでは格子平均歪み速度テンソル $\langle S_{ij} \rangle$, $\langle g_{ij} \rangle$ を以下のように定義し,

©2013 The Japan Society of Mechanical Engineers

Fig. 1 Computational geometry of the square rod arrays.

テンソル S_{ij}^d を

$$S_{ij}^d = \frac{1}{2} \left(\langle g_{ij} \rangle^2 + \langle g_{ji} \rangle^2 \right) - \frac{1}{2} \delta_{ij} \langle g_{kk} \rangle^2, \quad (22)$$

と定義する．ここで， $\langle g_{ij} \rangle^2 = \langle g_{ik} \rangle \langle g_{jk} \rangle$ とする．なお，本節では $\langle \rangle$ で囲まれた量を第二章で言及した体積平均量ではなく，LES の格子平均量と便宜的に定義する．これらのテンソルを用いて SGS 渦粘性係数は格子幅 Δ を用いて，

$$\nu_{SGS} = (C_w \Delta)^2 \frac{\left(S_{ij}^d S_{ij}^d \right)^{3/2}}{\left(\langle S_{ij} \rangle \langle S_{ij} \rangle \right)^{5/2} + \left(S_{ij}^d S_{ij}^d \right)^{5/4}}, \quad (23)$$

と表される．本研究で用いる D3Q27 多緩和時間格子ボルツマン法では，等間隔の格子を用い動粘性係数 ν を式 (18) のように緩和係数 s_6, s_8 と関連づけることから，SGS 渦粘性係数 ν_{SGS} も分子動粘性係数 ν と合わせて以下のように格子ボルツマン方程式に反映させる．

$$s_6 = s_8 = \frac{2}{6(\nu + \nu_{SGS}) / (c^2 \delta t) + 1}. \quad (24)$$

また，格子ボルツマン法では運動量式を渦粘性モデルを用いて有限差分法で解く場合と違い，SGS 乱流エネルギー k_{SGS} と圧力とをまとめて乱流圧力にして取り扱うことが原理的に出来ない．そこで， k_{SGS} は Inagaki ら⁽²⁰⁾ にならい，

$$k_{SGS} = C_{kes} \sum_{i=1}^3 \left(\langle u_i \rangle - \langle \langle u_i \rangle \rangle \right)^2, \quad (25)$$

と求める．モデル定数は文献⁽²⁰⁾に従い $C_{kes} = 1$ とする．また二重フィルター速度 $\langle \langle u \rangle \rangle$ は格子幅の二倍の幅での格子平均により求めるものとし，

$$\langle \langle u_i \rangle \rangle = \frac{1}{2} \langle u_i \rangle + \frac{\langle u_i^E \rangle + \langle u_i^W \rangle + \langle u_i^N \rangle + \langle u_i^S \rangle + \langle u_i^T \rangle + \langle u_i^B \rangle}{12}, \quad (26)$$

とする．ここで $\langle u_i^E \rangle \dots \langle u_i^B \rangle$ は隣接格子点の速度を表している．ここで求められた k_{SGS} から

$$\mathbf{F} = -3w_\alpha \mathbf{e}_\alpha \left(\frac{2}{3} \nabla k_{SGS} \right), \quad (27)$$

を計算し，外力項として格子ボルツマン方程式 (15) に加えた．なお本手法による LES コードは十分な精度で乱流解析できることが先行研究⁽¹⁵⁾によって確認されている．

3.4 計算条件

本研究では図 1 に示すような，千鳥配置の正方形角柱群間の乱流場⁽¹¹⁾を対象とした．主たる計算領域は角柱のピッチ H を規準に $4H(x) \times H(y) \times 1.5H(z)$ とし，計算格子は $481(x) \times 120(y) \times 181(z)$ とした．入口，出口，左右上下面には周期境界条件を課し，入口出口面に対して圧力差を与えることで流体を駆動した．また格子解像度，計算領域については，格子解像度を上げたものや計算領域を拡大したものとの比較から十分であることを確認している

Table 1 Computational conditions.

case	Δ/H	computational domain	grid nodes	Re_h	Re_D	porosity ϕ
case051	8.3×10^{-3}	$4H(x) \times H(y) \times 1.5H(z)$	$481(x) \times 121(y) \times 180(z)$	3500	4100	0.51
case064					3360	0.64
case075					2625	0.75
case084					1960	0.84
case091					1365	0.91
case084s		$4H(x) \times H(y) \times 1.5H(z)$	$241(x) \times 61(y) \times 90(z)$	3500	1960	0.84
case084l		$4H(x) \times 3H(y) \times 1.5H(z)$	$241(x) \times 181(y) \times 90(z)$			
case075c	8.3×10^{-3}	$2H(x) \times H(y) \times H(z)$	$241(x) \times 121(y) \times 120(z)$	3500	2625	0.75
case075f	5.6×10^{-3}		$361(x) \times 181(y) \times 180(z)$			

(以下, 第 4.1 節参照). レイノルズ数の定義には角柱群流れでは, 代表長さとして角柱の一辺の長さ D を用いる場合や角柱間ピッチを用いることがある. 本研究では流体相平均速度 $U_b = \langle \bar{u} \rangle^f$, 角柱間の空隙 $h = H - D$ で定義されるレイノルズ数 $Re_h = U_b h / \nu = 3500$ をもとに議論を行った. また D を変化させることで空隙率 $\phi = 1 - (D/H)^2$ を変化させて, 表 1 に示す各ケースについて計算を行った. 表 1 中, case051 ~ case091 は ϕ を 0.51 から 0.91 に変化させたもの, case075s, case075l, case075c, case075f はそれぞれ計算領域, 格子解像度を変化させて計算を行ったものである. なお, 全相平均速度 (ダルシー速度: $U_D = \langle \bar{u} \rangle$) と D によって定義されるレイノルズ数 $Re_D = U_D D / \nu$ も合わせて表 1 に示す.

以下の議論に用いるマクロスケール応力 R_{ij}^M は図 1 に示す REV において体積平均を行い, その定義 ($R_{ij}^M = \langle u_i' \rangle^f \langle u_j' \rangle^f$) に基づき統計処理を行い計算した. また, ミクロスケール応力 R_{ij}^m はレイノルズ応力の体積平均で得られる総応力 R_{ij}^A からマクロスケール応力 R_{ij}^M の差をとることで計算を行った. なお乱流の統計には SGS の成分の寄与が 1.5 % 程度であることを別途確認できたのでグリッドスケールの乱れのみを考慮した.

4. 結果と考察

4.1 格子解像度と計算領域の検証

まず, 格子解像度が十分であることを確認するために, 格子解像度を 1.5 倍 ($\Delta/H = 5.6 \times 10^{-3}$) にした計算 (case075f) を行い, 乱れ量の空間平均値において case075c で得られた $\sqrt{R_{11}^m}, \sqrt{R_{22}^m}, \sqrt{R_{33}^m}$ との差が最大でも 2 % 程度であることから格子解像度 ($\Delta/H = 8.3 \times 10^{-3}$) で十分な精度の計算が行われているとした.

また, 計算領域サイズの検証を行うために, 図 2 に case084s における点 $P(x, y, z) = (0.5H, 0.5H, 0.125H)$, 点 $Q(x, y, z) = (1.5H, 0.5H, 0.125H)$ との二点相関

$$COR_{ij} = \frac{\overline{u_{pi}' u_{j}'}}{\sqrt{\overline{u_{pi}^2}} \sqrt{\overline{u_j'^2}}}, \quad (28)$$

を示す. COR_{11} , COR_{22} は点 P との二点相関であり, COR_{33} は角柱後流の点 Q との二点相関を示す. 図 2(a)(b) より流れ方向 COR_{11} は x 方向に, スパン方向 COR_{33} は z 方向それぞれに関してほぼ十分に相関が 0 に収束していることが分かるが, 図 2(c)-(e) に示すように COR_{22} は強い相関があり 0 に収束していない. これは角柱後流に放出されるカルマン渦が共振し領域全体にわたる揺動が存在していることに起因している. 横軸にストローハル数 St , 縦軸に角柱の揚力係数 C_L のパワースペクトルを示した図 3 において, 低周波域ですどいピークが現れていることから存在を確かめることができる. これは計算領域の大きさに関わらず顕出された現象である. したがって, y 方向に関しては相関の収束が見られなかったので, y 方向に関して計算領域を 3 倍にした case084l で計算を行い, 計算領域による影響を検証した. その結果, 乱れ量の空間平均値の $\sqrt{R_{11}^m}, \sqrt{R_{22}^m}, \sqrt{R_{33}^m}$ において最大でも 0.7 % 程度の差であったことから, $4H(x) \times H(y) \times 1.5H(z)$ で十分であるとした.

Fig. 2 Two point correlations: (a) COR_{11} along Line A, (b) COR_{33} along Line D, (c) COR_{22} along Line A, (d) COR_{22} along Line B, (e) COR_{22} along line C.

4.2 格子サイズに対する相対速度の検証

本計算では、圧力差、粘性係数を変更することでレイノルズ数の調整を行った。そこでその影響を調べるために case075 において、圧力差を 2 倍、0.5 倍に変更し動粘性係数を調整することでレイノルズ数を一定に保った別の二つの計算を行い、体積平均乱流エネルギーを比較した。その結果、いずれの場合でも、乱流エネルギーの標準としたものとの差は 1 % 以下であり、レイノルズ数の設定方法の影響は無視できるほど小さいことを確認した。

4.3 乱流エネルギー分布

本研究の流れ場がどの程度の乱流かを知るために、図 4 に case075 において、点 $(x, y, z) = (0.25H, 0.5H, 0.75H)$ における x 方向変動速度のパワースペクトル E の波数 κ に対する分布を示す。SGS モデルによって $\kappa H = 120$ 以上の波数の領域はモデル化されている。また本計算のレイノルズ数ではコロモゴロフの $-5/3$ 乗則の成り立つ慣性小領域は存在してもかなり限定されていることが分かる。

図 5 に case051, case091 の $x-y$ 平面における乱流エネルギー $k = \overline{u'_k u'_k}$ の等値図を示す。図 5(a) に示す case051 では、図 5(b) の case091 に比べて角柱の側面付近の剥離が起きる領域において局所的に強い乱流エネルギーが生成されていることが分かる。また、角柱間の前方にも乱流エネルギーのピークが現れていることがわかる。いっぽう case091 では角柱の側面から後流にかけて乱流エネルギーの高い領域があり、局所的な値は case051 に比べて小さいが、より領域全体にわたって乱流エネルギーが分布していることが分かる（後の議論では第 3.4 節で述べるように、図 1 に示した REV で体積平均を施した値をもとに議論を行う。）

4.4 体積平均レイノルズ応力方程式の収支分析

図 6 に空隙率を変化させた時の R_{ij}^M と R_{ij}^m の分布を示す。ここで得られたマクロスケール応力 R_{ij}^M は REV のスケールより大きな乱れによる応力を表しており、ミクロスケール応力 R_{ij}^m は REV 内の乱れによる応力を表している。多孔体内部乱流では多孔体の構造スケールより大きなマクロスケール応力に比べて、多孔体の構造スケールより小さなミクロスケールの乱れによる応力 R_{ij}^m が支配的であるためか、 R_{11}^M と R_{33}^M に関しては値がほぼ 0 となったので図 6 には示していない。空隙率 $\phi \leq 0.75$ の範囲においては、マクロな乱れは非常に小さく、ミクロな乱れに関しても空隙率の上昇に伴い小さくなっていることが分かる。また $R_{11}^m \simeq R_{33}^m > R_{22}^m$ となっており、 R_{22}^m 成分が他の成分に比べて小さくなっている。いっぽう空隙率 $\phi > 0.75$ では、空隙率の増加に伴い R_{33}^m は単調な減少傾向が見られるが、 R_{22}^m 成分においては、いったん増加した後に減少する傾向がみられ、 $R_{22}^m > R_{11}^m > R_{33}^m$ とその大小関係が $\phi \leq 0.75$ の時とは異なることが分かる。なお、 $\phi > 0.75$ においては第 4.1 節で述べたように、角柱後流のカルマン渦放出の共振により全体が大きな振動モードをもって揺動する現象が現れ、それにより多孔体の構造ス

Fig. 3 Power spectrum of the lift coefficient against St in case084.

Fig. 4 Power spectrum of streamwise velocity fluctuations.

Fig. 5 Turbulence energy contour maps: (a) case051, (b) case091.

Fig. 6 Reynolds stress distributions at $Re_h = 3500$.

Fig. 7 Production terms.

ケールより大きな乱れの応力 R_{22}^M が生じるなど、空隙率の変化により乱流場の特性が異なることが分かる。

つぎに、このような応力分布になる理由を調べるために、図 7 に生成項の分布を示す。一様多孔体内部の乱流では速度分散のこう配により $P_{ij,1}^d, P_{ij,2}^d, P_{ij,3}^d$ が生成されるが、 $P_{ij,2}^d, P_{ij,3}^d$ はどのケースにおいても $P_{ij,1}^d$ に比べて無視できるほど小さかったので $P_{ij,1}^d$ のみを図 7 に示した。また、 z 方向に関して速度分散のこう配はないので $P_{33,1}^d = 0$

Fig.8 Redistribution terms.

Fig.9 Dissipation terms.

となる．生成項 $P_{ij,1}^d$ は空隙率の上昇に伴い減少傾向が見られるが，空隙率 $\phi > 0.75$ では $P_{11,1}^d$ に比べて $P_{22,1}^d$ の減少割合が鈍化している．式 (9) に示されるように， $P_{ij,1}^d$ はミクロスケール応力 R_{ij}^m の輸送方程式に現れミクロスケール応力の生成を担うが，前述のように R_{ij}^m の輸送方程式中の生成項 P_{ij}^t は全体的に無視できるほど小さい．このことは，空隙率 $\phi > 0.75$ ではマクロ応力は生成項 P_{ij}^t により生成されているのではなく，式 (14) に示した項によってミクロスケール応力から分配されていることを意味している．この二つの項に関して，case084 において求めると $F_{ij}^D / (U_b^4/\nu) = 4.0 \times 10^{-8}$, $C_{ij}^t / (U_b^4/\nu) = -7.6 \times 10^{-10}$ となっており， F_{ij}^D によってミクロスケール応力からマクロスケール応力へとエネルギー分配が行われていると言える．

それぞれの応力間で，生成されたエネルギーがどのように再分配されているのか調べるために，図 8 に再分配項を示す．マクロスケール応力の再分配項 ϕ_{ij}^M は統計を取ると $\phi_{ij}^M \simeq 0$ となっていたが，マクロスケール応力の再分配が行われていないことは，図 6 に示したように， R_{22}^M のみが値をもっている ($R_{11}^M \simeq 0, R_{33}^M \simeq 0$) ことから確認することができる．図 8 に示すように，ミクロスケール応力 R_{33}^m の再分配項 ϕ_{33}^m は空隙率の増加にかかわらず減少傾向が見られ， R_{11}^m の再分配項 ϕ_{11}^m に関しては空隙率の増加に関わらずほぼ一定の値を示している．しかし， R_{22}^m の再分配項 ϕ_{22}^m は空隙率 $\phi \leq 0.75$ では増加傾向が見られるものの，空隙率 $\phi > 0.75$ においてはほぼ 0 になる．図 7 に見られるように $\phi > 0.75$ における ϕ の増加に対しての $P_{22,1}^d$ の減少傾向が鈍化しているにも関わらず，再分配が行われていないことは，これらの収支から相対的な R_{22}^m の増加を意味している．これが図 6 のレイノルズ応力分布において， R_{22}^m が特異な分布を示す原因であると考えられる．

散逸率については，体積平均レイノルズ応力方程式 (8)(9) の残差から推量し図 9 に示す．マクロスケール散逸率 ε_{ij}^M はミクロスケール散逸率 ε_{ij}^m に比べて小さいため， ε_{ij}^m のみを示した．ミクロスケール散逸率は式 (9) の，輸送方程式内の各項の大小によって決定される．そこで，式 (9) の各項の計算精度を調べるために，左辺の対流項の計算誤差を求めた．その結果，0 となるべき対流項の誤差は，空隙率 0.75 のミクロスケール散逸率の差 $\varepsilon_{22}^m - \varepsilon_{11}^m$ に比べて 10 % 程度であることを確認できたので，本解析の散逸率の挙動は充分信頼できるといえる．ミクロスケール散逸率に関しても $\phi = 0.75$ を境に ε_{11}^m と ε_{22}^m の大小関係が入れ替わっており，空隙率の増加に伴い $\varepsilon_{33}^m > \varepsilon_{22}^m > \varepsilon_{11}^m$ という関係を持ったまま減少していることが分かる．これは，ミクロスケール散逸率の計算精度から考えても十分有意な差であるといえる．

4.5 統計平均乱流モデリングへの応用

乱流モデルの構築を考える場合，長さスケールがどのように変化するかを調べることは重要であるので，図 10 にミクロスケール乱流長さスケール ($l_m = k_m^{1.5} / \varepsilon_m$) を示した．二重平均系の乱流モデリングにおいて，渦粘性モデルを用いる場合に乱流長さスケールは渦粘性を決定づける物理量の一つとなるが，図 10 からミクロスケール乱流長さスケールは空隙率の上昇に伴い大きくなり， $l_m/H \simeq 0.5h/H$ の分布によく一致し，角柱間の空隙 $h/H = 1 - D/H$ と相関が強いことが分かる．このことから，ミクロスケール乱流の長さスケールは多孔体の空隙と関連付けて考えることができる．

つぎに図 11 に生成項 $P_{ij,1}^d$ のトレース $P_{kk,1}^d/2$ を示す．一様多孔体内部の乱流において分散相関量 (dispersive

Fig.10 Micro-scale turbulent length scale.

Fig.11 Profiles of production terms.

covariance) のトレース T_{kk}^D の輸送方程式の局所平衡を仮定すると,

$$2 \underbrace{\left\langle \tilde{u}_i' \tilde{u}_k' \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} \right\rangle^f}_{-P_{kk,1}^d} + 2 \underbrace{\left\langle \langle u_k' \rangle^f \tilde{u}_i' \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} \right\rangle^f}_{-P_{kk,2}^d} - 2 \underbrace{\left\langle \tilde{u}_i' \tilde{u}_k' \frac{\partial \langle u_i' \rangle^f}{\partial x_k} \right\rangle^f}_{-P_{kk}^d} + 2 \bar{f}_k \langle \hat{u}_k \rangle^f - 2 \nu \left\langle \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} \right\rangle^f = 0, \quad (29)$$

となることからわかるように, 生成項 $P_{ij,1}^d$ のトレース $P_{kk,1}^d$ は T_{kk}^D の輸送方程式に逆符号をもって現れており, T_{kk}^D から R_{kk}^m へとエネルギー輸送が行われ, R_{kk}^m の生成に寄与していることが分かる. また抗力項からなる項 $\bar{f}_k \langle \hat{u}_k \rangle^f$ に関しては, 常に $\bar{f}_k \langle \hat{u}_k \rangle^f \geq 0$ となり生成項として働いている. また図 11 から分かるように, $\bar{f}_k \langle \hat{u}_k \rangle^f$ は $P_{kk,1}^d/2$ と同様な分布傾向を示している. これは二重平均系の乱流モデリングにおいて, R_{kk}^m のモデル化すべき主な生成項の一つが巨視的変数のみを用いて $P_{kk,1}^d/2 \simeq \bar{f}_k \langle \hat{u}_k \rangle^f$ とモデル化できることを示している.

5. 結 言

本研究では多緩和時間格子ボルツマン法を用いて, 千鳥配置正方形角柱群で構造を模擬した多孔体流れに対して, 空隙率を変化させて乱流の LES を行った. その統計データをもとに体積平均レイノルズ応力方程式における各項の収支分析を行い, 乱流輸送のメカニズムについて検討した. また二重平均系における乱流モデリングにおいて, 生成項や乱流長さスケールなどのモデリングに必要な物理量に関して検討を行った. 以下に結論をまとめると,

(1) 正方形角柱群のような一様な構造の多孔体内部乱流では多孔体の構造スケール程度のミクロスケール応力が支配的である. しかし, 空隙率 $\phi > 0.75$ の場合では角柱後流のカルマン渦放出に伴う共振により全体が大きな振動モードを持って流れ方向に対して垂直方向に揺動する現象が現れる. それにより多孔体の構造スケールより大きな乱れの応力が生じていることが分かった. この大きな揺動によって生成されたマクロスケール応力では他の応力成分に再分配が行われず, 流れに垂直方向の成分しか持たないことが分かった.

(2) 空隙率 $\phi = 0.75$ を境に多孔体内における乱流場は大きく変化しており, $\phi \leq 0.75$ では, ミクロスケール応力の主な生成項である $P_{11,1}^d, P_{22,1}^d$ により生成したエネルギーは再分配項を通して R_{33}^m に輸送される. その結果, 各応力の大小関係は $R_{11}^m \simeq R_{33}^m > R_{22}^m$ となることが分かった. いっぽう, $\phi > 0.75$ では R_{22}^m の生成項が他の成分に比べて相対的に大きくなっているにも関わらず, 再分配項が $\phi_{22}^m \simeq 0$ となり, 他成分への再分配は行われていない. その結果, 各応力の大小関係は $R_{22}^m > R_{11}^m > R_{33}^m$ となり, R_{22}^m が他の応力に比べて大きくなることが分かった.

(3) 二重平均系における乱流モデリングにおいて, 乱れを決定づける物理量の一つである乱流長さスケールは, 多孔体の空隙距離と強い相関がみられることが分かった. またミクロスケール応力の主な生成項の一つである $P_{ij,1}^d$ は, 体積平均の速度分散からなっており, モデル化が必要な項であるが, 分散相関量の局所平衡を仮定することで巨視的変数のみで表される抗力項によってモデル化できる.

謝 辞

本研究の一部は、日本学術振興会・科学研究費補助金、基盤研究 (B)(No.24360073) の援助を受けていることを記し、謝意を表する。

文 献

- (1) Krishnan, S., Murthy, J. Y., Garimella, S. V. “Direct simulation of transport in open-cell metal foam”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 128 (20006), pp. 793-799.
- (2) Suga, K., Tanaka, T., Nishio, Y., Murata, M., “A boundary reconstruction scheme for lattice Boltzmann flow simulation in porous media”, *Progress in Computational Fluid Dynamics*, Vol. 9 (2009), pp. 201-207.
- (3) Suga, K., Nishio, Y., “Three dimensional microscopic flow simulation across the interface of a porous wall and clear fluid by the lattice Boltzmann method”, *The Open Transport Phenomena Journal*, Vol. 1 (2009), pp. 35-44.
- (4) Whitaker, S., “Flow in porous media: A theoretical derivation of Darcy’s law”, *Transport in Porous Media*, Vol. 1, No. 1 (1986), pp. 3-25.
- (5) Whitaker, S., “The Forchheimer equation: A theoretical development”, *Transport in Porous Media*, Vol. 25, No. 1 (1996), pp. 27-61.
- (6) Pinson, F., Grégoire, O., Simonin, O., “ $k - \varepsilon$ Macro-scale modeling of turbulence based on a two scale analysis in porous media”, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 27 (2006), pp. 955-966.
- (7) Kuwata, Y., Suga, K., “Modelling turbulence around and inside porous media based on the second moment closure”, *International Journal of Heat and Fluid Flow* (2013), Doi 10.1016/j.ijheatfluidflow.2013.03.001.
- (8) Nakayama, A., Kuwahara, F., “A general macroscopic turbulence model for flows in packed beds, channels, pipes, and rod bundles”, *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 130 (2008), 101205-1-6.
- (9) Pedras, M.H.J., de Lemos, M.J.S., “Macroscopic turbulence modeling for incompressible flow through undeformable porous media”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 44 (2001), pp. 1081-1093.
- (10) Antohe, B.V., Lage, J. L., “A general two-equation macroscopic turbulence model for incompressible flow in porous media”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 40 (1997), pp. 3013-3024.
- (11) Kuwahara, F., Yamane, T., Nakayama, A., “Large eddy simulation of turbulent flow in porous media”, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 33 (2006), pp. 411-418.
- (12) Raupach, M. R., Shaw, R. H., “Averaging procedures for flow within vegetation canopies”, *Boundary-Layer Meteorology*, Vol. 22 (1982), pp. 79-90.
- (13) Yu, H., Luo, L.-S., Girimaji, S. S., “LES of turbulent square jet flow using an MRT lattice Boltzmann model”, *Computers & Fluids*, Vol. 35 (2006), pp. 957-965.
- (14) Dong, Y.-H., Sagaut, P., “A study of time correlations in lattice Boltzmann-based large-eddy simulation of isotropic turbulence”, *Physics of Fluids*, Vol. 20 (2008), pp. 035105-1-035105-11.
- (15) Takashima, K., Kaneda, M., Suga, K., “Large eddy simulation of complex internal turbulent flows by the MRT-LBM”, *Proceedings of International Computational Mechanics Symposium 2012, JSME-CMD, Kobe, Japan (2012)*, USB, MS6-3-3(88) pp.1-2.
- (16) Chen, S., Doolen, G.D., “Lattice Boltzmann Method for Fluid Flows”, *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 30 (1998), pp. 329-364.
- (17) D’Humières, D., Ginzburg, I., Krafczyk, M., Lallemand, P., Luo, L.-S., “Multiple-relaxation time lattice Boltzmann models in three dimensions”, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A*, Vol. 360 (2002), pp. 437-451.
- (18) Dubois, F., Lallemand, P., “Quartic parameters for acoustic applications of lattice Boltzmann scheme”, *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 61, No. 12 (2011), pp. 3404-3416.

- (19) Nicoud, F., Ducros, F., “Subgrid-scale stress modelling based on the square of the velocity gradient tensor”, *Flow, Turbulence and Combustion*, Vol. 62, No. 3 (1999), pp. 183-200.
 - (20) Inagaki, M., Nagaoka, M., Horinouchi, N., Suga, K., “Large eddy simulation analysis of engine steady intake flows using a mixed-time-scale subgrid-scale model”, *International Journal of Engine Research*, Vol.11, No. 3 (2010), pp. 229-241.
-