強制熱対流場における多目的形状最適化*

片峯 英次^{*1}, 桐山 恭幸^{*2}, 畔上 秀幸^{*3}

Multi-Objective Shape Optimization in Forced Heat-Convection Fields

Eiji KATAMINE^{*1}, Yasuyuki KIRIYAMA and Hideyuki AZEGAMI^{*1} Department of Mechanical Engineering, Gifu National College of Technology
2236-2, Kamimakuwa, Motosu, Gifu 501-0495, Japan

This paper presents a numerical solution to multi-objective shape optimization problems of steady heat-convection fields. In previous study, it has been dealt with a shape optimization problem for total dissipated energy minimization in the domain of a viscous flow field and a shape determination problem of temperature distribution prescribed problem in sub-domains of heat-convection fields. In this study, a multi-objective shape optimization problem using normalized objective functional is formulated for the total dissipated energy minimization problem and the temperature distribution prescribed problem in steady heat-convection fields. In addition, another multi-objective shape optimization problem is formulated for the temperature distribution prescribed problem, while the total dissipated energy is constrained to less than a desired value, in the steady forced heat-convection fields. Shape gradients of these multi-objective shape optimization problems are derived theoretically using the Lagrange multiplier method, adjoint variable method, and the formulae of the material derivative. Reshaping is carried out by the traction method proposed as an approach to solving shape optimization problems. The validity of proposed method is confirmed by results of 2D numerical analysis.

Key Words : Shape Optimization, Optimum Design, Inverse Problem, Computer Aided Design, Heat Transfer Design, Adjoint Method, Traction Method

1. は じ め に

伝熱特性の改善を目的とした熱対流場の領域形状最適化問題は、工学的に重要な問題である。例えば、熱交換器の形状設計のように、熱対流場の部分境界において放熱量を最大化させる形状最適化問題はその代表例である。一方、熱対流場領域の指定した部分境界あるいは部分領域において、温度あるいは流速などの状態関数分布が目標の分布になるように境界形状を決定する問題は、逆問題と呼ばれている。この逆問題は、実際の温度分布などの状態関数分布と目標関数分布の二乗誤差積分を最小化させる形状設計問題として捉えれば、一つの形状最適化問題として取り扱うことができる。

著者らはこのような問題を数値モデルとして捉え、これまでに粘性流れ場^{(1)–(3)}あるいは熱対流場⁽⁴⁾の形状最適化問題の解法を提案し、その妥当性を確認してきた。そのときに用いた最適化手法は、力法⁽⁵⁾であった。しかしながら、これまでに取り扱った問題は、粘性流れ場における散逸エネルギー最小化、熱対流場の部分領域における温度分布二乗誤差最小化、あるいは熱対流場の部分境界における放熱量最大化などの単一目的問題に限られてきた。実際の設計問題においては、単一目的問題である場合は稀であり、複数の目的が混在する多目的問題である場合の方がむしろ多い。そこで本研究では、多目的最適化問題の解法について取り上げる。

熱対流場における多目的形状最適化に関する研究は、Hilbert⁽⁶⁾, Copiello⁽⁷⁾, Kashani⁽⁸⁾, Husain⁽⁹⁾, Morimoto⁽¹⁰⁾

* 原稿受付 2013 年 6 月 5 日

^{*1} 正員, 岐阜工業高等専門学校機械工学科 (〒501-0495 岐阜県本巣市上真桑 2236-2)^{*2} 元岐阜工業高等専門学校機械工学科^{*3} 正員, フェロー, 名古屋大学大学院情報科学研究科

(〒464-8601 愛知県名古屋市中種区不老町 1)

E-mail: katamine@gifu-nct.ac.jp

によって行われている。Hilbert⁽⁶⁾, Copiello⁽⁷⁾, Kashani⁽⁸⁾は、熱交換器の最適形状問題を解いている。これらの方法では、設計変数を極力少なく制限して、遺伝的アルゴリズムを代表とする進化的方法に基づいて最適化を試みている。また Husain⁽⁹⁾は、応答曲面法を用いてヒートシンクの最適形状を解析している。しかしながら、勾配法などを代表とする最適化理論に基づいた熱対流場の多目的形状最適化の解法はほとんど提案されていない⁽¹⁰⁾。一方、弾性場^{(11)–(13)}や流れ場⁽¹⁴⁾などの単一場における多目的形状最適化に関する研究では、これまでに勾配法に基づくいくつかの研究が行われている。このことは、熱と流れを連成させた熱対流場問題では、多くの状態変数と設計変数を有するために、勾配法に基づく多目的形状最適化は問題が複雑化して解法が困難となり、それゆえに、これまでの多くの研究が遺伝的アルゴリズムなどの進化的方法によるものであったと推察できる。なお、Morimoto⁽¹⁰⁾は、勾配法に基づいた伝熱機器の多目的形状設計への適用はほぼ皆無であることを指摘し、随伴変数法と勾配法を利用して熱流動場における伝熱・圧力損失特性の多目的形状最適化を試みているが、形状更新の際に、境界形状の数値不安定を回避するために、平滑化の形状変形の修正操作を行っている。

本研究では、勾配法に基づいて熱対流場の多目的形状最適化解析を行う数値解析を取り上げる。

形状最適化に関して、勾配法による感度を用いた手法に焦点を絞って研究を振り返ると、有限要素モデルの境界上の節点座標を設計変数に選んで、設計変数の変動に対する形状勾配関数（感度）を評価して、感度を用いて節点を移動していくと、境界形状が波打つ不安定現象が生じることが知られている⁽¹⁵⁾。

一方、境界の法線方向への移動量を分布系の設計変数に選ぶ方法^{(16)–(19)}や、領域変動を設計変数に選んで^{(20)–(22)}、境界あるいは領域変動に対する分布系の感度を評価する理論的な研究が活発に行われた。詳細は文献⁽⁵⁾に譲る。また、領域の境界上で定義された法線方向への移動量を分布系関数の設計変数に選んで数値解析を行う方法も提案された⁽¹⁸⁾⁽²³⁾⁽²⁴⁾。この方法では、数値解析に有限要素法を用いる場合、境界の更新を済ませた後、領域内部 mesh をそれに合わせて更新する方法を考える必要があった。Jameson⁽²³⁾は流れ場の形状更新のための感度評価において、実際の感度を便宜的に二階微分可能な滑らかな感度に置き換え、境界で定義された楕円型方程式を利用して境界形状を更新する数値解析法を提案している。Mohammadi⁽²⁴⁾も同様な方法を提案している。

これに対して、著者らが提案してきた力法⁽⁵⁾は、領域変動に対する分布系の感度を評価し、領域変動の支配方程式を楕円型方程式の一つである線形弾性場の境界値問題に置き換えて解く方法として提案された。この方法では、変動した後の境界は滑らかさを保持できることが理論的に考察できて⁽²⁵⁾⁽²⁶⁾、また波打ち現象が生じないことが数値解析によって確認されている⁽²⁵⁾。この解法の特徴として、(a) 形状更新における領域変動は、感度を疑似弾性問題の外力として作用させたときの変位場として求めることができる。その意味でこの解法を力法と呼んだ⁽⁵⁾。そのため、形状更新の解析において、汎用 FEM コードの利用が可能な方法の一つである。(b) 有限要素法を用いた場合、滑らかさを保持しながら、領域内部の全節点の設計変数としての形状変動が可能のため、通常形状更新解析では remesh が不要である。(c) 複雑な連成場に対しても、随伴変数法を利用しているため、大規模設計変数の感度計算が効率的である。

そこで本研究では、上記の特徴を有する力法を強制熱対流場の多目的形状最適化に適用し、部分領域における温度分布二乗誤差最小化と全領域における散逸エネルギー最小化を目指した多目的問題に対して、重み付き係数法⁽²⁷⁾と ϵ 制約法⁽²⁷⁾に基づく二つの解法を提案する。

本論文では、まず定常強制熱対流場の支配方程式を示す。その後で、温度二乗誤差と散逸エネルギーの重み付き線形和を目的汎関数に設定した多目的形状最適化問題を取り上げて定式化を行い、形状勾配関数を理論的に導出する。また、もう一つの多目的形状最適化問題として、散逸エネルギーの大きさを制約条件に設定して温度分布二乗誤差を最小化する問題、すなわち、 ϵ 制約法に基づく問題を取り上げて形状勾配関数を理論的に導出する。これらの二つの多目的形状最適化問題に対して、導出した形状勾配関数に基づいて力法を適用して数値解析した二次元問題の解析例を簡単に紹介する。

2. 定常強制熱対流場の支配方程式

形状最適化問題を定式化するための準備として、強制熱対流場問題において使用される表記法およびその支配方程式について簡単にまとめておく。強制熱対流場の温度分布は流れの影響を受けるため、はじめに粘性流れ場の支配方程式から流速分布や圧力分布を解析し、その流速分布を用いた熱伝達場の方程式から熱対流場の温度分

布が解析できる.

2.1 流れ場の支配方程式

境界 $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ で囲まれた熱対流場 Ω において, 流速 $u = \{u_i\}_{i=1}^n \in U$ と圧力 $p \in Q$ を解析することを考える. 無次元化された Navier-Stokes 方程式と連続の式の弱形式は, 随伴流速 $w = \{w_i\}_{i=1}^n \in W$ と随伴圧力 $q \in Q$ を用いて次のように表すことができる.

$$a^V(u, w) + b(u, u, w) + c(w, p) = l(w) \quad \forall w \in W \quad (1)$$

$$c(u, q) = 0 \quad \forall q \in Q \quad (2)$$

ただし, $a^V(u, w)$, $b(v, u, w)$, $c(w, p)$, $l(w)$ は次のように定義されている.

$$\begin{aligned} a^V(u, w) &= \frac{2}{Re} \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(w) dx = \frac{1}{Re} \int_{\Omega} w_{i,j} (u_{i,j} + u_{j,i}) dx, \\ b(v, u, w) &= \int_{\Omega} w_i v_j u_{i,j} dx, \quad c(w, p) = - \int_{\Omega} w_{i,i} p dx, \quad l(w) = \int_{\Gamma_1} w_i \hat{\sigma}_i d\Gamma \end{aligned} \quad (3)$$

ここで $\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ であり, Re は Reynolds 数を表す. また流速 $\hat{u} \in (H^{1/2}(\Gamma_0))^n$, 表面力 $\hat{\sigma} = \{\hat{\sigma}_i\}_{i=1}^n \in (H^{-1/2}(\Gamma_1))^n$ を既知関数とした境界条件は, 次のように与えられている.

$$u_i = \hat{u}_i \quad \text{on } \Gamma_0 \quad (4)$$

$$\{-p\delta_{ij} + \frac{1}{Re}(u_{i,j} + u_{j,i})\}v_j = \hat{\sigma}_i \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (5)$$

ここで, v_j は境界における単位法線ベクトルを表す. 流速 $u \in U$, 圧力 $p \in Q$, 随伴流速 $w \in W$ は次の関数空間の要素である.

$$U = \{u \in (H^1(\Omega))^n \mid u = \hat{u} \text{ on } \Gamma_0\} \quad (6)$$

$$Q = \{q \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} q dx = 0 \text{ (if } \text{meas}(\Gamma_1) = 0) \} \quad (7)$$

$$W = \{w \in (H^1(\Omega))^n \mid w = 0 \text{ on } \Gamma_0\} \quad (8)$$

なお, 本論文のテンソル表示では Einstein 総和規約と偏微分表示 $(\cdot)_{,i} = \partial(\cdot)/\partial x_i$ を使用する. $H^m(\Omega)^n$ は m 階の導関数まで二乗可積分な n 次元ベクトル関数空間, $L^2(\Omega)$ は有界可積分なスカラー関数空間を表す.

2.2 熱伝達場の支配方程式

温度分布 $\theta \in \Theta$ を解析する無次元化された熱伝達場の支配方程式の弱形式は, 随伴温度 $\xi \in \Xi$ を用いて次のように表すことができる.

$$a^H(\theta, \xi) + d(u, \theta, \xi) + h^H(\theta, \xi) = f_q(\xi) + f_h(\xi) \quad \forall \xi \in \Xi \quad (9)$$

ただし, $a^H(\theta, \xi)$, $d(u, \theta, \xi)$, $h^H(\theta, \xi)$, $f_q(\xi)$ および $f_h(\xi)$ は次のように定義されている.

$$\begin{aligned} a^H(\theta, \xi) &= \frac{1}{Pe} \int_{\Omega} \theta_{,k} \xi_{,k} dx, \quad d(u, \theta, \xi) = \int_{\Omega} \xi u_j \theta_{,j} dx, \\ h^H(\theta, \xi) &= \int_{\Gamma_h} \theta \xi \hat{h} d\Gamma, \quad f_q(\xi) = \int_{\Gamma_q} \xi \hat{q} d\Gamma, \quad f_h(\xi) = \int_{\Gamma_h} \xi \hat{h} \hat{\theta}_f d\Gamma \end{aligned} \quad (10)$$

ここで, Pe は Peclet 数を表す. また温度 $\hat{\theta} \in H^{1/2}(\Gamma_\phi)$, 熱流束 $\hat{q} \in H^{-1/2}(\Gamma_q)$, 熱伝達率 $\hat{h} \in L^\infty(\Gamma_h)$, 外気温度 $\hat{\theta}_f \in L^\infty(\Gamma_h)$ を既知関数とした境界条件は, 次のように与えられている.

$$\theta = \hat{\theta} \quad \text{on } \Gamma_\phi \quad (11)$$

$$\frac{1}{Pe} \theta_{,k} v_k = \hat{q} \quad \text{on } \Gamma_q \quad (12)$$

$$\frac{1}{Pe} \theta_{,k} v_k = -\hat{h}(\theta - \hat{\theta}_f) \quad \text{on } \Gamma_h \quad (13)$$

ここで, $L^\infty(\Gamma)$ は有界なスカラー関数空間を表し, 温度 $\theta \in \Theta$, 随伴温度 $\xi \in \Xi$ は次の関数空間の要素である.

$$\Theta = \{\theta \in H^1(\Omega) \mid \theta = \hat{\theta} \text{ on } \Gamma_\phi\} \quad (14)$$

$$\Xi = \{\xi \in H^1(\Omega) \mid \xi = 0 \text{ on } \Gamma_\phi\} \quad (15)$$

3. 温度分布二乗誤差最小化・散逸エネルギー最小化の多目的最適化

3.1 問題の定式化

前述で定義された熱対流場 Ω に対して, 部分領域 $\Omega_D \subset \Omega$ における実際の温度分布 $\theta \in \Theta$ と規定したい温度分布 $\theta_D \in H^1(\Omega_D)$ との二乗誤差積分を最小化⁽⁴⁾し, 全領域 Ω における散逸エネルギーを最小化⁽¹⁾⁻⁽³⁾する多目的形状最適化を考える.

この熱対流場領域 Ω の領域変動を T_s (s は領域変動の履歴) で定義し, 領域 Ω は変動して $\Omega_s = T_s(\Omega)$ になると仮定する. このとき, 重み付き係数法⁽²⁷⁾に基づき, 領域の大きさ制約を課した多目的形状最適化問題は次のように定式化できる.

$$\text{Given } \Omega \quad (16)$$

$$\text{find } \Omega_s \quad (17)$$

$$\text{that minimizes } C_\theta \frac{E(\theta)}{E(\theta)_{ini}} + C_u \frac{a^V(u, u)}{a^V(u, u)_{ini}} \quad (18)$$

$$\text{subject to } a^V(u, w) + b(u, u, w) + c(w, p) = l(w) \quad \forall w \in W \quad (19)$$

$$c(u, q) = 0 \quad \forall q \in Q \quad (20)$$

$$a^H(\theta, \xi) + d(u, \theta, \xi) + h^H(\theta, \xi) = f_q(\xi) + f_h(\xi) \quad \forall \xi \in \Xi \quad (21)$$

$$\int_{\Omega} dx \leq M \quad (22)$$

ここで, 式 (19), (20), (21) はそれぞれ強制熱対流場の支配方程式の弱形式である. 式 (22) は領域の制約式であり, M は領域の大きさの上限値を表している. また, 式 (18) の全目的汎関数は二つの目的汎関数を重み付き線形和で表しており, 第 1 項目は規準化された温度二乗誤差積分, 第 2 項目は規準化された散逸エネルギー, C_θ, C_u はそれぞれ温度二乗誤差積分と散逸エネルギーの重み係数を意味する. $E(\theta)_{ini}, a^V(u, u)_{ini}$ はそれぞれ初期形状における温度二乗誤差, 散逸エネルギーを表している. ただし, 温度二乗誤差積分 $E(\theta)$ は次のように定義されている.

$$E(\theta) = E(\theta - \theta_D, \theta - \theta_D) = \int_{\Omega_D} (\theta - \theta_D)^2 dx \quad (23)$$

3.2 形状勾配関数

この問題は次の Lagrange 関数 $L(u, p, \theta, w, q, \xi, \Lambda)$ の停留化問題に置き換えることができる.

$$\begin{aligned} L = & C_\theta \frac{E(\theta)}{E(\theta)_{ini}} + C_u \frac{a^V(u, u)}{a^V(u, u)_{ini}} \\ & - a^V(u, w) - b(u, u, w) - c(w, p) + l(w) - c(u, q) \\ & - a^H(\theta, \xi) - d(u, \theta, \xi) - h^H(\theta, \xi) + f_q(\xi) + f_h(\xi) \\ & + \Lambda \left(\int_{\Omega} dx - M \right) \end{aligned} \quad (24)$$

ここで, $w \in W, q \in Q, \xi \in \Xi$ は強制熱対流場の支配方程式に関する Lagrange 乗関数になっている. また Λ は領域の大きさ制約条件式に対する Lagrange 乗数である.

領域変動に対する L の導関数 $\dot{L}$ を速度場 $V = \partial T_s(\Omega)/\partial s = \partial T_s(T_s^{-1}(\Omega_s))/\partial s$ を用いて計算すると次のように得

られる⁽⁵⁾.

$$\begin{aligned}
\dot{L} = & -\{a^V(u, w') + b(u, u, w') + c(w', p) - l(w')\} \\
& -c(u, q') \\
& -\{a^H(\theta, \xi') + d(u, \theta, \xi') + h^H(\theta, \xi') - f_q(\xi') - f_h(\xi')\} \\
& -\{a^V(u', w) + b(u', u, w) + b(u, u', w) + c(u', q) + d(u', \theta, \xi) - 2C_u \frac{a^V(u', u)}{a^V(u, u)_{ini}}\} \\
& -c(w, p') \\
& -\{a^H(\theta', \xi) + d(u, \theta', \xi) + h^H(\theta', \xi) - 2C_\theta \frac{E(\theta - \theta_D, \theta')}{E(\theta)_{ini}}\} \\
& + \dot{\Lambda} \left(\int_{\Omega} dx - M \right) \\
& + \langle Gv, V \rangle
\end{aligned} \tag{25}$$

ここで $(\cdot)'$ は空間座標に固定した分布関数の領域変動に対する導関数 (形状導関数) を表す. 簡単のために, 部分境界 Γ_1 および 温度分布を規定する部分領域 Ω_D の領域変動を拘束し, 設計境界 Γ_{design} において流速がゼロとなる熱伝達境界 Γ_h を仮定すれば, $\langle Gv, V \rangle$ は次のように与えられ,

$$\langle Gv, V \rangle = \int_{\Gamma_w} Gv_i V_i d\Gamma, \tag{26}$$

$$G = G_0 + G_1 \Lambda,$$

$$\begin{aligned}
G_0 = & \frac{C_u}{a^V(u, u)_{ini}} \cdot \frac{1}{Re} \cdot u_{i,j}(u_{i,j} + u_{j,i}) - \frac{1}{Re} w_{i,j}(u_{i,j} + u_{j,i}) - \frac{1}{Pe} \theta_{,k} \xi_{,k} - \nabla_v(\hat{h}\theta\xi) - (\hat{h}\theta\xi)\kappa \\
& + \nabla_v(\hat{h}\theta_f\xi) + (\hat{h}\theta_f\xi)\kappa,
\end{aligned}$$

$$G_1 = 1. \tag{27}$$

式 (26) の Gv , 式 (27) の G は, それぞれこの問題における形状勾配関数および形状勾配密度関数を表す. ただし, $\nabla_v(\cdot) \equiv \nabla(\cdot) \cdot v$, κ は境界における平均曲率の $n-1$ 倍である. 流速 u , 圧力 p , 温度 θ , 随伴流速 w , 随伴圧力 q , 随伴温度 ξ および Lagrange 乗数 Λ は次の Kuhn-Tucker 条件から決定できる.

$$a^V(u, w') + b(u, u, w') + c(w', p) = l(w') \quad \forall w' \in W \tag{28}$$

$$c(u, q') = 0 \quad \forall q' \in Q \tag{29}$$

$$a^H(\theta, \xi') + d(u, \theta, \xi') + h^H(\theta, \xi') = f_q(\xi') + f_h(\xi') \quad \forall \xi' \in \Xi \tag{30}$$

$$a^V(u', w) + b(u', u, w) + b(u, u', w) + c(u', q') = 2C_u \frac{a^V(u', u)}{a^V(u, u)_{ini}} - d(u', \theta, \xi) \quad \forall u' \in W \tag{31}$$

$$c(w, p') = 0 \quad \forall p' \in Q \tag{32}$$

$$a^H(\theta', \xi) + d(u, \theta', \xi) + h^H(\theta', \xi) = 2C_\theta \frac{E(\theta - \theta_D, \theta')}{E(\theta)_{ini}} \quad \forall \theta' \in \Theta \tag{33}$$

ここで, 式 (31) と (32) は随伴流速 w と随伴圧力 q に対する随伴方程式を表している. 式 (33) は随伴温度 ξ に対する随伴方程式を表している.

このようにして, この多目的形状最適化問題に対する形状勾配が導出できれば, 力法⁽⁵⁾を適用することが可能となる.

4. 散逸エネルギー制約での部分領域における温度分布二乗誤差最小化

4.1 問題の定式化

もう一つの解法として, ε 制約法⁽²⁷⁾に基づいて, 強制熱対流場 Ω における散逸エネルギーの大きさを制約し, 部分領域 $\Omega_D \subset \Omega$ において温度二乗誤差積分を最小化する多目的形状最適化問題を考える. この問題は次のよう

に定式化できる.

$$\text{Given } \Omega \quad (34)$$

$$\text{find } \Omega_s \quad (35)$$

$$\text{that minimizes } E(\theta) \quad (36)$$

$$\text{subject to } a^V(u, w) + b(u, u, w) + c(w, p) = l(w) \quad \forall w \in W \quad (37)$$

$$c(u, q) = 0 \quad \forall q \in Q \quad (38)$$

$$a^H(\theta, \xi) + d(u, \theta, \xi) + h^H(\theta, \xi) = f_q(\xi) + f_h(\xi) \quad \forall \xi \in \Xi \quad (39)$$

$$a^V(u, u) \leq a_M^V \quad (40)$$

ここで, 式 (40) は散逸エネルギーの制約式を表し, a_M^V はその上限値を表している.

4.2 形状勾配関数と随伴方程式

この問題の Lagrange 関数 $L(u, p, \theta, w, q, \xi, \Lambda)$ は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} L = & E(\theta - \theta_D, \theta - \theta_D) \\ & - a^V(u, w) - b(u, u, w) - c(w, p) + l(w) \\ & - c(u, q) \\ & - a^H(\theta, \xi) - d(u, \theta, \xi) - h^H(\theta, \xi) + f_q(\xi) + f_h(\xi) \\ & + \Lambda(a^V(u, u) - a_M^V) \end{aligned} \quad (41)$$

ただし, Λ は散逸エネルギー制約条件式に対する Lagrange 乗数である.

この形状最適化問題に対する形状修正の感度を表す形状勾配密度関数 G は, 上記の手順に従って次のように導出できる.

$$G = \Lambda \frac{1}{Re} u_{i,j}(u_{i,j} + u_{j,i}) - \frac{1}{Re} w_{i,j}(u_{i,j} + u_{j,i}) - \frac{1}{Pe} \theta_{,k} \xi_{,k} - \nabla_v(\hat{h}\theta\xi) - (\hat{h}\theta\xi)\kappa + \nabla_v(\hat{h}\hat{\theta}_f\xi) + (\hat{h}\hat{\theta}_f\xi)\kappa \quad (42)$$

ただし, 簡単のために, 前述と同様な領域変動拘束を仮定し, 設計境界 Γ_{design} において流速がゼロとなる熱伝達境界 Γ_h を考慮している.

この問題に対する随伴流速 w , 随伴圧力 q , 随伴温度 ξ および Lagrange 乗数 Λ は次の Kuhn-Tucker 条件から決定できる.

$$a^V(u', w) + b(u', u, w) + b(u, u', w) + c(u', q) = -d(u', \theta, \xi) + 2\Lambda a^V(u, u') \quad \forall u' \in W \quad (43)$$

$$c(w, p') = 0 \quad \forall p' \in Q \quad (44)$$

$$a^H(\theta', \xi) + d(u, \theta', \xi) + h^H(\theta', \xi) = 2E(\theta - \theta_D, \theta') \quad \forall \theta' \in \Theta \quad (45)$$

$$\Lambda \geq 0, \quad a^V(u, u) \leq a_M^V, \quad \Lambda(a^V(u, u) - a_M^V) = 0 \quad (46)$$

この問題に対しても形状勾配が導出できたので, 力法⁽⁵⁾を適用することが可能となる.

5. 解 法

5.1 力法

力法は領域変動量を意味する速度場 V を次の支配方程式に基づいて解く方法として提案されている⁽⁵⁾.

$$a^E(V, y) = - \langle Gv, y \rangle, \quad \forall y \in D \quad (47)$$

ただし, $a^E(V, y)$ は線形弾性体のひずみエネルギーを与える双一次形式で, 変位分布ベクトル関数 u_i, v_i に対して次式で定義されている.

$$a^E(u, v) = \int_{\Omega} A_{ijkl} u_{k,l} v_{i,j} dx \quad (48)$$

Fig. 1 Numerical model 1: Branch channel

A_{ijkl} は正定値性を有する剛性テンソルである。式 (47) は、速度場 V が負の形状勾配関数 $-Gv_i$ を外力として作用させたときの変位場として解析されることを示している。力法に基づく領域変動は、形状勾配関数を疑似弾性問題の外力として作用させたときの変位場として求められる。したがって、式 (47) の解法には通常の線形弾性問題の解法を用いて解くことが可能であり、汎用性のある方法である。

5.2 解析手順

提案した多目的形状最適化は、次のステップを繰り返すことによって解析できる。

Step 1. 初期形状を与える。

Step 2. Navier-Stokes 方程式 (28) と連続の式 (29) から非線形方程式を解いて流速分布 u と圧力分布 p を解析する。

Step 3. 得られた流速分布 u を用いて、熱伝達場の方程式 (30) から温度分布 θ を解析する。

Step 4. 全目的汎関数が停留したと判断されれば解析を終了する。

Step 5. 得られた流速分布 u と温度分布 θ を用いて、随伴方程式 (33), あるいは式 (45) から随伴温度分布 ξ を解析する。

Step 6. 得られた流速分布 u , 温度分布 θ , 随伴温度分布 ξ を用いて、随伴方程式 (31), (32), あるいは式 (43), (44) から、随伴流速 w , 随伴圧力 q を解析する。

Step 7. これらの結果を用いて、式 (27), あるいは式 (42) から形状勾配密度関数 G を計算する。

Step 8. 力法に基づいて式 (47) から速度場 V を計算して、形状を更新し、**Step 2** に戻る。なお、Lagrange 乗数 Λ と速度場 V の計算法の詳細については文献⁽²⁹⁾に譲る。

6. 解析例

温度分布二乗誤差最小化・散逸エネルギー最小化、および散逸エネルギー制約における温度分布二乗誤差最小化の二つの多目的形状最適化に対して、導出した形状勾配密度関数と力法を用いて解析した簡単な数値例を紹介する。

6.1 分岐管流路モデル

図 1 に示す分岐管流路モデルに対して解析を行った。流れの境界条件は、流入境界 Γ_0 で Poiseuille 流れ、二つの流出口境界 Γ_1 で $\hat{\sigma}_i = 0$ の自然境界とした。温度場の境界条件は、流入境界 Γ_0 において温度 $\hat{\theta} = 100$, 流出口境界 Γ_1 は断熱境界、全流路壁境界を熱伝達境界 Γ_h として、その熱伝達境界 Γ_h においては熱伝達率 $\hat{h} = 0.01$, 外気温度 $\hat{\theta}_f = 0$ とした。Reynolds 数 $Re=50$, Peclet 数 $Pe=100$ とし、温度規定領域 Ω_D を上部の流出口境界 Γ_1 付近に設定し、設計境界 Γ_{design} は流路壁全境界とした。

Fig. 2 Numerical results: Initial shape and Optimum shapes for branch channel

Fig. 3 Numerical results: Velocity distributions for initial shape and optimum shapes for branch channel

流速分布 u , 圧力分布 p , 温度分布 θ , 随伴流速分布 w , 随伴圧力分布 q , 随伴温度分布 ξ , さらには形状更新の速度場 V の解析には, 全て有限要素法を用いた. 節点数, 要素数はそれぞれ 4,572, 2,181 であり, 流速と温度に対して二次要素, 圧力と速度場に対して一次要素で解析を行った. 温度規定領域 Ω_D における 6 節点での温度を規定し, その 6 節点全てにおいて $\theta_D = 91$ として初期形状における各節点温度 θ よりも約 2 だけ低くなるように設定した.

Fig. 4 Numerical results: Pressure distributions for initial shape and optimum shapes for branch channel

設計境界が熱伝達境界の場合、感度の計算に関して、式 (27) あるいは式 (42) が示すようにその境界における平均曲率 κ を計算する必要がある。二次元問題の場合、平均曲率 κ は境界曲線形状関数の空間二階微分で与えられる。したがって、設計境界において精度よく平均曲率 κ を評価するためには、より滑らかな設計境界形状を設定する必要がある。また、 Γ_h において熱伝達率 $\hat{h} = 0$ と仮定すれば、曲率に関する項は無視できる。ここでは、提案する手法の基本的な妥当性を確認するために、曲率の影響が無視できそうな比較的小さな熱伝達率 $\hat{h} = 0.01$ を設定して、式 (27) あるいは式 (42) の感度 G_0 の計算では、第 1 項から第 3 項までを評価して平均曲率等については考慮せず簡単化した。

6.1.1 温度分布二乗誤差最小化・散逸エネルギー最小化

領域の大きさ制約を初期形状以下となるように設定し、式 (18) の温度分布二乗誤差の重み係数 C_θ と散逸エネルギーの重み係数 C_u の値を変化させ、22 通りについて解析を行った。

Case A: ($C_\theta = 0.9, C_u = 0.1$), Case B: ($C_\theta = C_u = 0.5$), および Case C: ($C_\theta = 0.1, C_u = 0.9$) の場合における解析結果を図 2 から図 6 に示す。初期形状および最適化後の形状を図 2 に示す。形状更新解析において mesh の潰れは無く、remesh 操作は不要であった。図 3、図 4 はそれぞれ、初期形状および最適化形状での流速分布、圧力分布を示している。また図 5 は初期形状および最適化形状における温度分布である。図 6 は、形状修正の繰り返しに対する式 (18) の目的汎関数における温度二乗誤差に関する第一項、散逸エネルギーに関する第二項、全目的汎関数、および領域の大きさの収束履歴を、初期値によって規準化して示している。なお、 k 回目の形状修正における全目的汎関数の値を $J^{[k]}$ とし、この値が次の停留判定条件を満たしたときに収束したと判断した。

$$\frac{|J^{[k-1]} - J^{[k]}|}{J^{[k]}} < 10^{-3} \quad (49)$$

図 2 の結果から重み係数に応じた最適形状が得られ、Case A, B, C のいずれの場合においても滑らかな形状が得られている。また、図 3 から図 5 の結果から、散逸エネルギー最小化の重み係数 C_u が大きいほど、流路分岐部が前方に移動している様子が確認できる。通常、せん断流を伴う流路壁境界においてエネルギー散逸が顕著となる。その全散逸エネルギーの大きさは流路壁境界長さに依存するため、この分岐部が前方に移動したことによって全

Fig. 5 Numerical results: Temperature distributions for initial shape and optimum shapes for branch channel

流路壁境界の長さが減少して、全体的な散逸エネルギーを低下させたと考えられる。また、図4からも重み係数 C_u が大きいほど、流入境界 Γ_0 と流出境界 Γ_1 との圧力差が小さくなっており、圧力損失が減少している。図6の結果から、Case A, B, Cのいずれの場合においても形状更新の繰り返しに対する全目的汎関数が減少して収束している。

図7は、Case A, B, Cの場合のみでなく、重み係数 C_θ, C_u の値を変化させた22通りの場合に対して得られた最適形状における温度分布二乗誤差と散逸エネルギーの値を比較して示している。ここで、横軸には初期形状に対する温度分布二乗誤差の比 $\frac{E(\theta)}{E(\theta)_{ini}}$ 、縦軸には初期形状に対する散逸エネルギーの比 $\frac{a^V(u,u)}{a^V(u,u)_{ini}}$ を表している。図7(a)は、 C_θ, C_u の値を0～1.0に変化させた結果を示しており、図7(b)は、 C_θ, C_u の値を0.1～0.9に変化させた場合の結果を拡大して示している。図7(a)の結果から、全体的には、重み係数 C_θ の値を大きくすると $\frac{E(\theta)}{E(\theta)_{ini}}$ の値が小さくなり、 C_u の値を大きくすると $\frac{a^V(u,u)}{a^V(u,u)_{ini}}$ の値が小さくなるという通常のパレート解に準じた結果が得られていることが確認できる。しかしながら、詳細に示した図7(b)の結果から、例えば、 $C_\theta = C_u = 0.5$ から $C_u = 0.6, C_\theta = 0.4$ のように散逸エネルギーの重み C_u を大きくしたにも関わらず、解析結果では散逸エネルギーが逆に増大している場合が見受けられる。このことは、多目的最適化において式(18)のように重み付き線形和を目的汎関数に設定した場合、目的関数の凸性が保証されていなければ、重みを調整しても望み通りの解を得ることが困難な場合があることの一例を示している⁽²⁷⁾⁽²⁸⁾。また、今回設定した全目的汎関数に対して最適解近傍に多峯性が存在して、得られた解は必ずしも全体的な最適解ではなく、局所的な最適解に陥っている可能性が考えられる。したがって、今回の多目的問題において、ある重み係数の場合には、それに対応した全目的汎関数そのものの凸性が保証されず、解が局所最適解となり、今回のようなパレート解になったと考えることができる。

6.1.2 散逸エネルギー制約における温度分布二乗誤差最小化

図1の解析モデルにおいて、領域 Ω における散逸エネルギーを制約しながら規定領域 Ω_D で温度分布二乗誤差を最小化する形状決定問題を解析した。この解析例をCase Dとする。流れ場の境界条件、温度場の境界条件、規定温度等の条件は、前述の問題設定と同様として、制約条件の散逸エネルギーの上限値は、初期形状における値に設定した。

図8に、最適化形状、およびその最適化形状における流速分布、圧力分布、温度分布を示している。図9に形状

Fig. 6 Numerical results: Iterative histories for branch channel

Fig. 7 Numerical results: Pareto-optimal solutions for branch channel

更新の繰り返しにおける収束履歴を示す。図9から、温度分布二乗誤差は単調に減少して最適形状ではほぼゼロに収束し、散逸エネルギーは制約を満たして最適形状では初期値の96.9%となった。図8,9の結果から、得られた最適形状、および、散逸エネルギーや温度二乗誤差の改善率は、上記のCase Aの場合とほぼ同様な結果になっていることが確認できる。また、このCase Dの解析結果を図7(b)に反映させて示している。

6.2 合流管流路モデル

もう一つの数値例として、図10に示す合流管流路モデルに対して解析を行った。流れの境界条件は、流入境界 Γ_{01} および Γ_{02} で Poiseuille 流れ、流出境界 Γ_1 で $\hat{\sigma}_i = 0$ の自然境界とした。温度場の境界条件は、流入境界 Γ_{01} において温度 $\hat{\theta} = 300$, Γ_{02} において温度 $\hat{\theta} = 100$, 流出境界 Γ_1 は断熱境界、全流路壁境界を熱伝達境界 Γ_h として、

Fig. 8 Numerical results for optimum shapes for temperature distribution prescribed problem, while the total dissipation energy is constrained, for branch channel (Case D)

Fig. 9 Numerical results for iterative histories for temperature distribution prescribed problem, while the total dissipation energy is constrained, for branch channel (Case D)

Fig. 10 Numerical model 2: Junction channel

その熱伝達境界 Γ_h においては熱伝達率 $\hat{h} = 0.05$, 外気温度 $\hat{\theta}_f = 0$ とした. Reynolds 数 $Re=40$, Peclet 数 $Pe=80$ とし, 温度規定領域 Ω_D を流出口境界 Γ_1 付近に設定し, 設計境界 Γ_{design} は下側全境界とした. 節点数, 要素数はそれぞれ 2,580, 1,199 であり, 有限要素解析および感度の計算に関しては, 前述の分岐流路モデルと同様な手法を用いた. 温度規定領域 Ω_D における 3 節点での温度を規定することとし, 図 10 の左から順に, $\theta_D = 100$, $\theta_D = 98$, $\theta_D = 96$ とし, 初期形状における各節点温度 θ よりも約 6 だけ低くなるよう設定した.

Fig. 11 Numerical results: Initial shapes for temperature distribution prescribed problem, while the total dissipation energy is constrained, for junction channel

Fig. 12 Numerical results: Optimum shapes for temperature distribution prescribed problem, while the total dissipation energy is constrained, for junction channel

重み付き線形和に基づく温度分布二乗誤差最小化・散逸エネルギー最小化に関して、前述の分岐流路モデルと同様に、重み係数 C_θ, C_u の値に応じた最適形状が得られた。本解析例では、散逸エネルギー制約における温度分布二乗誤差最小化のみの解析結果について紹介する。制約条件の散逸エネルギーの上限値は、初期形状における値を設定した。

初期形状および最適化後の形状における流速分布、圧力分布、温度分布を図 11 および図 12 に示す。図 13 に形状更新の繰り返しにおける収束履歴を示す。これらの結果から、規定領域 Ω_D 付近の下側設計境界が膨張した最適形状となっていることが確認できる。この膨張したことによって規定領域 Ω_D 付近で流速が低下して熱輸送の効果が弱くなり、このことが温度を低下させて温度二乗誤差を最小化させたと考えられる。また、図 13 から、温度分布二乗誤差は単調に減少して最適形状ではほぼゼロに収束し、散逸エネルギーは制約を満たして最適形状では初期値の 93.8% となった。実際、図 11 と図 12 の圧力分布に着目してみると、初期形状における入口境界 Γ_{01} および Γ_{02} における圧力値がそれぞれ、4.05, 3.63 であったことに対して、最適形状ではその圧力値がそれぞれ 3.74, 3.32 となり、圧力損失が減少していることが確認できる。

以上の二つの簡単な数値解析例を通して、強制熱対流場の全領域における散逸エネルギー最小化、および部分領域における温度分布二乗誤差最小化の多目的形状最適化が実現できることを示した。しかしながら、その多目的最適化において、重み付き線形和を目的汎関数に設定した場合、重みを調整しても望み通りの解を得ることが

困難な場合があり得ることが本解析結果においても確認できた。

Fig. 13 Numerical results: Iterative histories for temperature distribution prescribed problem, while the total dissipation energy is constrained, for junction channel

7. ま と め

本研究では、強制熱対流場の全領域において散逸エネルギーを最小化、および部分領域において温度分布二乗誤差を最小化する多目的形状最適化について取り上げた。本論文では、上記の重み付き線形和を目的汎関数を設定した多目的最適化問題、散逸エネルギーの大きさを制約条件に設定して温度分布二乗誤差を最小化する問題の二つの解法を提案した。それぞれの問題の定式化を行い、形状修正の感度となる形状勾配関数を理論的に導出した。その導出した形状勾配関数に基づいて、方法を適用して数値解析した簡単な二次元問題の解析例から提示した多目的形状最適化が実現できることを示した。

文 献

- (1) 片峯英次, 畔上秀幸, “粘性流れ場領域最適化問題の解法 (力法によるアプローチ)”, 日本機械学会論文集 B 編, Vol. 60, No. 579 (1994), pp. 3859-3866.
- (2) Katamine E., Azegami H., Tsubata T. and Itoh S., “Solution to Shape Optimization Problems of Viscous Flow Fields”, *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, Vol. 19, No.1 (2005), pp.45-51.
- (3) Katamine E., Nagatomo Y. and Azegami H., “Shape Optimization of 3D Viscous Flow Fields,” *Inverse Problems in Science & Engineering*, Vol. 17, No.1 (2009), pp.105-114.
- (4) 片峯英次, 河瀬賀行, 畔上秀幸, “強制熱対流場の形状最適化”, 日本機械学会論文集 B 編, Vol. 73, No. 733 (2007), pp. 1884-1891.
- (5) 畔上秀幸, “領域最適化問題の一解法”, 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 60, No. 574 (1994), pp. 1479-1486.
- (6) Hilbert R., Janiga G., Baron R. and Thevenin D., “Multi-objective Shape Optimization of a Heat Exchanger using Parallel Genetic Algorithms”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 49, (2006), pp. 2567-2577.
- (7) Copiello, D. and Fabbri, G., “Multi-objective Genetic Optimization of the Heat Transfer from Longitudinal Wavy Fins”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 52, (2009), pp. 1167-1176.
- (8) Kashani, A. H.A., Maddahi, A. and Hajabdollahi, H. “Thermal-economic Optimization of an Air-cooled Heat Exchanger Unit”, *Applied Thermal Engineering*, Vol. 54, (2013), pp. 43-55.
- (9) Husain, A. and Kim, K. Y., “Enhanced Multi-objective Optimization of a Microchannel Heat Sink through Evolutionary Algorithm Coupled with Multiple Surrogate Models”, *Applied Thermal Engineering*, Vol. 30, (2010), pp. 1683-1691.
- (10) Morimoto, K., Suzuki, Y. and Kasagi, N., “Optimal Shape Design of Compact Heat Exchangers Based on Adjoint Analysis of Momentum and Heat Transfer”, *Journal of Thermal Science and Technology*, Vol. 5, No. 1 (2010), pp. 24-35.
- (11) 下田昌利, 畔上秀幸, 桜井俊明, “複数荷重を考慮した線形弾性体の多目的形状最適化:平均コンプライアンス最小化問題を例として”, 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 61, No. 582 (1995), pp. 359-366.

- (12) Maute, K., Rauli M., “An Interactive Method for the Selection of Design Criteria and the Formulation of Optimization Problems in Computer Aided Optimal Design”, *Computers & Structures*, Vol. 82, Issue 1 (2004), pp. 71-79.
- (13) Lee, C. J. K., Furuya, W. Tanaka, M. and Takano N., “Adjoint Variable Method for Multi-Objective Sizing and Shape Optimization”, *Journal of Computational Science and Technology*, Vol. 3, (2009), pp. 275-286.
- (14) Srinath, D. N. and Mittal S., “A Stabilized Finite Element Method for Shape Optimization in Low Reynolds Number Flows”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 54, (2007), pp.1451-1471.
- (15) Imam, M. H., “Three-dimensional Shape Optimization”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.18, (1982), pp.661-673.
- (16) Pironneau, O., “On Optimum Profiles in Stokes Flow”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 59, Part 1 (1973), pp.117-128.
- (17) Pironneau, O., “On Optimum Design in Fluid Mechanics”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 64, Part 1 (1974), pp.97-110.
- (18) Pironneau, O., *Optimal Shape Design for Elliptic Systems*, (1984), Springer-Verlag.
- (19) Jameson, A., “Aerodynamic Design via Control Theory”, *Journal of Scientific Computing* 3, No. 3 (1988), pp.233-260.
- (20) Zolésio, J. P., “The Material Derivative (or speed) Method for Shape Optimization”, In: *Optimization of Distributed Parameter Structures*, edited by Haug, E. J. and Cea, J., Vol.2 (1981), Sijthoff & Noordhoff, pp.1089-1151.
- (21) Simon, J., “Differentiation with Respect to the Domain in Boundary Value Problems”, *Numerical Functional Analysis and Optimization*, Vol. 2, No.7-8 (1980), pp.649-487.
- (22) Sokolowski, J. and Zolésio, J. P., *Introduction to Shape Optimization, Shape Sensitivity Analysis*, (1991), Springer-Verlag.
- (23) Jameson, A., “Optimum Aerodynamic Design Using Control Theory”, In: *Computational Fluid Dynamics Review 1995*, edited by M. Hafez and K. Oshima, (1995), John Wiley & Sons, pp.495-528.
- (24) Mohammadi, B. and Pironneau, O., *Applied Shape Optimization for Fluids*, (2001), p.126, Oxford University Press.
- (25) Azegami, H. et al., “Irregularity of Shape Optimization Problems and an Improvement Technique”, In: *Computer Aided Optimum Design of Structures V, OPTI 97*, edited by Hernandez, S. and Brebbia, C.A., (1997), pp.309-326, Computational Mechanics Publications, Southampton.
- (26) 畔上秀幸, “形状最適化問題の解法”, 応用数理, Vol.11, No.3 (2001), pp.49-52.
- (27) 坂和正敏, 非線形システムの最適化 – 一目的から多目的へ –, (1986), p.117, 森北出版.
- (28) 中山弘隆, ほか 3 名, 多目的最適化と工学設計, (2007), p.15, 現代図書.
- (29) 矢川元基, 宮崎則幸 編集, 計算力学ハンドブック, (2007), pp. 619-637, 朝倉書店.