弁閉鎖に伴う水撃現象の最適制御*

山 本 勝 弘**

Optimum Valve Operation in Waterhammer

by Katsuhiro YAMAMOTO

In order to clarify fundamental aspects of the optimum valve operation to suppress pressure rises in waterhammer, two typical problems are studied for a single pipe line system without loss. One is the case how to close a valve minimizing the maximum pressure in a specified valve closing time, and another is the case minimizing a valve closing time for a specified maximum pressure. The problems are solved by graphycal method based on characteristics theory. As the results for the above two problems case the optimum valve movements and simple formula between valve closing time and the maximum pressure are derived. In addition the solution is improved for the similar problem proposed by Streeter, i. e. the valve stroking.

Key Words: Transient Flow, Waterhammer, Optimum Valve Operation, Valve Stroking, Single Pipe Line without Loss

1. 緒 言

送水管路系の弁は、多くの場合管路の流れをしゃ断するために設置され、その目的に関するかぎり弁の閉鎖時間は短いほうがよい。しかし、一方で弁を短時間で閉鎖すると、水撃現象が顕著になり強度上好ましくない。そこで両者のかね合いから、管路系の弁の閉鎖方法に関し次のような2種類の最適問題が生じる。

(A) 弁閉鎖時間の上限が与えられたとき、系に生じる圧力変化の最大値を最小にするような弁の閉鎖方法を求めること。

(B) 系に生じる圧力変化の最大値に上限が与えられたとき、弁閉鎖時間を最小にするような弁の閉鎖方法を求めること。

ところで、Streeter は、通常の水撃問題の解析が与えられた弁の動きのもとで系内の流れの変化を求めるのに対し、系内の流れが与えられた条件を満足するような弁の動きを求める問題を提起し、それらを総称して Valve Stroking と名づけた⁽¹⁾⁽²⁾。Streeter 自身は系内の圧力変化の最大値と最小値が与えられたとき弁閉

鎖時間が最小となる問題を図式解法によって解き、圧力変化の最大値と弁閉鎖時間の関係を導いている⁽¹⁾。しかし、Streeter の得た結果は、左記の問題(A)、(B)の拡張として考えると疑問な点が生じ、検討の余地がある。

一方、弁による水撃現象の制御は、実用的には弁の閉鎖速度を2段階とし、計算機シミュレーションによって圧力上昇の低くなる切り換え点を試行錯誤的に求める方法がとられているようである。

本報告では以上のような現状に対し、水撃現象に関する最適問題の基本的な性格を明らかにするため、対象を無損失の単一管路系に限定し、Streeter 同様図式解法によって左記問題(A)、(B)の解を求め、Streeter の問題にも再検討を加えた。その結果、任意の弁閉鎖に対する圧力変化の最大値の下限が得られ、各最適問題の解の特性が明らかとなった。

2. 問題の定式化

2.1 モデルと記号 本研究の解析モデルを図1に示す。解におよぼす系の主要パラメータの影響を明確にするため、流れは一次元流れとし、二次的因子である管路損失および対流項の影響は無視する。

記号を以下のように定める。

* 昭和58年9月1日 第921回講演会において講演、原稿受付昭和58年2月14日。

** 正員、早稲田大学理工学部(〒160 東京都新宿区大久保3-4-1)。

x : 位置
 t : 時間
 p : 圧力 $= p(x, t)$
 u : 管内流速 $= u(x, t)$
 p_0 : タンク圧
 u_0 : 初速度
 l : 管路長
 ρ_0 : 液体の密度
 c_0 : 管内の圧力波伝ば速度
 B : 弁閉鎖曲線 $= B(t)$, $B_0 \equiv u_0/\sqrt{p_0}$
 T_c : 弁閉鎖時間.

2.2 基礎方程式と初期条件, 境界条件 以上の変数および定数を, 解の相似性と系の支配パラメータの影響をみやすくするため, 次のように無次元化する.

$$\xi = x/l, \quad \tau = c_0 t/l,$$

$$h = (p - p_0)/p_0, \quad v = u/u_0, \quad \beta = B/B_0$$

$$R \equiv \rho_0 c_0 u_0/p_0, \quad \tau_c \equiv c_0 T_c/l$$

系の状態を $U = {}^t(h, v)$ と表せば, 流れの基礎式は,

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + A \frac{\partial U}{\partial \xi} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

となる. ただし, ${}^t(\quad)$ はたてベクトルを表し,

$$A \equiv \begin{pmatrix} 0 & R \\ 1/R & 0 \end{pmatrix}$$

初期条件は,

$$\tau = -0: U = {}^t(0, 1) \quad \dots\dots\dots (2)$$

境界条件は弁部 ($\xi = 1$) とタンク部 ($\xi = 0$) で次のように与えられる.

$$\left. \begin{array}{l} \xi = 1: v = \beta\sqrt{1+h} \\ \xi = 0: h = 0 \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに $\beta = \beta(\tau)$ は無次元化された弁閉鎖曲線を表し, τ が $0 \leq \tau \leq \tau_c$ 以外では常に次の条件を満たす.

$$\left. \begin{array}{l} \tau < 0: \beta = 1 \\ \tau > \tau_c: \beta = 0 \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

以上より系の状態 $U = U(\xi, \tau)$ は, $0 \leq \tau \leq \tau_c$ での弁閉鎖曲線 $\beta(\tau)$ を与えれば確定し, 系に生じる圧力変化の最大値

図1 無損失の単一管路系

$$h_m \equiv \max_{0 \leq \xi \leq 1, \tau \geq 0} h(\xi, \tau)$$

は, 一般に τ_c と R の関数で弁閉鎖曲線に依存する.

2.3 最適問題 以上より, 式(1)~(3)で表される系に関し, 本研究で考察する2種類の最適問題は次のように述べられる.

- (A) τ_c の上限が与えられたとき, h_m を最小にするような $\beta(\tau)$ を求めること.
- (B) h_m の上限が与えられたとき, τ_c を最小にするような $\beta(\tau)$ を求めること.

3. 最適解の構成

3.1 圧力変化の最大値の一般的性質 双曲形偏微分方程式系である式(1)は, 特性曲線の理論により次のように言いかえられる.

$$\left. \begin{array}{l} d\xi/d\tau = 1 \text{ に沿い,} \\ h/R + v = \text{一定} \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\left. \begin{array}{l} d\xi/d\tau = -1 \text{ に沿い,} \\ h/R - v = \text{一定} \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

これらの性質と式(2), (3)を考え合わせると, h, v -平面で系内部の解を作図により構成することができる⁽³⁾.

図1のような無損失の単一管路系の場合, 上述の作図による h, v -平面での解の存在範囲から, 圧力変化の最大値に関し, 一般的に次のことが成り立つ.

- (i) $0 \leq \xi \leq 1, \tau \geq 0$ において, $h(\xi, \tau)$ の最大値は必ず弁部 $\xi = 1$ で発生する.
- (ii) 弁部の圧力変化の最大値は, タンクからの反射波が到達しはじめてから弁閉鎖までの期間, $2 \leq \tau \leq \tau_c$ で生じる.

3.2 問題(A)の解 弁閉鎖時間は一般に,

$$\tau_c = 2n + \alpha \quad \dots\dots\dots (7)$$

とおくことができる. ただし, $0 \leq \alpha < 2, n = 1, 2, \dots, \tau_c$ がこのように与えられたとき, 系の圧力変化の最大値 h_m を最小とする弁閉鎖曲線 $\beta(\tau)$ を求めよう.

3.1節の性質(i), (ii)より, まず弁部の圧力が, $2 \leq \tau \leq \tau_c$ で,

$$h = h_m \text{ (一定)}$$

となるような変化を考える. h, v -平面でこの条件を満たし, $\tau \leq \tau_c$ で弁部の流速が $v = 0$ に到達する変化のうち, h_m が最小となる解は, h, v -平面での簡単な幾何学的考察から,

$$h_m = R/(2n+1) \quad \dots\dots\dots (8)$$

となることがわかる. このとき, 弁部の状態は, $2(i-1) + \alpha \leq \tau < 2i$ で,

$$h = h_m \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$v = 1 - (2i-1)(h_m/R) \cdots \cdots (10)$$

となり、一定となる。ただし、 $i=1, 2, \dots, n$ 。

弁部の圧力が、もし式(8)の値よりも常に低くなるような状態変化を考えると、 $\tau = \tau_c$ のときの弁部の状態は必ず h, v -平面の第1象限の内部にきてしまい、 $\tau \leq \tau_c$ では $v=0$ に到達できなくなる。したがって、上述の変化を実現するような弁閉鎖曲線が存在すれば、それは問題(A)の解である。

そのような $\beta(\tau)$ は弁部の (h, v) より次のようにして決定される。

まず、 $2(i-1)+\alpha \leq \tau < 2i$ での弁部の (h, v) が式(9)、(10)の値をとるためにはこの期間の $\beta(\tau)$ は、式(3)より、

$$\beta(\tau) = \frac{1 - (2i-1)(h_m/R)}{\sqrt{1+h_m}} \cdots \cdots (11)$$

でなければならない。ただし、 $i=1, \dots, n$ 。

次に $0 \leq \tau < \alpha$ での弁部の (h, v) は、

$$h/R + v = 1 \cdots \cdots (12)$$

を満たせばよく、 $\beta(\tau)$ は存在するが一意的ではない。そこで結果の見通しをよくするため、この期間の弁部の圧力を時間に比例して上昇するものとすれば、 $\beta(\tau)$ はその後の期間も含めて確定する。すなわち、 $0 \leq \tau < \alpha$ で弁部の h を、

$$h = h_m(\tau/\alpha) \cdots \cdots (13)$$

とすると、式(12)より弁部の v は、

$$v = 1 - (h_m/R)(\tau/\alpha) \cdots \cdots (14)$$

したがって、式(3)よりこの期間の $\beta(\tau)$ は、

図2 h, v -平面における各解の弁部の状態比較

$$\beta(\tau) = \frac{1 - (h_m/R)(\tau/\alpha)}{\sqrt{1+h_m(\tau/\alpha)}} \cdots \cdots (15)$$

残りの $2i \leq \tau < 2i+\alpha$ では、弁部の (h, v) は、

$$h = h_m \cdots \cdots (16)$$

$$v = 1 - \{(2i-1) + 2(\tau-2i)/\alpha\}(h_m/R) \cdots \cdots (17)$$

となり、この期間の $\beta(\tau)$ は式(3)より

$$\beta(\tau) = \frac{1 - \{(2i-1) + 2(\tau-2i)/\alpha\}(h_m/R)}{\sqrt{1+h_m}} \cdots \cdots (18)$$

ただし、 $i=1, \dots, n$ 。

例えば、計算に必要なパラメータが、

$$\tau_c = 4.3, \quad R = 2.5$$

と与えられたものとしよう。上述の最適解に対応する h, v -平面での弁部の状態変化は図2の一点鎖線のようになり、弁閉鎖曲線は図3の一点鎖線のようになる。両図には比較のため、同一パラメータに対する直線閉鎖の解を実線で、また後述する Streeter の問題の解を破線で示してある。

式(7)、(8)より問題(A)に対する h_m と τ_c の関係を示すと図4の一点鎖線のようになる。同図には、比較のため Quick の求めた直線閉鎖の解⁽⁴⁾および後述の Streeter の問題の解も併記した。同図の斜線部はいかなる弁閉鎖を行っても実現不可能な領域を表し、

図3 弁閉鎖曲線の比較 ($\tau_c = 4.3, R = 2.5$)

図4 各弁閉鎖に対する弁閉鎖時間と圧力変化の最大値の関係

境界線の丸印は最適閉鎖とならないことを表す。

最適閉鎖が可能であるためには

$$\tau_c \geq 2 \quad \dots\dots\dots (19)$$

が必要であるが、図4より τ_c が2に近いほど、また R が大きいほど最適閉鎖の効果が大きくなる。直線閉鎖のうち、 $R=2$ 付近の弁閉鎖は最適閉鎖に最も近くなる。図4において、

$$\tau_c = 2n \quad \dots\dots\dots (20)$$

の場合は、特別な注意が必要である。この解は、 τ_c と h_m が同時に極小となる点で最適解の中でも最も望ましい解である。しかし、このときの弁閉鎖曲線は式(15)、(18)より明らかのように一部に不連続を含み、 τ_c がわずかに $2n$ より小さくなると圧力変化の最大値は左側の区間の h_m に飛躍する。すなわち、最適閉鎖の h_m は τ_c に関し、 $\tau_c=2n$ で片側に不安定である。したがってこのような限界の閉鎖曲線は実用上さけるべきである。

3・3 問題(B)の解 以上の問題とは逆に、圧力変化の最大値の上限が与えられたとき、弁閉鎖時間が最小となるような弁閉鎖曲線について述べよう。

図4に示した問題(A)の解より、 h_m の上限 h_m^* が

$$R/(2n+1) \leq h_m^* < R/(2n-1) \quad \dots\dots\dots (21)$$

の範囲に与えられたとき、 τ_c の最小値は

$$\tau_c = 2n \quad \dots\dots\dots (22)$$

となることがわかる。ただし、 $n=1, 2, \dots$ 。しかし、この場合 h_m は上述のように不安定となるので、 τ_c には余裕を見込むべきで、式(22)の値よりやや大きくとる必要がある。その場合の弁閉鎖曲線は、前に示した式(11)、(15)、(18)を用いればよく、したがって与えられた上記の h_m^* に対し、実際に生じる h_m は式(8)で表される。式(21)と比較すると、 h_m にはなお余裕があるが、この範囲で h_m を h_m^* に近づけても τ_c の短縮にはつながらない。

以上より問題(B)の解を求めるには、 τ_c を式(22)より若干大きな値にとり、その後は問題(A)の解を利用すればよい。

3・4 Streeterの問題 Streeterは図1のモデルで、系内の圧力変化に、

$$0 \leq h \leq h_m \quad \dots\dots\dots (23)$$

という条件が与えられたとき、弁の閉鎖時間が最小となるような弁閉鎖曲線の求め方を示し、

$$\tau_c = 2 + (R/h_m) \quad \dots\dots\dots (24)$$

という結果を導いた⁽¹⁾。解は弁閉鎖の完了と同時に系内の過渡現象が消失し、流れは定常になるという著しい特徴をもち、水柱分離現象や管路の振動を防止する上できわめて優れた性質をもっている。しかし、

Streeterの提出した問題は、前述の問題(A)の拡張として考えると、式(24)と異なる結果が得られる。以下にこれを示そう。

系内の圧力変化に、

$$h \geq 0 \quad \dots\dots\dots (25)$$

という条件を加え、弁閉鎖時間が式(7)のように与えられたとき、 h_m を最小とする弁閉鎖曲線を求めよう。Streeterの考えに従い、 h, v -平面において、 $\tau = \tau_c$ での弁部の状態を、

$$h = 0 \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$v = 0 \quad \dots\dots\dots (27)$$

とし、さらに $2 \leq \tau < 2n$ での弁部の圧力が、

$$h = h_m \text{ (一定)}$$

となる変化を考えると、問題(A)と同様の考え方から h_m の最小値として、

$$h_m = R/(2n) \quad \dots\dots\dots (28)$$

が得られる。

これを実現する弁閉鎖曲線は、前と同様 $0 \leq \tau < \alpha$ で弁部の圧力が時間に比例して上昇するものとすれば、 h_m を式(28)の値に変更するだけで、問題(A)の解の式表示がほとんどそのまま成立する。すなわち、 $0 \leq \tau < \alpha$ で式(13)～(15)が成り立ち、 $2(i-1) + \alpha \leq \tau < 2i$ で式(9)～(11)が成り立つ。ただし、 $i=1, \dots, n$ 。さらに $2i \leq \tau < 2i + \alpha$ では式(16)～(18)が成り立つ。ただし、 $i=1, \dots, (n-1)$ 。最後に $2n \leq \tau < 2n + \alpha$ では、式(26)、(27)の条件より弁部の状態を、

$$h = h_m \{1 - (\tau - 2n)/\alpha\} \quad \dots\dots\dots (29)$$

$$v = \{1 - (\tau - 2n)/\alpha\} (h_m/R) \quad \dots\dots\dots (30)$$

とする必要があり、その結果 $\beta(\tau)$ は式(3)より次のようになる。

$$\beta(\tau) = \frac{\{1 - (\tau - 2n)/\alpha\} (h_m/R)}{\sqrt{1 + h_m \{1 - (\tau - 2n)/\alpha\}}} \quad \dots\dots\dots (31)$$

図2～4の破線はこのようにして求めた解である。

図4にみるとおり、Streeterの問題の解は、ここで考察した問題(A)、(B)より h_m が同一の τ_c に対してやや大きくなるが、前述のように弁閉鎖の完了と同時に系内は定常状態になるという優れた性質をもっている。式(28)はそのような性質を有し、しかもStreeterの得た式(24)よりも最適解として優れている。

4. 数値計算による確認

4・1 計算方法 以上の各種最適問題の解 $U = (h, v)$ の特徴を明らかにするため、差分法による数値解析を行った。式(1)は今の場合、特性曲線法により厳密な数値解を求めることができるが、ここではよ

り複雑な系への拡張が容易な二次精度の 2 step Lax-Wendroff 法を用いた⁽⁵⁾.

空間, 時間の刻みを $\Delta\xi, \Delta\tau$ とするとき, 2 step Lax-Wendroff 法による式(1)の差分式は次のようになる.

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \lambda A (U_{i+1/2}^{n+1/2} - U_{i-1/2}^{n+1/2}) \quad \dots\dots\dots (32)$$

ここに中間値 $U_{i+1/2}^{n+1/2}$ は次式より求める.

$$U_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2}(U_{i+1}^n + U_i^n) - \frac{1}{2}\lambda A (U_{i+1}^n - U_i^n) \quad \dots\dots\dots (33)$$

(a) 圧力分布

(b) 流速分布

図 5 直線閉鎖による水撃現象 ($\tau_c=4.3, R=2.5$)

(a) 圧力分布

(b) 流速分布

図 6 最適閉鎖による水撃現象 ($\tau_c=4.3, R=2.5$)

(a) 圧力分布

(b) 流速分布

図 7 Streeter の弁操作による水撃現象 ($\tau_c=4.3, R=2.5$)

ただし, $\lambda \equiv \Delta\tau/\Delta\xi \leq 1$. 境界条件は特性曲線法により離散化する.

以上より U_i^n から U_i^{n+1} がすべての i について求まる.

4.2 計算例 図2, 3に示した具体例, すなわち $\tau_c=4.3$, $R=2.5$ の場合について, 直線閉鎖の解, 最適問題(A)の解および Streeter の問題の解をそれぞれ図5~7に示す. ただし, 計算条件は $\Delta\xi=0.04$, $\Delta\tau=0.04$ とした.

これらの計算結果から, 同一の弁閉鎖時間であっても, 系内の流れは弁閉鎖曲線によって著しく異なることがわかる. 最適閉鎖は圧力上昇の抑制に最も効果があるが, 弁部圧力の最大値の持続時間が増大する.

5. 結 論

無損失の単一管路系について, 弁閉鎖時に生じる水撃現象の最適問題の解を図式解法により求めた. その結果, 最適な弁の閉鎖曲線, 圧力変化の最大値と弁閉鎖時間の関係および系内の状態変化が明らかとなり,

最適問題の基本的な性格がはあくできた. さらに, Streeter の問題について再検討し, 従来よりもより最適な解が求められた.

終わりに, 日頃ご指導を賜っている早稲田大学 田島清瀬教授に深く感謝致します. 又, 本テーマの実際の状況について, (株)荏原製作所 中村勝次氏よりご教示頂きました. さらに本研究は昭和55年度早稲田大学特定課題の一部として行われました. 記して謝意にかえさせていただきます.

文 献

- (1) Streeter, V.L., *J. Hyd. Div. Proc. ASCE*, 82-HY 2 (1963), 39.
- (2) Wylie, E.B. and Streeter, V.L., *Fluid Transients*, (1978), 156, McGraw-Hill.
- (3) Parmakian, J., *Waterhammer Analysis*, (1963), 45, Dover.
- (4) Quick, R.S., *Trans. ASME*, 49-5 a (1927), 524.
- (5) Roache, P.J., *Computational Fluid Dynamics*, (1976), 250, Hermosa Pub.