運動量保存の条件を用いたスーパキャビテーション
翼列特性の非線形解析*佐 藤 恵 一**
Keiichi SATO**Key Words** : Cavitation, Hydraulic Machine, Supercavitation, Nonlinear Analysis, Cascade Performance, Condition of Conservation of Momentum

1. 緒 言

ターボ形液流機械の高速強力化あるいは高吸込性能化の障害となっているキャビテーションを克服する有力な方途としてスーパキャビテーション（以下SCという）翼⁽¹⁾⁽²⁾の採用が注目されている。しかし、一種の背面はく離状態にあるこの種のSC翼の特性の正確な予知は、特に翼列翼形においては厳しい翼列干渉によるチョーキング作用のため、目下のところかなり困難である。このため、SC翼列特性に関する実験データの蓄積とともに精度良い理論解析法の確立が強く望まれている。

既存のSC翼列特性に関する解析の問題点としては、大場ら⁽³⁾あるいは西山ら⁽⁴⁾によって指摘されているように、翼列の前後で運動量保存の条件を満足しないことがまず挙げられる。この条件は本来非線形解析においてこそ考慮されるべきものであるが、現在までのところ線形解析で適用されているにすぎない。第二の問題点は空どう後端の取扱い方で、後に詳述するように同形の空どうモデルを用いても翼列特性にかなりの影響を与える。

よって、本報では上記の諸問題点をふまえて線形解に比べ広範囲の流入角、空どう長さ、翼列条件などに対し精度良く適用可能なSC翼列特性に関する運動量保存の条件を満足する非線形解法を提示する。ついで解析例として平板翼形の諸特性を種々の翼列条件において定量的に求め、さらに線形解を含めた幾つかの解析例と比較を行う。

主 な 記 号

C_D, C_{D1} : 抗力係数
 C_L, C_{L1} : 揚力係数
 c_l : 翼弦長
 C_{Xf}, C_{Yf} : 翼形まわりの圧力積分より求まる力の x, y 成分の無次元形
 $C_{X\infty}^*, C_{Y\infty}^*$: 翼形まわりの検査面より求まる力の x, y 成分の無次元形
 f : 複素ポテンシャル $= \phi + i\psi$
 l : 空どう長さ
 l_u, l_l : 背面側および腹面側の空どう長さ
 l_x : 空どう長さの x 成分
 m : 翼列パラメータ
 p, p_1, p_c : 圧力
 q, q_1, q_2, q_c : 流速
 t : 翼列のピッチ
 $t^* = tq_1$
 w : 複素速度
 w' : 複素じょう乱速度
 X_f, Y_f : 翼形まわりの圧力積分より求まる力の x, y 成分
 z : 物理面の座標 $= x + iy$
 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_m$: 流入角, 流出角および幾何平均速度方向と x 軸とのなす角
 β : 翼列角
 $\beta^* = \beta - \alpha_1$
 Γ : 翼形まわりの循環
 $\delta_\infty, \delta_\infty^*$: 後流幅
 ξ : 写像面の座標 $= \xi + i\eta$
 θ, θ_f : 流れ方向
 ρ : 流体の密度
 σ_1 : キャビテーション係数

* 昭和56年5月15日 第9回ターボ機械講演会において講演、原稿受付 昭和56年8月24日。

** 正員、金沢工業大学（〒921 石川県野々市町扇ヶ丘7-1）。

ϕ : 速度ポテンシャル
 ϕ_i^+ : 背面側空どう後端での ϕ
 ϕ_i^- : 腹面側空どう後端での ϕ
 $\Delta\phi_i = \phi_i^+ - \phi_i^-$
 ψ : 流れ関数
 ω : 対数複素速度

2. 基礎理論

2.1 基礎式の誘導 図1に示すような二次元定常ポテンシャル流れを扱い、表面張力あるいは重力の影響は考慮の外におく。問題の簡単化のために、無限下流の流速 q_2 を代表流速の1、一つの翼形の前縁を座標の原点O、そして翼形の前縁と後縁とを通る直線を x 軸に選び、これを基準として翼列角 β 、流入角 α_1 および流出角 α_2 を定める。空どうは翼形の前縁および後縁よりなめらかに発達し有限な長さで閉じ、その下流に翼形の空どう抗力に相応する後流を伴うものとする。ここに、ポテンシャル流れの場合から見た後流の効果を適正に評価する流れモデル「後流を排除厚さの概念に準じ評価し無限下流の流速をもつ流れで置き換える⁽⁵⁾」を採用しよう。つまり、後流境界の速度を無限下流の速度に等しいとする Tulin の二重らせん渦モデル⁽⁶⁾に準じたものを用いるが、より一般的な場合を取扱うこととし、後流は無限下流において閉じず、排除厚さに相当する吹出しの存在を考慮するものとしよう。

問題の流れ場を図2(a)に示す複素ポテンシャル面 $f = \phi + i\psi$ (ϕ : 速度ポテンシャル, ψ : 流れ関数) で考え、 $\beta^* = \beta - \alpha_1$, $t^* = tq_1$ である⁽⁷⁾ことを考慮すれば、この f 面は容易に写像関数

$$f = -\frac{it^*}{2\pi} \{ e^{i\beta^*} \ln(1 + me^{-i\beta^*}\zeta) - e^{-i\beta^*} \ln(1 + me^{i\beta^*}\zeta) \} \quad (1)$$

により、図2(b)に示す $\zeta = \xi + i\eta$ 面の下半面に変換できる。ここに、よどみ点 O^* は $f=0$ および $\zeta=0$ に

図1 翼列まわりの流れ (物理面: $z = x + iy$)

対応する。さらに、翼形後縁における速度ポテンシャルを $\phi=1$ とおき、 $\xi=1$ に対応するものとすれば、式(1)より

$$\phi = \frac{t^*}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} \sin \beta^* \ln(m^2 \xi^2 + 2m\xi \cos \beta^* + 1) - \cos \beta^* \tan^{-1} \left(\frac{m\xi \sin \beta^*}{1 + m\xi \cos \beta^*} \right) \right\} \quad (2)$$

の関係をを用いて、パラメータ m を決定できる。ここに、前縁点、背面側および腹面側の空どう後端点の ζ 面における値をそれぞれ $\xi = -b, -d, e$ とおく。

複素速度 $w = q \exp(-i\theta)$ を導入すれば、 $w = df/dz$ の関係より対数複素速度 $\omega = \ln w = \ln q - i\theta$ を使える。この $\omega(\xi)$ に関して ζ 面上の境界条件を考えれば、 ξ 軸上において

$$\left. \begin{aligned} (i) \quad & \ln q = 0 : \xi < -d, \xi > e \\ (ii) \quad & \theta = \theta_f : -b < \xi < 1 \\ (iii) \quad & \ln q = \ln q_c : -d < \xi < -b, 1 < \xi < e \\ (iv) \quad & \theta \rightarrow \alpha_2 : |\xi| \rightarrow \infty \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

さらに、無限上流の条件として

$$(v) \quad \theta \rightarrow \alpha_1 : \zeta \rightarrow \zeta_1 = \frac{1}{m} \exp\{i(\beta^* - \pi)\} \quad (4)$$

となる。 θ_f は翼面上の流れ方向、 q_c は空どう界面上での流速である。キャビテーション係数として無限上流の静圧 p_1 、流速 q_1 および流体密度 ρ を用いた

$$\sigma_1 = 2(p_1 - p_c)/\rho q_1^2 \quad (5)$$

を用いれば、 $q_c = q_1 \sqrt{1 + \sigma_1}$ の関係がある。ここに p_c は空どう内圧である。

結局、上記式(3)で与えられる混合境界値問題を解けばよいことになる。翼形の前、後縁 $\xi = -b, 1$ でなめ

(a) $f = \phi + i\psi$

(b) $\zeta = \xi + i\eta$

図2 写像面

らかに空どうが発達すること、および $\omega(\xi)$ の虚実が反転することを考慮して、補助関数 $i\sqrt{(\xi+b)(\xi-1)}$ を導入すれば、Rieman-Hilbert 問題の解法⁽⁸⁾に準じ、流れ場を表す $\omega(\xi)$ を完全な形で求めることができる。

$$\begin{aligned} \omega(\xi) = & \frac{i}{\pi} \sqrt{(\xi+b)(\xi-1)} \\ & \times \left[\int_{-b}^1 \frac{\theta_f d\nu}{\sqrt{(b+\nu)(1-\nu)(\nu-\xi)}} \right. \\ & + \ln q_c \left\{ \int_1^e \frac{d\nu}{\sqrt{(b+\nu)(\nu-1)(\nu-\xi)}} \right. \\ & \left. \left. - \int_{-d}^{-b} \frac{d\nu}{\sqrt{(b+\nu)(\nu-1)(\nu-\xi)}} \right\} \right] \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

この $\omega(\xi)$ より、SC 翼列の諸特性を求めることができる。

まず、物理面 z と写像面 ξ との対応関係は $z = \int \exp(-\omega)(d\xi/d\xi) d\xi$ であるから、弦長 c_l および背面側と腹面側の空どう形状 z_u, z_l はそれぞれ

$$c_l = \int_{-b}^1 \exp(-\omega)(d\xi/d\xi) d\xi \dots\dots\dots (7)$$

$$z_u = \int_{-b}^e \exp(-\omega)(d\xi/d\xi) d\xi \dots\dots\dots (8)$$

$$z_l = c_l + \int_1^e \exp(-\omega)(d\xi/d\xi) d\xi \dots\dots\dots (9)$$

となる。同様に空どう長さ l_u, l_l は式(8)、(9)より、それぞれ

$$l_u = \left| \int_{-b}^{-d} \exp(-\omega)(d\xi/d\xi) d\xi \right| \dots\dots\dots (10)$$

$$l_l = \left| c_l + \int_1^e \exp(-\omega)(d\xi/d\xi) d\xi \right| \dots\dots\dots (11)$$

で与えられる。翼形に働く力の x, y 成分の X_f, Y_f を係数 $C_{Xf} = 2X_f/\rho q_1^2 c_l, C_{Yf} = 2Y_f/\rho q_1^2 c_l$ の形で翼形まわりの圧力分布より求めると、

$$\begin{aligned} C_{Xf} + iC_{Yf} = & -2i \int_{c_l}^0 (p - p_c) dz / \rho q_1^2 c_l \\ = & i(1 + \sigma_1) q_1^2 + (i/c_l) \int_1^{-b} \exp(\bar{\omega})(d\xi/d\xi) d\xi \end{aligned}$$

図 3 運動量検査面

となる。ここに、 $\bar{\omega}(\xi)$ は $\omega(\xi)$ の複素共役関数である。さらに、流入速度 $\vec{q}_1$ と流出速度 $\vec{q}_2$ との幾何平均速度方向が x 軸となす角を α_m として、翼に働く力の α_m 方向成分を抗力 D 、その垂直方向成分を揚力 L と定義すれば、揚、抗力係数 C_L, C_D はそれぞれ次式より求まる。

$$C_L = 2L/\rho q_1^2 c_l = C_{Yf} \cos \alpha_m - C_{Xf} \sin \alpha_m \dots\dots\dots (12)$$

$$C_D = 2D/\rho q_1^2 c_l = C_{Yf} \sin \alpha_m + C_{Xf} \cos \alpha_m \dots\dots\dots (13)$$

さらに、上流側の流速 q_1 を用いたものを、 $C_{L1} = 2L/\rho q_1^2 c_l, C_{D1} = 2D/\rho q_1^2 c_l$ とする。

2・2 運動量保存の条件 さて、図3に示すような翼列の一つの翼形および空どうのまわりに翼列軸方向に幅 t をもつ検査面 ABCD をとる。ただし、上、下流の面 AD, BC は翼列軸より十分遠方に離れているものとしよう。

後流を排除厚さの概念に準じ無限下流の流速 $q_2 = 1$ で評価することは無限下流において $Q = q_2 \delta_\infty^*$ の吹出しを考慮したことに相当する⁽⁹⁾。ここに、 δ_∞^* は無限下流における後流幅である。この吹出し Q の呈する運動量 $R = \rho Q q_2$ を考慮して検査面に対して運動量の定理を適用すると x, y 2 方向に関し、

$$C_{Xf} - 2\delta_\infty^* \cos \alpha_2 = C_{X\infty}^* \dots\dots\dots (14)$$

$$C_{Yf} - 2\delta_\infty^* \sin \alpha_2 = C_{Y\infty}^* \dots\dots\dots (15)$$

が成立する。ここに、 $R = \rho \delta_\infty^* q_2^2 = \rho \delta_\infty^*$ 、 $\delta_\infty^* = \delta_\infty \sin(\beta - \alpha_2)$ であり、 δ_∞ は翼列軸方向の後流幅である。さらに、 $C_{X\infty}^*, C_{Y\infty}^*$ は翼形、空どう、および後流から成る半無限物体に働く力の x, y 成分であり、

$$\begin{aligned} C_{X\infty}^* = & (t/c_l) \{ (1 - q_1^2) \sin \beta \\ & + 2q_1 (q_1 \cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \sin(\beta - \alpha_1) \} \dots\dots (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{Y\infty}^* = & (t/c_l) \{ (q_1^2 - 1) \cos \beta \\ & + 2q_1 (q_1 \sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) \sin(\beta - \alpha_1) \} \dots\dots (17) \end{aligned}$$

の関係にある。さらに連続の条件より

$$\delta_\infty^* = t \{ \sin(\beta - \alpha_2) - q_1 \sin(\beta - \alpha_1) \} \dots\dots\dots (18)$$

と表せる。なお、 $t \rightarrow \infty$ の無限流れではこれらの力の流れ方向成分は消失する ([付録] 参照)。

2・3 未知定数の決定 2・1節で基礎式(6)を求めたが、たとえ翼面こう配 θ_f が既知としても、まだ決定されるべき定数として、 b, e, d, α_2 および q_1 が残されている。ここに、 α_1 と σ_1 は与えられているものとする。以上の5個の未知量を求めるために必要な5個の条件は次のようになる。

(1) x 方向への運動量保存の条件：式(15)

(2) y 方向への運動量保存の条件：式(16)

(3) 無限下流の条件:

$$\omega(\infty) = -i\alpha_2, \quad |\xi| \rightarrow \infty \dots\dots\dots (20)$$

(4) 無限上流の条件:

$$\left. \begin{aligned} \omega(\xi_1) &= \ln q_1 - i\alpha_1 \\ \xi \rightarrow \xi_1 &= \frac{1}{m} \exp\{i(\beta^* - \pi)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

(4)の条件は2個の条件式を与えるので計5個の非線形連立方程式となり、これらを解けば完全に解は定まる。

一方, Furuya⁽⁷⁾は(1), (2)の条件の代わりに,

$$(1)' \quad \delta_\infty = 0, \quad (2)' \quad \Delta\phi_i = \phi_i^+ - \phi_i^- = \Gamma \dots\dots\dots (22)$$

さらに, Tulinの二重らせん渦モデル⁽⁶⁾では,

$$(1)'' \quad \delta_\infty = 0, \quad (2)'' \quad \Delta\phi_i = \phi_i^+ - \phi_i^- = 0 \dots\dots\dots (23)$$

の条件を用いている。ここに, ϕ_i^+ , ϕ_i^- はそれぞれ背面側および腹面側の空どう後端における速度ポテンシャル, Γ は翼形まわりの循環である。つまり, $\delta_\infty = 0$ という運動量保存の条件に反する条件を用いていること, および空どう後端での ϕ の取扱い方に問題があることがわかる。

3. 解 析 例

3.1 線形解に関する検討 解析が容易なことより従来より $\omega = \ln q - i\theta \sim w' = u - iv$ (w' :複素じょう乱速度)とし, 二次以上の高次のオーダの項を省略した線形解析が盛んに行われている。本研究においても, 本解法の線形化された条件として(1), (2)の代わりに,

$$\delta_\infty = 0, \quad C_{Yf} = C_{Y\infty} \dots\dots\dots (24)$$

を用いて, 従来の(二重らせん渦形モデルを用いた)線形解析結果⁽¹⁰⁾と比較してみた。ここに, 従来のものとは

$$\left. \begin{aligned} \delta_\infty = 0 \text{ あるいは } C_{Xf} &= C_{X\infty} + 2\delta_\infty^* \\ l_u &= l_l \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

の条件を用いたものである。 l_u , l_l はそれぞれ背面側

および腹面側の空どう長さである。

表1にSC平板翼列に関する式(24)による計算値と式(25) ($\delta_\infty = 0$, $l_u = l_l = l$)によるものとの比較を示す。ここに, C_{L1} , α_2 の数値において上段が後者, 下段が前者に対応する。解析方法の詳細は前報⁽¹⁰⁾を参照されたい。これより, 両線形解法による結果には一般的にほとんど差がないこと, ただ転向角に関係する流出角 α_2 においてのみ(特に小 l において)差異があらわれること, そして空どう長さを未知とした条件式(24)を用いた解析からも $l_u = l_l$ の結果を得られることなどがわかる。

3.2 非線形解の計算法 2章で示した本解析法の有効性を吟味するために, 実験結果⁽¹²⁾あるいは諸解析結果⁽⁷⁾が報告されている平板翼形を取り上げ, その翼列特性を定量的に調べてみよう。

平板の翼面こう配 θ_f は

$$\theta_f = \pi \quad (-b < \xi < 0), \quad \theta_f = 0 \quad (0 < \xi < 1) \dots\dots\dots (26)$$

となる。これを基礎式(6)へ代入し, ξ 軸上で虚実を分離すれば, 翼面上の流速 $q(\xi)$, $(-b < \xi < 1)$ は,

$$\begin{aligned} q(\xi) &= \frac{(\sqrt{b+\xi} - \sqrt{b(1-\xi)})^2}{(1+b)\xi} \exp\left\{\frac{\ln(1+\sigma_1)q_1^2}{\pi}\right. \\ &\times \left(\tan^{-1} \sqrt{\frac{e-1}{e+b}} \sqrt{\frac{b+\xi}{1-\xi}}\right. \\ &\left. \left. + \tan^{-1} \sqrt{\frac{d-b}{d+1}} \sqrt{\frac{1-\xi}{b+\xi}}\right)\right\} \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

$\exp(\omega) = q \exp(-i\theta)$ であることを考慮して, 式(26), (27)を式(7)~(12)の諸式へ代入すれば, C_L , C_{Xf} , C_{Yf} などを数値積分により求めることができる。

さらに, 未知定数に関しては, まず2.3節の条件(1), (2)より

$$F_1 = C_{X\infty}^* + 2\delta_\infty^* \cos \alpha_2 = 0 \dots\dots\dots (28)$$

$$F_2 = c_l(C_{Yf} - C_{Y\infty}^* - 2\delta_\infty^* \sin \alpha_2) = 0 \dots\dots\dots (29)$$

条件(3)より

$$F_3 = \frac{\pi}{2} - \alpha_2 - \sin^{-1} \frac{1-b}{1+b}$$

表1 諸線形解の比較 [C_{L1} , α_2 の上段の値および l は式(25), 下段の値および l_u , l_l は式(24)に対応する]

$c_l / l = 1.0, \beta = 30^\circ, \alpha_1 = 8^\circ$					$c_l / l = 0.5, \beta = 60^\circ, \alpha_1 = 8^\circ$			
σ_1	0.112	0.101	0.078 3	0.075 0	0.298	0.270	0.193	0.165
C_{L1}	0.225	0.191	0.099 5	0.070 0	0.376	0.332	0.227	0.191
	0.225	0.192	0.099 2	0.069 6	0.367	0.326	0.225	0.189
α_2	0.057 7	0.071 8	0.106	0.117	0.046 0	0.057 5	0.084 3	0.093 5
	0.069 4	0.081 8	0.112	0.121	0.051 7	0.062 4	0.087 6	0.096 4
l	1.050	1.100	1.500	2.000	1.050	1.100	1.500	2.000
l_u	1.065	1.116	1.511	2.007	1.070	1.125	1.532	2.031
l_l	1.065	1.116	1.511	2.007	1.070	1.125	1.532	2.031

$$+\frac{2}{\pi} \ln(q_1 \sqrt{1+\sigma_1}) \ln \frac{\sqrt{e+b} + \sqrt{e-1}}{\sqrt{d-b} + \sqrt{d+1}} = 0 \quad \dots\dots\dots (30)$$

条件(4)より

$$F_4 = \text{R.P.}\{\omega(\xi_1)\} - \ln q_1 = 0 \quad \dots\dots\dots (31)$$

図4 スーパーキャビテーション翼列の揚・抗力特性

図5 転向角特性および諸解法との対比
[$\Delta\phi_1 = \pi$: 式(33), $\Delta\phi_2 = 0$: 式(34)
による結果]

$$F_5 = \text{I.P.}\{\omega(\xi_1)\} + \alpha_1 = 0 \quad \dots\dots\dots (32)$$

の5個の方程式を得ることができる。ここに、R.P.およびI.P.はそれぞれ $\omega(\xi_1)$ の実部と虚部とを表す。

$F_n(\alpha_2, b, e, d, q_1) = 0$: $n=1, 2, \dots, 5$ は五元の非線形連立方程式であるが、ここでは所与の弦節比 c_i/t 、翼列角 β 、キャビテーション係数 σ_1 および流入角 α_1 に対し、線形解を初期値としたニュートン・ラフソン法を用いて解いた。弦節比に関しては、弦長 c_i に合わせてピッチ t を反復修正して所定の値になるようにすればよい。

なお、条件式(15)、(16)の代わりに、式(22)あるいは式(23)を用いる場合は、

図6 揚力特性および諸解法との対比 ($\alpha_1 = 4^\circ$)

図7 揚力特性および諸解法との対比 ($\alpha_1 = 12^\circ$)

$$F_1 = \delta_\infty^* = 0, \quad F_2 = \Delta\phi_l - \Gamma = 0 \quad \dots\dots\dots (33)$$

あるいは,

$$F_1 = \delta_\infty^* = 0, \quad F_2 = \Delta\phi_l = 0 \quad \dots\dots\dots (34)$$

を用いればよい。ここに、 $\Delta\phi_l$ は式(2)より求まり、そして $\Gamma = t\{q_1 \cos(\beta - \alpha_1) - \cos(\beta - \alpha_2)\}$ である。

3.3 計算例とその検討 図4に本非線形解析法により計算した平板SC翼列に関する揚力特性を種々の翼列条件の下に示す。この図より、弦節比 c_l/t が比較的大きな1.0の場合に、 C_{L1}/σ_1 の変化が大きく取り得る σ_1 の範囲も狭いことがわかる ($\sigma_1 \rightarrow$ 大で部分空どう域、 $\sigma_1 \rightarrow$ 小でチョーキング域となる)。つまり、 σ_1 の変化に対しSC翼列特性は急変する。

図5~7には、転向角 $(\alpha_1 - \alpha_2)/\alpha_1$ および揚力係数 C_{L1} とキャビテーション係数 σ_1 との関係を示す。同時に本解析法の2.3節の(1)、(2)の条件の代わりに、(1)'、(2)'の条件 ($\delta_\infty = 0, \Delta\phi_l = \Gamma$) および(1)"、(2)"の条件 ($\delta_\infty = 0, \Delta\phi_l = 0$) を用いた結果、そして3.1節で述べた式(24)を用いた線形解析結果をも対比した。翼列条件としては、代表的なSC翼列の配置⁽¹¹⁾である弦節比 $c_l/t = 0.5$ 、翼列角 $\beta = 30^\circ$ の場合を一例として選び、流入角 $\alpha_1 = 4^\circ, 12^\circ$ について計算した。翼列状態においても、小 α_1 ほど、小 σ_1 (大空どう長さ) ほど、(非線形) 解析法の違いによる特性の差が小となる。これに対し本非線形解と線形解との差は、当然のことながら小 α_1 ほど小さいが、チョーキング・キャビテーション係数にかなりの差があるため必ずしも小 σ_1 ほど小さいとはいえない。さらに、解析法の差は揚

力特性^{*1}では微小だが、転向角特性ではきわめて顕著に現れる。同じ二重らせん渦形の空どうモデルを用いてもSC翼列においては、空どう後端の取扱い方など解析法の違いによって転向角(つまり流出角 α_2) 特性に大差が出るのがわかる。このことは、線形解析を用いて空どう後流モデルの差を論じた前報の結果および3.1節の結果と符号する。

図8には、種々の解析法より求めた空どう長さの x 成分 l_x/c_l と σ_1 との関係を、 $c_l/t = 0.5, \beta = 30^\circ, \alpha_1 = 8^\circ$ の場合について示す。これより、大 σ_1 では解析法の違いによりかなりの差が出ることを、背面側と腹面側の空どう長さとの差があり、特に条件 ($\delta_\infty = 0, \Delta\phi_l = 0$) の場合著しいこと、 $\sigma_1 \rightarrow$ 大で背面側の空どう長さ l_u は弦長より短く成り得ることなどがわかる。

図9では、参考のため本解析結果と実験結果⁽¹²⁾とを比較した。二点鎖線で示される実験値は実験点を滑らかに補間したものである。図より、比較的大きな σ_1 では理論と実験とは良い一致を示すが、 $\sigma_1 \rightarrow$ 小ではかなりのずれが認められる。これは実験値では壁面効果が考慮されていないことなどによるものと考えられ、先に示した転向角の問題を含めSC翼列流れに関する更に詳細な実験的研究が望まれるといえよう。

4. 結 論

二次元SC翼列特性に関する理論解析法の確立を目的として、特に二重らせん渦形の空どうモデルに関する非線形解析法について研究した。得たる主要な結果をまとめると次のようになる。

図8 空どう長さおよび諸解析法との対比

図9 実験結果との比較

*1 本研究で示した揚力係数の数値はいずれも翼形まわりの圧力分布を数値積分することより求めた。

(1) 二次元 SC 翼列まわりの流れに関し, x, y 2 方向の運動量保存の条件を用いた合理的な非線形解析法を提示した.

(2) 既存の 2 種の非線形解析法との対比によると, 一般に解析法の差が揚力特性に与える差は小さいが, 流出角 (つまり転向角) においてはかなり大きい. また, 各特性ともに流入角が小なほど, あるいはキャビテーション係数が小なほど解析法による差は小さい.

(3) 線形解はチョーキング域での特性の評価が特に不十分であり, 非線形解と大差がある. さらに, 当然のことながらいずれのキャビテーション係数においても, 流入角が大ほど非線形解との差は大となる.

本研究の数値計算には, 金沢工業大学計算機センタの IBM 3031 を用いた.

終わりに臨み, 有益なご助言を頂いた東北大学高速力学研究所 大場教授に深謝致します.

〔付録〕 無限幅のポテンシャル流れにおいて翼形, 空どうおよび後流から成る半無限物体に働く抗力について考える. この物体は図 1 の ABOCB'A' のような有限幅を有するものである.

この物体まわりの流れを複素ポテンシャル面 f で考えるとキルヒホフモデルによるものと境界値が異なるだけでその形状は同一になる. したがって, 今井⁽¹³⁾が無縁空どうに対し示した理論展開に準じて扱うことができる. ただし, 一様流の方向に x 軸, そしてその垂直方向に y 軸をとり, ζ 面の下半面に写像するものとする.

$z \rightarrow \infty (\zeta \rightarrow \infty)$ で $\theta \rightarrow 0, \log q \rightarrow 0$ より, $\omega(\zeta)$ は ζ 面上で展開形で表され

$$\omega \approx -i \left(\frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_2}{\zeta^2} + \dots \right), \quad \zeta \rightarrow \infty \quad \dots\dots\dots (35)$$

となる. ここに, a_1, a_2 は実定数である. さらに, $\zeta = -\sqrt{f}$ であるから

$$\begin{aligned} dz &= \frac{dz}{df} \frac{df}{d\zeta} d\zeta \\ &= \left\{ 2\zeta + 2ia_1 - (a_1^2 - 2ia_2) \frac{1}{\zeta} + \dots \right\} d\zeta, \quad \zeta \rightarrow \infty \end{aligned}$$

積分定数を z_0 とすれば, $\zeta \rightarrow \infty$ で

$$z = z_0 + \zeta^2 + 2ia_1\zeta - (a_1^2 - 2ia_2)\log \zeta + O\left(\frac{1}{\zeta}\right) \quad \dots\dots\dots (36)$$

よって, 十分下流における物体形状 y は

$$y = \begin{cases} y_0^+ - 2a_1\sqrt{x} + a_2 \log x + \dots, & \text{AB 上} \\ \dots\dots\dots (37\cdot a) \\ y_0^- + 2a_1\sqrt{x} + a_2 \log x + \dots, & \text{A'B' 上} \\ \dots\dots\dots (37\cdot b) \end{cases}$$

と計算できる. ここに, y_0^+, y_0^- は定数である. しかしながら, 無限下流で物体幅つまり排除厚さは運動量厚さに等しく有限であるから, $a_1 = 0$ であることが必要となる.

一方, 十分大きな閉曲線に関し運動量の定理を適用することより, この半無限物体に働く力の x 方向成分は $X_\infty^* = \pi\rho a_2^2$ と求まる⁽¹³⁾. ところが, $a_1 = 0$ であるから

$$X_\infty^* = 0 \quad \dots\dots\dots (38)$$

となり, 流れ方向成分 (抗力) は 0 となる.

文 献

- (1) Tulin, M.P. and Burkart, M.P., *David W. Taylor Model Basin*, Rep. C-638 (1955).
- (2) Oba, R., *Z. AMM*, **41**-9 (1961), 354.
- (3) Oba, R. and Ikohagi, T., *Trans. ASME*, Ser. I, **95**-1 (1973), 113.
- (4) 西山・伊藤, 機論, **39**-321 (昭 48), 1537.
- (5) 大場・井小萩, 東北大学高速力学研究所報告, **34**-332 (昭 49), 89.
- (6) Tulin, M.P., *J. Ship Res.*, **7**-3 (1964), 16.
- (7) Furuya, O., *Trans. ASME*, Ser. I, **97**-4 (1975), 419.
- (8) Larock, B.E. and Street, R.L., *J. Ship Res.*, **9**-3 (1965), 170.
- (9) Batchelor, G.K., *An Introduction to Fluid Dynamics*, (1967), 348, Cambridge Univ. Press.
- (10) 佐藤, 機論, **48**-427, B (昭 57), 424.
- (11) 佐藤, 機論, **48**-433, B (昭 57), 1659.
- (12) Wade, R.B. and Acosta, A.J., *Trans. ASME*, Ser. D, **89**-4 (1967), 693.
- (13) 今井, 等角写像とその応用, (昭 54), 112, 岩波書店.

討 論

〔質問〕 木 田 輝 彦 [大阪府立大学工学部]

(1) 2・3 節において, 未知定数を決定する条件式 (20) の (3) は実部と虚部の 2 個の条件式を含んでいるのではないか.

論

(2) 式 (19) の δ_∞^* の定義について, 質問 (1) と関連するが, 式 (20) の (3) の条件を用いて式 (1) と (6) から δ_∞^* を求めると, $\delta_\infty^* = t^* \sin \beta^*$ となるように思うが, δ_∞^* の定義をお教えいただきたい.

(3) 1110 ページ右欄下 10 行めおよび〔付録〕について、「 $t \rightarrow \infty$ では流れ方向の力の成分がどのような反りをもつ SC 翼の場合でも零となる」と読取れるが、これだと誤りと思われるが、いかがか。

〔回答〕 (1) 式(6)を $\zeta \rightarrow \infty$ で展開すれば、

$$\omega = \ln q - i\theta \sim -i\left(a_0 + \frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_2}{\zeta^2} + \dots\right), \quad \zeta \rightarrow \infty.$$

よって、無限下流において $q \equiv q_2 = 1$ および $\theta \equiv \alpha_2 = a_0$ となる。ここに、 $a_0, a_1, a_2, \dots$ は式(6)より定まる実定数であり、〔付録〕に示す単独翼の場合と異なり $a_0 \neq 0$ である。しかしながら、このうち $q_2 = 1$ は式(3)の条件(i)に対応している。この式(3)で示される境界条件を満足するように求めた解が基礎式の式(6)であり、実部に関する $q_2 = 1$ はすでに満足されている。

(2) 1110 ページ右欄 19~34 行めに示したとおり、 δ_∞^* は後流幅で流れ方向 α_2 に垂直方向の幅であり、 δ_∞ は BC (つまり翼列軸) 方向の幅である (付図 1 参照)。 $\delta_\infty^* = t^* \sin \beta^*$ の結果を得たとのことであるが、図 2 より明らかなように $t^* \sin \beta^*$ は翼間の流量に等しく δ_∞^* とは異なる。〔付録〕の式(37)に準じて計算したと考えるが、積分定数 (あるいは定数項) の考慮はなされたのか。 δ_∞^* は連続の条件より式(19)の形に導くことができる。

付図 1 δ_∞^* の定義 (十分下流において)

(3) 〔付録〕の記述は何ら翼形状を限定することなく導いているので、任意の反りをもつ SC 翼形にも適用できる。実際の解析例として文献(付 1)がある。もちろん、ポテンシャル流れの仮定の下で成立する。

念のため付け加えると、SC 翼形に働く力の流れ方向成分が 0 になるという結果ではなく、翼形、空どう、そして空どう後流から成る仮想的な (有限幅の) 半無限物体に働く力の流れ方向成分が 0 になるということである。

(付 1) 佐藤, 機講論, No. 821-1 (昭 57-6), 89.