層流境界層方程式の迅速近似解法*

飯 田 誠 一**

A Fast Approximate Solution of the Laminar Boundary
Layer Equations

by Sei-ichi IIDA

A new approximate method rapidly solving the integral forms of the steady laminar boundary layer equations is presented. This method is based on the specifications of mutual relationships between integral quantities of the boundary layer so that they satisfy the exact solutions at the stagnation point, the flat plate condition and the separation point without any assumptions of boundary layer velocity profiles. A one-dimensional box scheme is used for computations.

In view of the results obtained from a wide variety of applications to boundary layer flows which start from either the stagnation point or the flat plate condition, the present method may be judged sufficient to yield accurate solutions.

Key Words: Fluid Mechanics, Boundary Layer, Steady Laminar Flow, Integral Method, Approximate Solution

1. ま え が き

計算機の発達した今日、層流境界層の計算は、外縁に沿う速度分布を与えるだけで境界層方程式を直接数値的に積分し、はく離点までの解を高い精度で求める状態にある。しかし、このような数値的方法は、境界層方程式の積分形式を近似的に解く方法に比べて複雑であり、計算にも多くの時間を要する。実用の面から、この部分だけでも計算労力を節減したいという要望は多くあり、たとえば、非定常層流境界層の計算に積分形式の利用がみられる^{(1)~(4)}。

これまでにも、層流境界層の近似計算には Tani の方法⁽⁵⁾として知られる 1 パラメータの積分法がしばしば使われてきた。この方法は、まず境界層内速度分布を四次の多項式で近似し、境界層の諸積分量を壁面摩擦応力に比例するパラメータ a の関数として表す。次に外側の速度 $U(x)$ (x は境界層開始位置から壁面に沿って測られた距離) に対してエネルギー積分方程式から運動量厚さ $\delta_2(x)$ を近似的に求め、最後に運動量積分方程式を満たすように a を x の関数として定め

るものである。この場合、 $a(x)$ に関連して定められる境界層内の速度分布は、もともと a を諸積分量に関係づけるための一手段として導入したものであるから、実際の境界層速度分布を見込めるほど十分なものではない。実用的には、このような近似解法の結果は与えられた $U(x)$ に対してはく離が起こるかどうかが、起こるとすればどの位置で起こるか、そして壁面摩擦応力や排除厚さの分布がどのようになるかを予測できれば十分である。この点、 a をパラメータとする方法は諸積分量を求めるのに若干遠回りしている感がある。

そこで、ここに提唱するのは特定の速度分布を仮定することなく (a のようなパラメータを用いず)、積分量相互の関係を、①よどみ点流れ、②速度こう配のない平板流れ、および③はく離点流れについて知られている厳密解を局所的に満たすように簡単な関数で近似し、二つの境界層積分方程式の解として直接諸積分量を求めようとするものである。この方法は、はじめ、Tani, Yu⁽⁶⁾ によって静止状態から動きはじめる平板の境界層計算に用いられ、その後、知名・小橋⁽⁷⁾ によって定常境界層の近似解法に用いられ、いずれも十分に正確な結果が得られているけれども、ただ、はく離点付近での定式化については、なお検討の余地が残されているように思われる。

* 昭和58年9月2日 第921回講演会において講演、原稿受付昭和57年12月15日。

** 正員、北海道大学工学部 (〒060 札幌市北区北13条西8丁目)。

本論文では、はく離点位置での数値解が知られている種々の流れの中から基本的に重要と思われる Howarth 減速流⁽⁸⁾ $[U(x)=1-x]$ を代表に選び、はく離点より上流側での数値解の挙動を考慮して積分量相互の関係を設定している。結果は、よどみ点の状態からはじまる5種の流れおよび平板流れの状態からはじまる4種の流れについて、実用上十分な精度で近似解の得られることが明らかとなった。

一方、この種の近似計算法は、使用に便利で能率的であることが望まれる。この点 Tani の論文⁽⁵⁾ に示された計算法では、はく離点に接近するにつれ解の収束性が低下するという傾向があるので、本論文ではこれに代わる迅速計算法を提案した。それは、求めようとする諸積分量がすべて x のみの関数になることを考慮して、二つの積分方程式に Keller の Box 法^{(9)~(11)} を一次元流れとして適用したものであり、その結果きわめて良好な収束性が得られている。

2. 基礎方程式と解法

基礎となる方程式は定常流に関する運動量積分およびエネルギー積分方程式であって、それぞれ

$$\frac{1}{U^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w = \frac{(2\delta_2 + \delta_1)}{U} \frac{dU}{dx} + \frac{d\delta_2}{dx} \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{d}{dx} (U^3 \delta_3) = 2 \int_0^\infty \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy \dots\dots\dots (2)$$

のように与えられる⁽¹²⁾。ただし

$$\delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy$$

$$\delta_2 = \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy$$

$$\delta_3 = \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u^2}{U^2} \right) dy$$

記号は l^* を代表長さ、 V_r^* を代表速度として

$$x = x^*/l^*, y = y^*\sqrt{Re}/l^*, U = U^*/V_r^*,$$

$$u = u^*/V_r^*, \delta_k = \delta_k^*\sqrt{Re}/l^* (k=1, 2, 3),$$

$$Re = l^* V_r^*/\nu^* \quad (*印は有次元量)$$

のように無次元化してある。ここに、 x^*, y^* は壁面に沿う方向およびこれに垂直方向の距離、 U^*, u^* は主流および境界層内の速度、 δ_k^* は境界層の排除厚さ ($k=1$)、運動量厚さ ($k=2$) およびエネルギー厚さ ($k=3$)、 ν^* は動粘性係数、 Re はレイノルズ数である。添字 w は壁面 ($y^*=0$) での値を表す。

いま、境界層に関する諸特性量を

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{\delta_1}{\delta_2}, G = \frac{\delta_3}{\delta_2} \\ Q &= \frac{4\delta_3}{U^2} \int_0^\infty \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy \\ P &= \frac{2\delta_2}{U} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

と表すことにして、式(1)および式(2)を書きかえれば

$$U \frac{d\delta_2^2}{dx} + 2(2+H)\delta_2^2 \frac{dU}{dx} = P \dots\dots\dots (4)$$

$$U\delta_2^2 \frac{dG^2}{dP} \frac{dP}{dx} + G^2 P - 2G^2 \delta_2^2 (H-1) \frac{dU}{dx} = Q \dots\dots\dots (5)$$

となる。式(3)から明らかなように H, G および Q は速度分布 u を介して P の関数とみなせることから、式(4)、(5)は δ_2^2 と P に関する連立常微分方程式を構成する。これは以下に述べる Box 法^{(9)~(11)} の応用によって容易に解かれる。記号の簡素化をはかるため

$$\left. \begin{aligned} \Theta &= \delta_2^2, \Gamma = G^2 \\ V &= \frac{dU}{dx}, \Gamma_P = \frac{d\Gamma}{dP} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

とおく。なお、 $H(P), G(P)$ および $Q(P)$ の具体的な表示式は3章で与えることにして、ここでは方程式系(4)、(5)の迅速解法について述べる。

式(4)および(5)を差分近似するため、 x 軸上の n 番目の微小区間 h_n を考え、両式の各項を h_n の中央部で次のような平均量と差分量でおきかえる。

$$\phi_{n-1/2} = \frac{1}{2}(\phi_n + \phi_{n-1}) \dots\dots\dots (7)$$

$$\left(\frac{d\phi}{dx} \right)_{n-1/2} = \frac{1}{h_n}(\phi_n - \phi_{n-1}) \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 ϕ は $U, P, \Theta, V\Theta(2+H), U\Theta\Gamma_P$ などである。さらに

$$P_n = P_n^i + \delta P, \Theta_n = \Theta_n^i + \delta \Theta \dots\dots\dots (9)$$

とおき、これらを式(4)、(5)に代入して、 $\delta\Theta, \delta P$ に関する二次以上の項を省略すれば

$$\left. \begin{aligned} A_{11}\delta\Theta + A_{12}\delta P &= \Phi \\ A_{21}\delta\Theta + A_{22}\delta P &= \Psi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

の形に整理できる。このとき、係数および右辺は

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= U_n + U_{n-1} + 2h_n V_n (H_n^i + 2) \\ A_{12} &= -h_n \\ A_{21} &= U_n \Gamma_{Pn}^i (P_n^i - P_{n-1}) \\ &\quad - 2h_n V_n \Gamma_n^i (H_n^i - 1) \\ A_{22} &= U_n \Gamma_{Pn}^i \Theta_n^i + U_{n-1} \Gamma_{Pn-1} \Theta_{n-1} + h_n \Gamma_n^i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

$$\left. \begin{aligned} R_{n-1} &= \{U_n + U_{n-1} - 2h_n V_{n-1} (H_{n-1} + 2)\} \\ &\times \Theta_{n-1} + h_n P_{n-1} \\ S_{n-1} &= \{U_{n-1} \Gamma_{Pn-1} \Theta_{n-1} - h_n \Gamma_{n-1}\} P_{n-1} \\ &+ h_n \{Q_{n-1} + 2V_{n-1} \Gamma_{n-1} \Theta_{n-1} \\ &\times (H_{n-1} - 1)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= R_{n-1} - (A_{11} \Theta_n^i + A_{12} P_n^i) \\ \Psi &= S_{n-1} - (A_{21} \Theta_n^i + A_{22} P_n^i) \\ &+ U_n \Gamma_{Pn}^i P_n^i \Theta_n^i + h_n Q_n^i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

として順に算定される。ただし、肩添字 i は i 回目の逐次近似解を表す。なお、添字 $n-1$ の付してある諸量は 1 きざみ上流側で十分収束した解から算定され、計算開始時には流入条件を整える（たとえば、よどみ点流れから出発する場合には Hiemenz 解を、平板流れからの場合には Blasius 解を用いる）ことによって与えられる。また、節点 $x = x_n$ における最初 ($i=0$) の近似解には $x = x_{n-1}$ での解をあてる。

表 1 基本データ

$H_{sp} = 3.82240$	$H_{fl} = 2.59110$	$H_{st} = 2.21623$
$G_{sp} = 1.52698$	$G_{fl} = 1.57258$	$G_{st} = 1.62575$
$Q_{sp} = 0.960492$	$Q_{fl} = 1.09072$	$Q_{st} = 1.35533$
$P_{sp} = 0.0$	$P_{fl} = 0.441048$	$P_{st} = 0.720678$

図 1 H - P 近似曲線

いま,

$$\left. \begin{aligned} D_{\Theta n}^i &= \begin{vmatrix} \Phi & A_{12} \\ \Psi & A_{22} \end{vmatrix}, D_{Pn}^i = \begin{vmatrix} A_{11} & \Phi \\ A_{21} & \Psi \end{vmatrix} \\ D_n^i &= \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

とおけば

$$\delta \Theta = \frac{D_{\Theta n}^i}{D_n^i}, \delta P = \frac{D_{Pn}^i}{D_n^i} \dots\dots\dots (15)$$

としてこの回の逐次修正量が求められ、次の逐次計算はこれらを式(9)に戻すことによって継続される。一連の計算は任意のきざみ幅 h_n [なお、標準値; $h_n = x_{sp}/(200 \sim 300)$] について安定して行うことができ、各節点で行う逐次計算の収束性はきわめて高い。具体的には表 3 に示した 9 種の $U(x)$ について、はく離点にかなり接近するまで (P がその出発値からほぼ半減する位置まで) は 3 回の繰返して当初予定した

$$|\delta P| < 10^{-5}, |\delta \Theta| < 10^{-7} \dots\dots\dots (16)$$

という収束判定条件を満足するほどである。また、 P が急激に 0 に低下するはく離点の近くでも (図 3 参照)、式(16)の条件を満たす繰返し回数は 12 回をこえるものがなく、近似解法としては申し分ない迅速な計算法といえよう。

なお、 P が極端に 0 (たとえば $|P| \leq 0.001$) に接近す

図 2 G - P および Q - P 近似曲線

れば、やはり解を求めることができなくなるが、それは式(15)の分母 D_H^* が 0 となるからではなくて $P \rightarrow 0$ の近傍で修正量 $|\delta P|$ のほうが修正される量 P より大きくなることに起因する。したがって $P=0$ の解は、はく離直前でのいくつかの節点における値から外そう法によって求める。

3. 積分量 H, G, Q の P による表示

一般に境界層特性を表す積分量 H, G, Q および P は境界層内速度分布を特徴づけるパラメータを介して互いに関係づけることができる。しかし、はじめに述べたように、実用上の観点からするとこれは若干遠回りの感がある。いま、 H, G, Q を直接 P の関数として与えることができれば、速度分布をどのような形で表現すべきかという問題からも解放され、かつ、近似計算自体を能率的に行うことができる。

3.1 基本となるデータ 本論文の基本的な考え方は、よどみ点流れ、平板流れおよびはく離点流れでの厳密解を満たし、しかもできるだけ簡単な式で $H(P), G(P), Q(P)$ を与えることにある。よどみ点流れと平板流れの厳密解については、Falkner-Skan の微分方程式⁽¹²⁾：

$$\left. \begin{aligned} f''' + ff'' + \beta(1 - f'^2) &= 0 \\ f(0) = f'(0) = 0, f'(\infty) &= 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

の解として知られているそれぞれ Hiemenz 解 ($\beta=1$) および Blasius 解 ($\beta=0$) をあてる。一方、はく離点でのそれについては、これまでに知られている種々の流れ (たとえば表 3 参照) の中から基本的に重要と思われる Howarth 減速流 [$U(x)=1-x$] を代表として選ぶことにする。表 1 に、はく離点、平板流れおよびよどみ点位置 (それぞれ添字 sp, fl および st を付して

区別する) における H, G, Q および P の値を示す。

なお、Howarth 減速流については、これまで Howarth⁽⁸⁾ および Leigh⁽¹³⁾ による解が知られているものの、これらから Hiemenz 解や Blasius 解の精度に見合う程度にはく離点位置での H, G, Q を決定するには不安があったので、本論文では Keller の Box 法⁽⁹⁾⁻⁽¹¹⁾ を用いて Howarth 減速流を $0 \leq P \leq P_{fl}$ の範囲で計算しなおした。この再計算に関連して明らかになったことは、はく離点位置ならびにこの位置での運動量厚さがそれぞれ $x_{sp}=0.1197765$ および $\delta_{2sp}=0.291434$ となること、さらに、方程式系(4)、(5)がはく離点で解が求められなくなる条件：

$$\left(\frac{dH}{dP} \right)_{sp} = \left[2\delta_{2sp}^2 \left(\frac{dU}{dx} \right)_{sp} \right]^{-1} \dots\dots\dots (18)$$

から H が P に対して

$$(dH/dP)_{sp} = -5.887 \dots\dots\dots (19)$$

なるこう配をもつことである。この条件、式(19)は新しい知見である。

図 1 および図 2 にはそれぞれ $H(P)$ および $G(P)$ と $Q(P)$ の表 1 に示した 3 点での値を白円で、また、Howarth 減速流の数値解 (区間 $0 \leq P \leq P_{fl}$) を実線で示してある。さらに、図 1 には式(19)で与えられる H のこう配を記入してある。

3.2 P_{sp}, P_{fl} および P_{st} における数値解を満たす曲線のあてはめ 本解法の基本方針がごく簡単な式でこれら 3 点での解を満たすようにすること、にあるので、この趣旨にかなういくつかの関係式を用意してみた。これらを表 2 に示す。図 1 および図 2 には、表 2 に示した各種の近似曲線を P の全区間 ($0 \leq P \leq P_{st}$) にわたって記入してある。

これらのうち H_1, G_1 および Q_1 は、もし Howarth

表 2 3 点での数値解を満たす各種近似曲線

Curves of approximation	Coefficients			$\left(\frac{dH}{dP}\right)_{sp}$
H - P curves	A_H	B_H	C_H	
$H_1 = A_H + B_H P + C_H P^2$	3.82240	-3.67986	2.01361	-3.680
$H_2 = A_H + B_H P + C_H (1 - P)^6$	3.12833	-1.26608	0.694066	-5.430
$H_3 = A_H + B_H P + C_H (1 - P)^7$	3.15310	-1.30011	0.669298	-5.985
G - P curves	A_G	B_G	C_G	
$G_1 = A_G + B_G P + C_G P^2$	1.52698	0.0502975	0.120378	
$G_2 = A_G + B_G P^{3/2} + C_G P^2$	1.52698	0.134984	0.0311644	
Q - P curves	A_Q	B_Q	C_Q	
$Q_1 = A_Q + B_Q P^2 + C_Q P^3$	0.960492	0.526348	0.324510	
$Q_2 = A_Q + B_Q P^2 + C_Q P^4$	0.960492	0.615135	0.279334	

減速流の途中区間での数値解が知られていないとすれば普通に採用されると思われる最も簡単な近似曲線である。一見して H_1 の Howarth 数値解からの著しいずれがめだつこと、および Q_1 はほぼ満足できるにしても G_1 のほうは P の小さな領域で幾分ずれていることがわかる。3・3節でも触れるが、 $(dG/dP)_{sp}$ の値(数値解では0)は、 P - x 曲線がはく離点近くで急激に0へ低下するという特徴的な挙動に関係するので重要であり、したがって G_1 の第2項 $B_G P$ は、 $B_G P^m$ ($m > 1$) のように1より大きなべき指数をもつべきもののように思われる。

H_2 , G_2 および Q_2 は簡単なべき指数を用いて表現できる近似式の中から全体として見た感じが Howarth 数値解に最も近いと思われるものである。とくに Q_2 は図2のプロットからは差異が識別できないほど数値解によく一致している。

H_3 は $(dH/dP)_{sp}$ が式(19)のこう配に最も近くなるようにべき指数を整数の中から選んだときの式であり、区間 $0 \leq P \leq P_{fl}$ の中央部での数値解からのずれがややめだつ。参考までに $(dH_j/dP)_{sp}$ ($j=1, 2, 3$) の値を表2の右欄に示してある。

結局、これら H , G および Q に関する近似式のうち、Howarth 解から著しくずれるものはあまり適当

でないと想像できるが、これに完全に一致するものも果たして他の外縁速度 $U(x)$ に対して適当といえるかどうか確証があるわけではないので、本解法における曲線のあてはめは H_2 , G_2 および Q_2 のプロットに見られる程度の近似にとどめることにした。

3・3 近似曲線 H , G , Q の Howarth 減速流への適用 これら H , G , Q の近似曲線をもとの Howarth 流れに適用した場合の結果(方程式系(4), (5)の解; δ_2 および P)を以下に示す。使用した近似曲線の組み合わせは次の三とおりである。

- (a) H_1 , G_1 , Q_1
- (b) H_2 , G_2 , Q_2
- (c) H_3 , G_2 , Q_2

(a)はごく普通に考えられる最も簡単な組み合わせであり、(b)は Howarth 数値解に全体として最もよく類似させた近似曲線の組み合わせ、そして(c)は(a)における H_2 の代わりにはく離点位置で最も数値解に近いこう配をもつように H を選んだときのものである。図3にこれら三とおりの組み合わせに対する近似解 $P(x)$ の挙動をはく離点付近に限りて示してある。明らかに(b)の組み合わせが数値解に最も近いはく離位置を与え、しかもわずかに上流側でいち早く数値解に漸近することがわかる。(c)の組み合わせは、はく離位置をやや遅めに与えることと、上流側での解の漸近性は(b)に比べて劣る。これは図1において区間 $0 \leq P \leq P_{fl}$ の中央部で H_3 が数値解からずれることによる。(a)の組み合わせは、はく離位置こそやや上流側に与えているものの、 $P(x)$ の形状が数値解のそれとは大幅に異なっているのがめだつ。このほかにも、(b)の組み合わせに関連して、 G_2 の第2項 $B_G P^{3/2}$ のべき指数($3/2=6/4$)を $5/4$ および $7/4$ として係数を整えた場合も試みた。前者では $P(x)$ の急激な0への低下の度合が(a)と(b)の中位になり、漸近性は(b)よりやや劣る程度となった。しかし後者の場合には0への低下の度合こそやや強めになるもののはく離位置は大幅に

図3 はく離点付近における近似解の挙動

図4 Howarth 減速流に対する近似解と数値解の比較

上流側に移動し漸近性は著しく劣化する結果となった。いずれの場合も(b)の組み合わせより良好な結果が得られなかったのでプロットその他は省略した。

結局、ここでは(b)の組み合わせを本近似解法の最終的な近似曲線として採用するのが適当と思われる。図4はこの組み合わせに対して得られた解 $P(x)$ を方程式系(4), (5)の一方の解である $\delta_2(x)$ とともに x の全域にわたって示したものであり、数値解も比較のために併せて記入してある。 P がはく離の直前でわずかにずれることを除いてよく一致していること、そして δ_2 はそれ以上に良好な一致を見せていることがわかる。

3.4 よどみ点からはじまる流れ場での検証 3.3節の結果はもとの Howarth 流れに対する適用結果であり、良好な類似が得られるのはある意味で当然といえるかもしれない。そこでこれとは別の、よどみ点からはじまる流れ場にも適用してその精度を検証しておく必要がある。ここでは Terrill⁽¹⁴⁾ によって詳細な数値解が提供されている円柱まわりの流れ [$U(x) = \sin x$] をとりあげ、これと H_2, G_2, Q_2 の組み合わせをもと

図5 円柱周辺の流れに対する解

にした本近似解法の結果を比較する。Terrill の結果と対応をはかるため、解 $P(x)$ の代わりに次式：

$$\tau_w = \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w = \frac{P}{2\delta_2} U \quad \dots\dots\dots (20)$$

から τ_w を求め、 δ_2 とともに図5に示す。Howarth 減速流の場合(図4)にもまして近似解が数値解によく一致していることがわかる。

4. 種々のはく離する流れ場への適用

以上のように H_2, G_2, Q_2 の組み合わせが Howarth 減速流および円柱まわりの流れに対してきわめて良い近似解を与えることがわかったので、これをすでに数値解析によつてはく離点位置の知られている表3に示すような各種の流れに適用してみた。表3に掲げた9種の流れのうち、No.1~4は平板流れから出発するものであり、No.5~9はよどみ点流れから出発するものである。方程式系(4), (5)の解、 P および δ_2 を図6 (No.1~4) および図7 (No.5~9) にわけて示す。図6の $U(x)$ はすべて $1-x^m$ の形であるから $m(=1, 2, 4, 8)$ の値によって解が系統的に変化する様子がうかがわれる。図6と図7から各種の $U(x)$ について $P \rightarrow +0$ となる x 位置 x_{sp} を求めると表3に併せて記載したとおりの結果が得られる。これを数値解析による結果 x_{spN} と比較すると

$$\left(\frac{x_{sp}}{x_{spN}} - 1 \right) \times 100$$

の値で、No.4, 5, 7のほかは1%以下というきわめて良い予測値を与えること、またNo.4, 5, 7についても2%以下にとどまることがわかる。

はく離の予知は層流境界層の計算で最も重要視される項目の一つであり、本近似解法はこの点でも十分目

表3 種々の $U(x)$ に対するはく離点位置

No.	$U(x)$	Numerical solutions		Approximate solutions	$\frac{x_{sp}}{x_{spN}} - 1$
		x_{spN}	Author	x_{sp}	
1	$1-x$	0.120	Howarth ⁽⁸⁾	0.1195	-0.0042
		0.1198	Leigh ⁽¹³⁾		-0.0025
2	$1-x^2$	0.271	Tani ⁽¹⁵⁾	0.2714	0.0015
3	$1-x^4$	0.462	"	0.4653	0.0071
4	$1-x^8$	0.640	"	0.6500	0.0156
5	$x-x^3-0.12156x^5$	0.6245	Curle ⁽¹⁶⁾	0.6354	0.0175
6	$x-x^3$	0.6551	"	0.6578	0.0041
7	$x-x^3+0.07885x^5$	0.6647	"	0.6759	0.0168
8	$\sin x$	1.8230	Terrill ⁽¹⁴⁾	1.8245	0.0008
9	$x \exp(-x)$	1.3125	Hayasi ⁽¹⁷⁾ et al.	1.3108	-0.0013

図 6 平板流れからはじまる種々の近似解

的を達しているように思われる。

5. ま と め

定常層流境界層方程式の近似解を迅速に求める新しい試みを提案した。検討事項および結果を要約すると次のようになる。

(1) 運動量積分およびエネルギー積分方程式に含まれる積分量 H , G , Q を直接 P で表す方法をとっているため、境界層内の速度分布をどのように仮定するかという問題から解放されて、能率的な計算ができる。

(2) $H(P)$, $G(P)$ および $Q(P)$ の関係式は、よどみ点流れ、平板流れおよびはく離点流れに関する数値解（それぞれ Himenz 解, Blasius 解および Howarth 解）を満たすように、簡単な表示式で与える。

(3) 具体的には表 2 に示した H_2 , G_2 , Q_2 の表示式を用いるのがよく、基礎式である連立常微分方程式の二つの解, $P(x)$ および $\delta_2(x)$, は平板流れおよびよどみ点流れから出発する境界層の数値解と比較していずれの場合にもきわめて良い一致を示す。

(4) 基礎方程式の近似解法として一次元の Box 法を用いたきわめて収束性の良い方法を提示できた。

(5) 本近似解法を、すでにはく離点位置の知られている 9 種類の流れに適用した結果、表 3 に示すようになりに良い精度ではく離位置を予測できることが明らかとなった。

本研究を遂行するにあたり、谷 一郎 東京大学名誉教授にはかずかずのご指導、ご助言をいただきまし

図 7 よどみ点流れからはじまる場合の解

た。また、小橋安次郎 北海道大学教授には有益なご議論をいただきました。ここに謝意を表します。

なお、数値計算には北海道大学大型計算機センター HITAC-M 180/200 H を使用した。

文 献

- (1) Hayasi, N., *J. Phys. Soc. Jpn.*, 17-1 (1962), 203.
- (2) Miller, R. W. and Han, L. S., *Trans. ASME, J. Fluid Eng.*, 95 (1973), 237.
- (3) Fansler, K. S. and Danberg, J. E., *AIAA J.*, 15-2 (1977), 274.
- (4) 松下・ほか 2 名, 機論, 48-426, B (昭 57), 195.
- (5) Tani, I., *J. Aeronaut. Sci.*, 21-7 (1954), 487.
- (6) Tani, I. and Yu, N. J., (Eichelbrenner, E. A. ed.), *Recent Research on Unsteady Boundary Layers*, (1972), 886, Quebec.
- (7) 知名・小橋, 北海道大学工学部研究報告, 98 (昭 55), 31.
- (8) Howarth, L., *Proc. R. Soc., Ser. A*, 164 (1938), 547.
- (9) Keller, H. B. and Cebeci, T., *Proc. 2nd Int. Conf. Numer. Meth. Fluid Dyn.* (1971); *Lect. Notes in Phys.*, 8, 92.
- (10) Cebeci, T. and Smith, A. M. O., *Analysis of Turbulent Boundary Layers*, (1974), 265, Academic Press.
- (11) Keller, H. B., *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 10 (1978), 417.
- (12) Schlichting, H., *Boundary Layer Theory*, (7th ed.), (1979), 152, McGraw-Hill.
- (13) Leigh, D. C. F., *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, 51 (1955), 320.
- (14) Terrill, R. M., *Phil. Trans. Roy. Soc., Ser. A*, 253 (1960), 55.
- (15) Tani, I., *J. Phys. Soc. Jpn.*, 4-3 (1949), 149.
- (16) Curle, N., *The Laminar Boundary Layer Equations*, (1962), 35, Oxford Math. Monographs.
- (17) Hayasi, N., ほか 2 名, *Phys. Fluids*, 12, suppl. II (1969), 283.

討 論

〔質問〕 松下 通 紀〔京都大学工学部〕

運動量積分式とエネルギー積分式からなる基礎式をつぎのような形で表したとき、

$$a_{11}d\delta + a_{12}d\beta = b_{11}dU + b_{12}dx$$

$$a_{21}d\delta + a_{22}d\beta = b_{21}dU + b_{22}dx$$

ただし δ は境界層厚さ、 β は形状パラメータ（貴論文では P ）、 δ は離点の近くでこの方程式系の解が求まらなくなるのは左辺の係数の行列式が 0 になるためであることが知られている（付 1）。

貴論文では「方程式系（4）、（5）がはく離点で解が求められなくなる条件」として式（18）を示しているが、この式は上記の条件と同じ内容を表すものなのか、この点についてご説明いただきたい。

〔回答〕 ご指摘の係数行列式がはく離点で 0 となるのは、本論文の式（14）における

$$D_h^i = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}$$

が 0 になるのと同様である。この場合、行列式の値を Box 法で差分化して求めると

$$D_h^i \cong 2\Delta x \Gamma_h^i U_n$$

となり、きざみ間隔 Δx を小さくすれば解が求めがたくなるのはたしかである。しかし、有限きざみ幅で計算しているかぎりにはく離点直前の近似解までは計算することができる。

一方、原方程式系（4）、（5）のはく離点付近における挙動を調べるため

$$P = P_1 \Delta P, H = H_1 + H_p \Delta P, \Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_p \Delta P$$

$$Q = Q_1 + Q_p \Delta P, \theta = \theta_1 + \Delta \theta$$

$$(\text{ただし}, P=0, \Gamma_p=0, Q_p=0)$$

と整理すると

$$\left(\frac{1}{2} - V\theta_1 H_p \right) \Delta P - \left\{ \frac{U_1 + U}{2\Delta x} + V(H_1 + 2) \right\} \Delta \theta = (V_1 + V)(H_1 + 2)\theta_1 - P_1$$

（付 1）Moses, ほか, AIAA J., 16-1 (1978), 61.

$$\left. \begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} - V\theta_1 H_p \right) \Delta P - V(H_1 - 1) \Delta \theta \\ & = \frac{Q_1}{\Gamma_1} - P_1 + (V_1 + V)(H_1 - 1)\theta_1 \end{aligned} \right\}$$

となり、この連立方程式は

$$H_p = \frac{1}{2\theta_1 V} \quad \text{つまり} \quad \frac{dH}{dP} = \frac{1}{2\delta_2^2 \frac{dU}{dx}}$$

で解をもたないことになる。結局、式（18）はご指摘の条件と周知内容を表す。

〔質問〕 持 丸 義 弘〔東京工業大学〕

（1）式（4）、（5）において明示的に $G = G(P)$, $H = H(P)$, $Q = Q(P)$ と関数形で指示した場合には、特に Box 法によらなくとも求積できるのではないかと、例えばルンゲ・クッタ法のような数値積分法でも支障がないように見えるがどうか。

（2）計算例において No. 1, 8 以外の場合、数値解による G, H, Q は G_2, H_2, Q_2 とどの程度一致しているのか。

〔回答〕 （1）式（4）、（5）の方程式系ははく離点の特異点になっているため、ルンゲ・クッタ法のような数値積分法は、はく離点の近くで破綻する。それは P を定める方程式（5）において、 $P \rightarrow 0$ のとき、 dP/dx の係数が 0（すなわち $dG/dP \rightarrow 0$ ）となることから推察できる。

（2）表 3 に掲げた各種の数値解は、No. 8 を除いてはく離点位置のみ、あるいはその付近での解（No. 1）しか示されていない。したがって、ご質問にあるように、No. 1, 8 以外の場合の数値解と本近似解とを比較するには、No. 1 で行ったと同様、各場合について数値解を x の全領域にわたって再計算せざるを得ない。それらは近いうちに別の目的のために実行する予定であるが、現在は直接比較できない。