鉛直加振された水平液体層の自由表面に生ずる波の発生限界*

長谷川 英治**, 梅原 俊志***, 渥美 基広****

The Critical Condition for the Onset
of Waves on the Free Surface of a Horizontal Liquid Layer
under a Vertical Oscillation

by Eiji HASEGAWA, Toshiyuki UMEHARA and Motohiro ATSUMI

Waves on a free surface of a viscous liquid layer in horizontally infinite extent under a vertically imposed oscillation are investigated theoretically by a linear theory. They are governed by a kind of the ordinary differential equation with periodic coefficients. In the case of the subharmonic response, the stability boundary, which separates the unstable region from the stable one, are obtained numerically for a given wave number of the disturbance. The curves, which envelopes these stability boundaries for the various wave numbers, i. e. the neutral stability curves, are obtained in the frequency-amplitude space. It is found from these neutral stability curves that there is a minimum value in the critical amplitude, above which the disturbance first occurs. While, the neutral stability curves are obtained experimentally by using Glycerine as a viscous liquid. The experimental critical amplitudes are shown to be in good agreement with the theoretical ones.

Key Words: Fluid Mechanics, Viscous Liquid Layer, Free Surface, Subharmonic Resonance, Stability Curve

1. はじめに

水平な壁の上に広がる自由表面をもつ液体層に壁を振動させることによって波動運動を生じさせる方法には二とおりある。一つは壁を鉛直方向に振動させるものであり、他は壁を水平方向に振動させるものである。これら二つの方法についての研究は、水面に波を作るための基本問題として大変重要である。

さて、Benjamin と Ursell は前者の問題について容器に入れられた完全流体の液体層の場合に、解析を行い⁽¹⁾、運動は Mathieu の方程式によって支配されることを示した。これより、波の発生機構はパラメトリック共鳴であると結論した。この考えに従って、底が弾性板である場合の影響についても解析が行われている⁽²⁾。これらの解析の特徴は系の固有振動数の倍の振動数で加振すれば、たとえどんなに小さな加振振幅であっても、系は必ず不安定となることであつた。しかしながら実際には、系の固有振動数の倍の振動数で、しかもある程度以上の大きさの振幅をもつ加振力を加

えなければ波は発達しないはずである。この事実との相違は流体の粘性を無視して解析を行ったためである。

一方、壁を水平に振動させる場合の后者については、Kelly が完全流体の場合に解析を行い、やはり、Mathieu の方程式に帰着されることを示した⁽³⁾。その後、粘性流体層の場合について Yih⁽⁴⁾が発生する波の波長が液体層の深さに比べて長いという長波長近似を用い、時間について周期的係数をもつ方程式を導き、それに Floque の定理⁽⁵⁾を適用して解析を行った。この方法により、粘性流体層の加振の問題が初めて扱われ波の発生についての臨界レイノルズ数が求められた。この考えに沿って、二重液体層の水平加振問題⁽⁶⁾や、風の周期変動による薄い粘性流体層の波の発生問題⁽⁷⁾などが研究された。これらの粘性流体層についての研究は、すべて流体層の深さが浅い場合、いい換えれば長い波長の波の場合のみに限られている。

上に述べた理由より、まだ、ほとんど粘性の影響について調べられていない前者の問題、すなわち、水平な液体層を鉛直方向に加振した場合の波の発生問題を、流体の粘性を考慮し、流体層の深さに制限をつけることなしに、解析を試みる。その結果、得られた波の発生限界条件を、実在の流体を用いた実験的限界値

* 昭和58年9月2日 第921回講演会において講演、原稿受付 昭和58年2月14日。

** 正員、慶応義塾大学理工学部 (〒223 横浜市港北区日吉3-14-1)。

*** 学生員、慶応義塾大学大学院。

**** 慶応義塾大学理工学部。

と比較検討する。

2. 支配する方程式系

広い、水平な壁面上に一定の深さ H の粘度 μ , 密度 ρ , 表面張力 σ の非圧縮粘性流体が、振幅 f , 振動数 ω の周期的加速度 $f \cos \omega t$ をもつ力で、正弦的に振動させられているものとする。ここで、 t は時間を表す。自由表面に接する上側のふん囲気のこと是一切考えないで、発生する波の運動を調べる。いま、振動させられている壁とともに動く座標系 x, y, z を、図 1 のようにとる。すると、動く壁に対して相対的に静止し、圧力 P だけが

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho(g + f \cos \omega t) \quad \cdots (1)$$

のように時間的に変化する状態が、考えられる。以下では、この状態が、いろいろな加振力のもとでどんな場合に不安定となるかについて微小かく乱の範囲内で考察する。

いま、壁に相対的に静止していた流体が、波動運動を起こしたために生ずる x, y, z 方向の速度成分を u, v, w とし、圧力を p と表示すれば、運動と連続の方程式より、

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad \cdots (2)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad \cdots (3)$$

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad \cdots (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \cdots (5)$$

をうる。ただし、これらの方程式を導く際、かく乱による変動量 u, v, w, p について二次以上の項を省略して表示した。

次に、境界条件は、水平壁面上での粘着の条件と、自由表面上で、その法線および接線方向の力が各々、つりあう条件と、運動学的条件とより

$$z=0: u=v=w=0 \quad \cdots (6)$$

$$z=H: -\rho(g + f \cos \omega t)\eta + p - 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \sigma \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \cdots (7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \cdots (8)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \cdots (9)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = w \quad \cdots (10)$$

である。ただし、 η は波動運動時の自由表面の平均の

位置からのずれである。ここでも、微小量について二次以上の項は省略されている。加振時の液体層の運動は、方程式(2)～(10)によって定められる。

3. 中立状態を支配する方程式系

さて、従来の研究では、支配方程式を Mathieu の方程式に帰着できた⁽¹⁾⁽³⁾⁽⁸⁾。しかし、いま考えている系は、そのままでは Mathieu の方程式に帰着することはできないが、式(7)にみられるように方程式系は、時間的周期係数をもつ。そこで、Mathieu の方程式の場合と同様、最も強いパラメトリック共鳴を生ずるのは、系の固有振動数が、加振振動数の半分の場合である⁽⁹⁾と考える。このことを考慮し、さらに x, y についてフーリエ成分表示すれば、解を

$$\eta = (\eta_+ \cos \frac{1}{2}\omega t + \eta_- \sin \frac{1}{2}\omega t) e^{i(k_x x + k_y y)} \quad \cdots (11)$$

$$w = \frac{1}{2}\omega(w_+ \cos \frac{1}{2}\omega t + w_- \sin \frac{1}{2}\omega t) e^{i(k_x x + k_y y)} \quad \cdots (12)$$

のように仮定できる。いま、波の発生条件、すなわち、かく乱が成長も減衰もしない中立安定状態にのみ関心があるので、 $\eta_{\pm}, w_{\pm}$ は、時間の関数ではないと仮定する。この仮定のもとで、式(2)～(10)より、 u, v, p を消去し、解形式(11), (12)を代入すれば、以下のような常微分方程式系を得る。

$$w_{\pm}'' - 2k^2 w_{\pm}'' + k^4 w_{\pm} = \pm \frac{RQ}{2} (w_{\mp}'' - k^2 w_{\mp}) \quad \cdots (13)$$

$$z=1: \frac{1}{Q^2} \left(1 \pm \frac{F}{2} \right) k^2 w_{\mp} - \frac{1}{4} w_{\mp}' \pm \frac{1}{2RQ} (w_{\mp}''' - 3k^2 w_{\mp}') + \frac{Wk^4}{Q^2} w_{\mp} = 0 \quad \cdots (14)$$

$$w_{\pm}'' + k^2 w_{\pm} = 0 \quad \cdots (15)$$

図 1 概略と座標系

$$z=0: w_{\pm}=w'_{\pm}=0 \quad \dots\dots\dots(16)$$

ここで、' は z についての微分を示す。さらに、長さ H は、液体層の深さ H で、時間は $\sqrt{H/g}$ で標準化した。そして、いままで、有次元量として用いた記号をそのまま、式(13)～(16)で無次元量として用いた。なお、次の無次元量を導入した。

$$R = \frac{\sqrt{gH}H}{\nu}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\sqrt{gH}/H}, \quad F = \frac{f}{g},$$

$$W = \frac{\sigma}{\rho g H^2} \quad \dots\dots\dots(17)$$

以下では、式(13)～(16)を満たす固有関係を、主に数値的に求め、波の発生条件について考察する。

4. 完全流体の場合

流体の粘性が、非常に小さく無視できるような完全流体の場合には、方程式系は、式(13)～(16)より、

$$w''_{\pm} - k^2 w_{\pm} = 0 \quad \dots\dots\dots(18)$$

$$z=1: \frac{1}{\Omega^2} \left\{ \left(1 \mp \frac{F}{2} \right) k^2 + W k^4 \right\} w_{\pm} - \frac{1}{4} w'_{\pm} = 0$$

$$\dots\dots\dots(19)$$

$$z=0: w_{\pm}=0 \quad \dots\dots\dots(20)$$

となる。このときには、自由表面上での接線方向の力のつりあいと、壁での粘着条件は、不要となる。式(18)、(20)を満たす解は

$$w_{\pm} = A_{\pm} \sinh k z \quad \dots\dots\dots(21)$$

となる。ここで、 $A_{\pm}$ は任意定数である。この解を、境界条件、式(19)に代入すれば、 $A_{\pm}$ が一意的に、決定されるための条件より

$$\left\{ \left(1 \mp \frac{F}{2} \right) + W k^2 \right\} k \tanh k = \left(\frac{\Omega}{2} \right)^2 \quad \dots\dots\dots(22)$$

なる固有関係式を得る。ここでもし、器の大きさに対応した特別の波数 k を与えれば、Benjamin と Ursell が求めた波の発生限界を与える加振振動の加速度の振幅と振動数の関係になっている⁽¹⁾。しかし、この問題では、かく乱の波数 k はすべての値をとるから、図2に示すように、いろいろな波数 k ごとに Ω - F 空間内に、いわゆる、Mathieu 方程式の安定-不安定特性の限界線に相当するそれらを描くことができる。これらの各曲線の右側が、不安定領域に相当する。限界曲線が、 Ω 軸と交差する点は

$$\left(\frac{\Omega_0}{2} \right)^2 = (1 + W k^2) k \tanh k \quad \dots\dots\dots(23)$$

で与えられ、限界曲線が F 軸と交差する点は

$$F_0 = 2(1 + W k^2) \quad \dots\dots\dots(24)$$

で与えられる。ここで、注意すべきことは、先にも触れたように、図2に示されるような限界曲線が、任意に与えられた波数 k に対し、必ず、存在するのである

から、 Ω - F 面の勝手な点は、必ず、どれかの波数に対応する限界曲線の右側にあることになる。任意の波数のかく乱が存在しうる、無限の広がりをもつ水平液体層では、 Ω - F 面のすべての点が、不安定領域となる。この点が、器の中の液層の場合と本質的に異なるところである。なお、与えられた波数のかく乱が、最も容易に励起される振動数 Ω_0 を k に対して示せば、図3のようになる。

5. 粘性流体の場合

先に指摘したように、粘性流体の場合の限界状態を支配する方程式系(13)～(16)は、典型的な固有値問題となっている。したがって、 $z=0$ と $z=1$ の両端より、ルンゲ・クッタ・ギルの方法により、積分を行い、 $z=1/2$ の所で、それら2組の解が、互いになめらかにつながることを要求して

$$f(\Omega, F, k, R, W) = 0 \quad \dots\dots\dots(25)$$

なる固有関係を数値的に求めた。

図2 完全流体の限界曲線

図3 最も励起されやすいかく乱の波数と振動数の関係 (完全流体の場合)

5.1 与えられた波数に対する限界曲線 上のよう
にして、求められたある特定の波数に対する、 Ω - F
面での限界曲線の一例が、図4に示されている。この
図中の、各曲線の右側は不安定領域に当相する。この
図より、粘性流体の場合の与えられた波数に対する限
界曲線の特徴は、まず第1に、最小となる加振加速度
振幅 F_c が存在することである。第2は、その F_c に対
応する最も励振されやすい加振振動数 Ω_c は、完全流
体の場合の Ω_0 より小さいことである。第3は、限界
曲線の上側の枝は、完全流体の場合に比べて、粘性流
体では右方に移り、安定化されるが、下側の枝は、流
体の粘性によって、少しではあるが下方に移動し、完
全流体で安定であった領域が、粘性によって不安定に
なっている。第4は、 $\Omega=0$ の極限では、完全流体の場
合でも粘性流体の場合でも、限界曲線の値 F_0 は一致
することである。というのは、境界条件(14)で、 $\Omega=0$
と置くことにより、下の枝に対応して、固有関係式

$$\left(1 - \frac{F}{2}\right)k^2 + Wk^4 = 0 \dots\dots\dots (26)$$

が、得られるからである。

5.2 真の限界曲線と真の限界振幅 5.1節では、
ある与えられた波数のかく乱に対して、系が不安定と
なる領域を求めた。いま、種々の波数をもつかく乱に
対する限界曲線を求めてみると、図5のようになる。
波数 k の限界曲線への影響を示す図5の特徴は、ある
特別の波数をもつかく乱に対して、限界振幅が、最小
となることである。完全流体の場合に指摘したように、
この系では、あらゆる波数をもつかく乱が存在しうる
から、各波数に対する多くの限界曲線の包絡線を描け
ば、それらが、この系の安定領域と不安定領域とを境
する真の限界曲線となるはずである。図中に、 F_{min}
で示した最小の限界振幅が、真の限界振幅である。した
がって、 F_{min} を越えた加速度振幅で加振すれば、ある
有限の幅の波数領域内のかく乱のみが、励起される可
能性をもつこととなる。なお、与えられた波数のかく
乱を最も容易に励起する加振振動数 Ω_c は、図6に示
すようになっている。ここに得た、最も不安定となる
条件を、実際の液体の場合について例示したのが、表
1である。この表で、 a_{min} , ω_{min} , λ_{min} は、真の限界条件、
 F_{min} , Ω_{min} , k_{min} に対応する有次元で示した。加振振幅、
加振振動数と発生する波の波長である。

5.3 限界曲線への粘性と表面張力の影響 最小
の加振加速度振幅を与える波数に近い、 $k=1.0$ の場合
について、粘性の影響と表面張力の影響を示したの
が、図7、8である。図7より粘性の増大は、限界加振
振幅を増大させ、最も励起されやすい加振振動数を低

図4 与えられた波数に対する限界曲線

図5 いろいろな波数に対する限界曲線と真の限界曲線
および最小限界振幅

図6 限界振動数と波数の関係

下させる結果をまねく。また図8より、表面張力の増大は、限界の加振振動数とその振幅を増大させる。このことより、粘性と表面張力の増大は、共に、系を安定化させる。

6. 実験値との比較

温度 20°C で、密度 1206 kg/m³, 粘度 62.3 mPa·s,

表 1 実際の液体の場合について最も不安定となる条件の例

LIQUID	ρ (kg/m ³)	μ (mPa·s)	σ (mN/m)	H (mm)	Q_{min} (mm)	ω_{min} (Hz)	λ_{min} (mm)
WATER (20°C)	998	1.002	72.75	2	0.166	16.15	21
GLYCERINE (20°C)	1261	1412	63.41	50	0.093	3.68	314
CASTOR OIL (20°C)	960-970	986	39.0	50	0.082	3.68	314

図 7 限界曲線への粘性の影響

図 8 限界曲線への表面張力の影響

表面張力 62.2 mN/m をもつ 80 % グリセリン水溶液を一辺が 24 cm の底面がみがきガラス板でできた正方形水そうに深さ 0.15 ~ 1.5 cm の範囲で入れ、松平式加振機で、振幅 0.5 ~ 3 mm, 振動数 8 ~ 50 Hz の範囲内で鉛直方向に加振し、その時、液体の自由表面に波が発生する限界条件を実験的に求めた。なお、波の発生の判定は、自由表面に沿った方向から、ストロボスコープで同期させて照明し、液面の上方より肉眼で観測した。発生した波の波長は限界状態よりほんの少し加振振幅を大きくした状態で液面上方より写真撮影し、それをもとに測定した。

それらの測定結果を無次元の加振振動数 Q と加振加速度振幅 F と、その時生ずる波の波数 k の関係として示せば、図 9, 10 となる。これらの図中に、この場合に対する理論的結果を実線で一緒に示してある。

図 9 実験で得られた限界曲線（加振振動数と加振加速度振幅の関係）

図 10 実験で得られた限界振動数と波数の関係

振幅=0.052 cm, 振動数=13.7 Hz, 波長=3.4 cm,
深さ=1.02 cm

図 11 限界振幅を少し越えた状態での波の様子

図 10 より, 振動数と波数の関係を示す実験値と理論値がよく一致していることから, 理論で予想したように, 確かに加振振動数の, 半分の振動数をもつ波が, 励振されていることが実証された。しかも, 図 10 に示されているように, 発生する波の波数は加振振動数に対してほとんど連続的に変化しているので, 理論で予想したように, 水そうの側壁の影響はなかったものとみてよいことが知られた。さらに, ここに述べたような波を励振するための限界加振加速度振幅は, 加振機の使用範囲の制限のために, 十分広い振動数範囲について実験はできなかったが, 図 9 に示されているように非常によく一致している。したがって, ここに得た理論結果は, 実際の加振された液体層の波の発生条件を予想するのに, 十分なものであると考えられる。なお, 実験で求めた限界加振振幅を少し越えた所で生ずる波の様子を, 液面の上方より撮影したのが図 11 である。この例にみられるように, 写真で左右方向の波頭をもつ波が強く, 上下方向のそれは弱い場合が多く, 限界状態を少し越えたところでは, 発生する波は

三次元波というよりは二次元波に近いものとなっているのが特徴である。

7. む す び

広い水平壁上の粘性液体層が, 壁とともに, 鉛直方向に加振された場合の, 自由表面に生ずる波の発生限界を理論的に解析した。支配方程式は時間的周期係数をもつので, 加振振動数の半分の振動数をもつ波が最も強くパラメトリック共鳴を起こすものと仮定して, 解を求めた。その結果, (1) 流体が, 完全流体の場合の限界曲線が求められ, この特別の場合は, 器の中の液体層について Benjamin-Ursell が求めた限界曲線に一致する。(2) 粘性流体の場合の限界曲線が与えられた波数ごとに求められた。(3) それらの限界曲線の包絡線として真の限界曲線が見つけられ, (4) その曲線より, 真の限界加速度振幅が存在することが示され, (5) それに対応する振動数と波数が決定された。(6) この理論的結果が, グリセリン水溶液を用いた実験と比較され, 十分一致することが示された。

文 献

- (1) Benjamin, T. B. and Ursell, F., *Proc. R. Soc. Lond., Ser. A*, 225-1163 (1954), 505.
- (2) Khandelwal, R. S. and Nigam, N. C., *J. Sound Vib.*, 74-2 (1981), 243.
- (3) Kelly, R. E., *J. Fluid Mech.*, 22-3 (1965), 547.
- (4) Yih, C. S., *J. Fluid Mech.*, 31-4 (1968), 737.
- (5) Coddington, E. A. and Levinson, N., *Theory of Ordinary Differential Equations*, (1955), 78, McGraw-Hill.
- (6) Li, C. H., *Phys. Fluids*, 13-5 (1970), 1121.
- (7) 長谷川・谷山, 機論, 45-397, B (昭 54), 1316.
- (8) 長谷川・機論, 48-429, B (昭 57), 904.
- (9) Landau, L. D. and Lifshitz, E. M., *Mechanics*, (1960), 80, Pergamon Press.

討 論

〔質問〕 橋 本 弘 之〔東北大学高速力学研究所〕

(1) F_0 は物理的にどのような意味をもつのか。また, どの程度の F 値までが理論で仮定した微小かく乱の範囲内に相当するか, お教え願いたい (例えば図 2 の F_0 値はどうか)。

(2) 縦振動では加振振幅の増加とともに通常 1/2 分数調波の発生以前に加振振動数と同じ振動数の小振幅の波も観察されるが, 真の限界曲線に対する実験ではそれらの波をどのように区別したか, お教え願いた

い。

(3) 表 1 で水だけが $H=2$ mm で他と異なっているが, 同じ条件で比較するとどのようなになるのか。また実験に用いた $H=0.15$ cm のように浅い液深でも, 線形化した基礎方程式が支障なく成立するのか。また, このような浅く広い流体表面の波の問題として, どのような工学的応用を考えておられるのか, お教え願いたい。

〔回答〕 (1) 粘性のある場合には, 支配方程式

(2)~(10)は完全流体の場合のように Mathieu の方程式そのものとは異なるため、5・1 節で Mathieu の方程式の解と式(2)~(10)の解との関係を述べた。この目的のために、Mathieu の解そのものについて、高調波との相互作用の問題とは別に、 F の比較的大きな所まで表示をした。実際の限界振幅を論じた、図 5, 7~9 では、 F が 1 に比べ小さい領域で考察を加えている。

(2) この研究では、粘性の影響が明確に現れてくるような場合を考えているので、粘度が比較的大きい場合か、生ずる波の波長に比べ、深さが浅い場合など、相対的にみて、粘度が大きい状態に主に関心をもって、いる。このような場合には、 $1/2$ 分数調波が非常に強く、ご指摘の現象は観察できなかった。

(3) 式(13), (14)より明らかとなおり、 R が大きい場合には、特別な項のみが大きくなるため、数値計

算が实际的に非常に困難となり、粘度の小さい水の場合に正確な値を得ることができなかった。そのため、相対的に粘度の高い H の小さい場合についてのみ表示した。

次に、薄い液層への安定論の適用性についてであるが、例えば、鉛直壁に沿って流れ落ちる液膜の波立ちの問題などでは、通常よく、安定論によって現象の説明が行われている(付1)。したがって、この場合も特に問題はないと考えている。

最後に、実際問題との係わりについてであるが、回答(2)でも述べたように、発生する波の波長に比べ深さが小さい場合には、ここでの考えが適用できる。このような場合は、一般的にみて、たくさんあると考えている。

(付 1) Levich. V.G., *Physico chemical Hydrodynamics*, (1962), 683, Pxentice-Hall.