乱流噴流の特性に関する研究*

(第5報, 平面浮力噴流)

石 垣 博**

Studies on the Properties of Turbulent Jets

(5th Report, Plane Buoyant Jet)

by Hiroshi ISHIGAKI

The plane turbulent buoyant jet issuing vertically into quiescent fluid is studied analytically. Formulae on maximum velocity, temperature and entrainment rate are derived. These formulae agree well with the available experimental data for whole region of jet and plume. Quantitative classification as to the flow regime of jet, transition and plume are given for the nondimensional distance from jet exit.

Key Words: Fluid Mechanics, Thermal Engineering, Environmental Engineering, Turbulence, Jet, Plume, Buoyant Effect

1. ま え が き

温度や組成のちがいににより周囲流体と密度の異なる噴流は、出口から近いところでは初期運動量により支配される(ここではジェットとよぶ)。しかし出口から離れるにつれてかならず浮力の影響をうけ、やがて浮力に支配される流れとなる(ブルームとよぶ)。ジェット、ブルームおよびこれらの移行領域も含めた全体を、ここでは浮力噴流とよぶことにする。プラントの温排水や煙突の排気ガスなどは工学的に重要なブルームの代表的な例である。したがって環境汚染物質の乱流拡散を予知するためには、ブルームの温度や濃度の減衰、拡がりおよび周囲流体のまきこみなどの特性を明確に把握する必要がある。

このようなブルームの特性に関する研究はジェットに比較して理論、実験ともに少なく、したがって流れ特性の理解も十分ではない。実験的にはブルームではきわめて低速の流れを測定せねばならないため信頼できる測定データが少なかったが、近年になって平面ブルームでは Kotsovinos-List⁽¹⁾ のレーザ流速計を用い

た水の測定、中込・平田⁽²⁾ の熱線風速計による空気の測定データが出された。また Chen-Rodi⁽³⁾ による実験データレビュー、List⁽⁴⁾ による解説も行われているが、実験データ同士の一致はよいとはいえず、また整理方法もまちまちである。さらにジェット、ブルームおよびその移行領域をも含めた浮力噴流の全体構造を明確にするような理論は見あたらない。

本研究はジェットからブルームにいたる浮力噴流全体の特性を一貫した理論によって明らかにしようとするもので、本報では垂直方向の平面ブルームをとりあつかう。本研究の第1～3報^{(5)~(7)} では浮力の影響が少ないジェット領域の特性式を導き、多くの実験データと比較して妥当性を検討しながらジェットの特性を論じた。第4報⁽⁸⁾ では垂直方向ブルームの基礎関係式として局所リチャードソン数の式を新しく導き、実験データにより検証した。本報では、この基礎式と従来より知られている熱流束の式を用いて平面ブルームの特性式を導き、ジェットからブルームまでの全体にわたって実験データと比較して、平面浮力噴流全体の特性を明らかにする。

本研究では乱流モデルを用いていないので、乱流モデルに付随する問題点⁽⁹⁾ は入ってこない。より複雑な浮力流れ、たとえば成層流体中や横風を受けるブルー

* 昭和58年11月21日 第922回講演会において講演、原稿受付 昭和58年5月11日。

** 正員、科学技術庁航空宇宙技術研究所角田支所(〒981-14 角田市君萱字小金沢1)。

ムの計算は2方程式モデルなどの乱流モデルを用いて行わざるをえないが、本報で求めた特性式はブルームの基本関係式としてモデル定数の決定やモデル計算法の検定などに使用することができる。

2. 主 な 記 号

- A : 定数 $= \{(1+\sigma^2)\ln 2/\pi\}^{1/2}$
 b : 速度半値幅
 b_T : 温度半値幅
 c_1, c_2 : b, b_T のこう配
 D : 出口幅
 g : 重力の加速度
 m : 断面流量 $= \int_{-\infty}^{\infty} \rho U dy$
 R_{i_0} : 出口リチャードソン数 $= g\beta\Delta T_0 D/U_0^2$
 R_{i_s} : 修正出口リチャードソン数 $= g\beta\Delta T_0 \theta/U_0^2$
 T : 時間平均温度
 ΔT : 時間平均温度差 $= T - T_\infty$
 U : x 方向時間平均速度
 X : x 方向無次元距離 $= R_{i_s}^{2/3} x/\theta$
 x : 垂直上方距離
 β : 体膨張係数
 η : 無次元距離 $= y/b$
 θ : 密度修正出口幅 $= D\rho_0/\rho_\infty$
 λ_H : 熱流束出口係数
 ρ : 密度
 σ : 半値幅の比 $= b/b_T$
 添 字
 0: 噴流出口
 1: 噴流中心
 ∞ : 周囲流体

3. 平面ブルームの特性

一様な密度 ρ_∞ (温度 T_∞) の静止流体中に速度 U_0 , 温度 T_0 (ただし $T_0 > T_\infty$) で垂直上方に吹き出す平面噴流のブルーム領域を考える。このとき噴流出口密度 ρ_0 が ρ_∞ より小さいほど (ρ_∞/ρ_0 あるいは T_0/T_∞ が大きいほど) 周囲流体をひきこむ量 (連行量) が大きくなるため、温度場の希釈がはげしく、出口から比較的小さな距離で ρ は ρ_∞ に近くなる。したがって相似領域を考えれば $\rho \approx \rho_\infty$ とおくことができ、 ρ の変化は浮力項でのみ考慮するという Boussinesq 近似が成立する。

前報で検討したように本研究では次に示す速度、温度の分布形と半値幅の式を仮定する。

$$\frac{U}{U_1} \equiv F(\eta) = \exp\{-(\ln 2)\eta^2\} \quad \cdots \cdots (1\cdot a)$$

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_1} \equiv G(\eta) = \exp\{-(\ln 2)\sigma^2\eta^2\} \quad \cdots \cdots (1\cdot b)$$

$$b = c_1 x, \quad b_T = c_2 x \quad \cdots \cdots (2)$$

ここに、 $\eta = y/b$, $\sigma = b/b_T$ である。式(2)のこう配 c_1, c_2 したがって σ を出口条件や ρ_∞ の異なるブルームに対して共通の値をとる一定値であると考え、ここでは x の大きな所を問題にするので、仮想原点 x_0 は小さいとして無視した。 x_0 を導入するときには、求めた結果の x を $x - x_0$ で置きかえればよい。

前報で、ブルーム領域では $R_{i_s} = g\beta\Delta T_1 x/U_1^2$ が一定値をとり、この一定値が平面ブルームでは $\sigma/\sqrt{2}$ となることを導いた。

$$\frac{g\beta\Delta T_1 x}{U_1^2} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \quad \cdots \cdots (3)$$

σ は出口条件に無関係だから、式(3)も出口条件や ρ_∞ に独立な式である。

T_∞ が一定であるとき、エネルギーを積分した式は一定となり、次に示す第3報の式(14)を用いることができる。

$$2 \int_0^\infty \rho U \Delta T dy = \lambda_H \rho_0 U_0 \Delta T_0 D$$

Boussinesq 近似により $\rho = \rho_\infty$ とおき、式(1), (2)を代入すれば次式となる。

$$\rho_\infty U_1 \Delta T_1 = \frac{A \lambda_H \rho_0 U_0 \Delta T_0 D}{c_1 x} \quad \cdots \cdots (4)$$

ここに $A = \{(1+\sigma^2)\ln 2/\pi\}^{1/2}$ である。出口条件により決まる係数 λ_H については第3報で詳しく議論した。

式(3)と(4)から中心速度 U_1 , 中心温度差 ΔT_1 を求めれば次式となる。

$$U_1 = \left\{ \frac{\sqrt{2} A \lambda_H}{\sigma c_1} \right\}^{1/3} R_{i_s}^{1/3} U_0 \quad \cdots \cdots (5)$$

$$\Delta T_1 = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{\sqrt{2} A \lambda_H}{\sigma c_1} \right\}^{2/3} \frac{R_{i_s}^{2/3} U_0^2}{g\beta x} \quad \cdots \cdots (6)$$

さらにブルームの断面流量 $m = \int_{-\infty}^{\infty} \rho U dy$ についても、 $\rho = \rho_\infty$ として式(1), (2), (5)を用いれば次式が求まる。

$$m = c_1 \sqrt{\frac{\pi}{\ln 2}} \rho_\infty U_1 x \quad \cdots \cdots (7)$$

7.1節で導いた換算因子 x_* , U_* , $g(\rho_\infty - \rho_*)$, m_* を用いてこれらの式を無次元化すれば、次のようになる。

$$\frac{U_1}{U_*} = \frac{U_1}{U_0} R_{i_s}^{-1/3} = \left(\frac{\sqrt{2} A}{\sigma c_1} \right)^{1/3} \lambda_H^{1/3} \quad \cdots \cdots (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{g(\rho_\infty - \rho_1)}{g(\rho_\infty - \rho_*)} &= \frac{\Delta T_1}{\Delta T_0} R_{i_s}^{-1/3} \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2} A}{\sigma c_1} \right)^{2/3} \lambda_H^{2/3} X^{-1} \quad \cdots \cdots (9) \end{aligned}$$

$$\frac{m}{m_*} = \frac{m}{\rho_\infty U_0 \theta} R_{i_*}^{1/3} \\ = c_1 \sqrt{\frac{\pi}{\ln 2}} \left(\frac{\sqrt{2} A}{\sigma c_1} \right)^{1/3} \lambda_H^{1/3} X \dots \dots \dots (10)$$

式(8)～(10)は、水や空気などに共通して成立する平面ブルームの特性式であり、濃度差によるブルームの場合にも温度差を濃度差におきかえれば同様に成立する。式(8)～(10)は、ジェットにおけると同様、 D を等価幅 θ でおきかえれば、出口密度差の大きなブルームでも $\rho_0 = \rho_\infty$ の場合の式がそのまま使えることを示している。また、出口形状や出口速度、温度分布形のちがいの出口条件は λ_H を通してのみ影響する。

4. 実験データとの比較

式(8)～(10)は c_1 , c_2 , λ_H を未定定数として含んでいるので、この値を与える必要がある。ブルームでの b , b_T の測定はジェットに比較してはるかに精度が悪く、研究論文ではデータを示さずに実験式のみを与えていることも多い。7・2節に述べたように低速のブルームでは b , b_T のデータのばらつきは避けられないものである。ジェットでは $b < b_T$ であることは明白であるが、ブルームでは不明である。これまで実験式は $c_1 = 0.095 \sim 0.135$, $c_2 = 0.10 \sim 0.14$ の範囲にあり、Chen-Rodi⁽³⁾は $c_1 = 0.12$, $c_2 = 0.13$ を推奨値としているが、必然性は何もない。本報ではKotsovinos-Listおよび中込・平田の測定値を参考にして、暫定的に $c_1 = 0.10$, $c_2 = 0.13$ および $c_1 = c_2 = 0.10$ の二とおりについて検討する。

つぎに実験論文の中では出口速度、温度 U_0 , ΔT_0 が与えられているが、通常は出口断面で一定と考え〔式(4)でいえば $\lambda_H = 1$ として〕議論することが多い。し

かし第1, 3報で詳しく論じたように、出口部での縮流、境界層の発達、熱伝導損失などのため、 λ_H は一般に1より小さい。たとえば論文中に与えられている U_0 , ΔT_0 の値と U_1 , ΔT_1 , b の実験データから λ_H を逆算すると、中込・平田の実験では $0.5 \sim 0.6$, Kotsovinos-Listの実験データでは $0.6 \sim 0.7$ となる。この事実を参考にして本報では $\lambda_H = 1$ の理想の場合と 0.6 の場合の二とおりについて係数を計算する。したがって c_1, c_2 の二とおりと組合せて表1に示すa, b, c, dの四とおりの場合を図示する。式(8)～(10)の X の係数値を f_1, f_2, f_3 とすれば、その値は表1に示したようになる。なお、ジェットの式で $\lambda_M = \lambda_H = 1.0$ と 0.6 を図示している理由については第1報⁽⁵⁾, 第3報⁽⁷⁾を参照されたい。

ここで第3報で求めた平面ジェットの特性式を〔付録1〕の U_* , $g(\rho_\infty - \rho_*)$, m_* を用いて書きかえて示せば、次のようになる。

$$\frac{U_1}{U_0} R_{i_*}^{-1/3} = 2.52 \lambda_M^{1/2} X^{-1/2} \dots \dots \dots (11)$$

$$\frac{\Delta T_1}{\Delta T_0} R_{i_*}^{-1/3} = 2.22 \lambda_H \lambda_M^{-1/2} X^{-1/2} \dots \dots \dots (12)$$

表1 経験定数と係数の値

	a	b	c	d
C_1	0.10	0.10	0.10	0.10
C_2	0.10	0.13	0.10	0.13
λ_H	1.0	1.0	0.60	0.60
f_1	2.11	2.22	1.78	1.87
f_2	3.15	2.67	2.24	1.90
f_3	.449	.473	.379	.399

図1 噴流中心速度の変化

$$\frac{m}{\rho_\infty U_0 \theta} R_i^{1/3} = 0.563 \lambda_M^{1/2} X^{1/2} \dots\dots\dots (13)$$

ここに λ_M は運動量の出口係数であり、オリフィスで 0.6, ゆるやかに絞ったノズルでは 0.85~0.95 の値をとる⁽⁵⁾。

出口から垂直上方に吹き出した $T_0 > T_\infty$ の平面乱流噴流の特性は、ジェットからプルームへの移行領域の間にはさんで中心速度は式(11)から(8), 中心温度は式(12)から(9), 噴流流量は式(13)から(9)のように変化する。Chen-Rodi は実験データの目測から $0.5 < x < 5$ を移行領域としているが, 理論的な見つもりについては 5 章で述べる。なお当然ながら, λ_M が入ってくるのはジェット領域だけで, プルーム域の特性は噴口の運動量とは無関係になる。

図 1 は噴流の中心速度の式(8), (11)と実験データを比較したものである。Kotsovinos-List の実験は温水噴流を用いたもので $\Delta T_0 = 3 \sim 22^\circ\text{C}$, $R_{i,0} = 0 \sim 0.7$ である。この実験で測定した速度の大きさは, たとえば $R_{i,0} = 0.71$ の場合に $U_0 = 4.53 \text{ cm/s}$, $U_1 = 5.8 \text{ cm/s}$ である。中込・平田の実験は加熱空気噴流 ($\Delta T_0 = 200^\circ\text{C}$, $R_{i,0} = 0.66$) を用いており, $U_0 = 45 \text{ cm/s}$, $U_1 = 58 \text{ cm/s}$ 程度の速度を測定している。なお, Bashir⁽¹⁰⁾ および Jenkins⁽¹¹⁾ のジェット領域のデータは, 加熱空気噴流の測定である。

図 2 は中心温度 (濃度) の式(9), (12)と実験データとの比較を示したものである。Harris⁽¹²⁾ のデータは Chen-Rodi⁽³⁾ のグラフから引用したものであり, 温

水噴流によっている。Anwar⁽¹³⁾ のデータは塩水中に真水の噴流を吹き出した実験で中心濃度の変化を測定したものであり, Δc を濃度差とすれば式(9), (12)で $\Delta T_1/\Delta T_0$ を $\Delta c_1/\Delta c_0$ で置きかえればよい。

図 3 は噴流の流量の式(10), (13)と実験データを比較したものであり, 実験データはいずれも中心速度, 半値幅, 速度分布の実験データから m の定義式により算出されたものである。

式(8)~(10)からわかるように, 右辺の係数は出口条件によらない c_1 , c_2 と出口条件により決まる λ_H の二つの部分から成っている。図 1~3 を総合していえることは, c_1 , c_2 の違いよりもむしろ λ_H による違いのほうが大きいことである。したがって特性公式(8)~(10)を実際の流れ予測に精度よく用いるためには, c_1 , c_2 を正確に与えることもさることながら, 出口条件を把握して λ_H を正しく与えることのほうがさらに重要である。このことはジェットの場合⁽⁷⁾にも強調したことであるが, プルームのほうが低速であるためにいっそう難しい課題であろう。

ところでプルームの計算では Morton⁽¹⁴⁾ によって提唱されたエントレインメント法を用いることが多い⁽¹³⁾⁽¹⁵⁾。この方法ではエントレインメント定数 α を仮定して, 速度場, 温度場を解析する。Lee-Emmons⁽¹⁵⁾ および Anwar⁽¹³⁾ は, 平面プルームでは $\alpha = 0.16$ を仮定すれば, 速度, 温度の実験データと一致するような解を得るとしている。この α の値について若干の考察を加える。

図 2 噴流中心温度の変化

$$\alpha \equiv \frac{dm}{dx} / (2\rho_\infty U_1) = 1.065 \left(\frac{db}{dx} + \frac{b}{U_1} \frac{dU_1}{dx} \right) \quad \dots\dots\dots (14)$$

平面ジェットでは $U \approx x^{-1/2}$ であるから $\alpha = (1.065) / 2(db)/(dx)$ となるが、平面ブルームでは U_1 が一定であるために $\alpha = 1.065(db)/(dx)$ となり、 b のこの配を同じとすればブルームの α はジェットの2倍となる。平面ジェットでは $c_1 = 0.105$ となるので $\alpha = 0.056$ 、平面ブルームでは $c_1 = 0.10$ として $\alpha = 0.107$ となる。このような値が式(10)、(13)であるが、エントレインメント法で仮定される $\alpha = 0.16$ は 0.107 に比べれば 50%ほど大きいことになる。つまり $\alpha = 0.16$ を仮定すれば U_1 、 ΔT_1 の計算値を実験データと合わせることができるが、もともとの噴流流量は真の値よりかなり大きく見積もったことになる。

5. ジェットとブルームの領域区分

前報ではジェット領域の特性式を用いて浮力による運動量増加と初期運動量の比 B を計算し、 $B < 1/10$ としてジェット領域の上限を求めた。ここではブルームの特性式(8)、(9)によりブルーム領域の下限を求める。 B の定義式に本報の式(1)、(2)、(8)、(9)を代入すれば、次式となる。

$$B \equiv \frac{2\rho_\infty g \beta \int_0^\infty (\Delta T / \Delta T_1) d\eta \int_0^x \Delta T_1 b dx}{\lambda_M \rho_0 U_0^2 D} \\ = \sqrt{\frac{\pi}{2 \ln 2}} c_1 \left(\frac{\sqrt{2} A}{\sigma c_1} \right)^{2/3} \lambda_M^{-1} \lambda_H^{2/3} X \quad \dots\dots\dots (15)$$

ブルーム領域の範囲を $B > 10$ 、すなわち浮力による運動量増加が出口運動量の10倍をこえる領域として

定義すれば、 $c_1 = c_2 = 0.10$ としたときのブルーム領域は下ようになる。

$$14.9 \lambda_M \lambda_H^{-2/3} < X \quad \dots\dots\dots (16)$$

$c_1 = 0.10$ 、 $c_2 = 0.13$ とすれば $13.5 \lambda_M \lambda_H^{-2/3} < X$ となる。したがって、ジェットからブルームへの移行領域を $1/10 < B < 10$ と考えれば、移行領域範囲は次のようになる。

$$0.376 \lambda_M \lambda_H^{2/3} < X < 14.9 \lambda_M \lambda_H^{-2/3} \quad \dots\dots\dots (17)$$

この領域範囲は λ_M 、 λ_H の値によっても若干シフトすることがわかる。Chen-Rodi⁽³⁾ は中心速度、温度の実験データの目測から目安として $0.5 < X < 5$ を移行領域としているので、上の条件は多少きびしいとも考えられる。制限をゆるめて、 $1/5 < B < 5$ として移行領域を考えれば、 $0.45 \lambda_M \lambda_H^{2/3} < X < 7.5 \lambda_M \lambda_H^{-2/3}$ となる。したがって $\lambda_M = \lambda_H = 0.6$ の場合には $0.38 < X < 6.3$ となり、上に述べた Chen-Rodi の目測値にほぼ対応する範囲となる。

6. 結 論

前報で導いたブルームの局所リチャードソン数の式を熱流束の式と連立させて、平面乱流ブルームの中心速度、中心温度、断面流量の特性式を導いた。次いでこれらブルームの式と先に導いたジェットの特性式を全体に共通なスケールで無次元化し、 $10^{-2} < X < 10^2$ の浮力噴流全域について既存の実験データと比較した。この比較の過程で出口係数 λ_H の決定が重要であることを示唆し、またエントレインメント法による計算法の問題点についてのべた。さらにブルームの特性式を用いてブルーム領域の下限を求め、ジェットから

図 3 噴流断面流量の変化

ブルームへの移行領域範囲を定量的に与えた。

本報の研究に関し、東京大学 平田 賢教授と東京芝浦電気㈱ 中込秀樹氏から実験データの提供など重要な援助を受けた。ここに記して謝意を表する。

〔付 録 1〕 浮力噴流の換算因子 前報でジェット領域、移行領域、ブルーム領域をととして浮力噴流全体を特性づける x 方向長さスケール x_* を求めた。ここでも同様に速度、温度(密度)、流量の換算因子 (Scaling Factor) を次元解析により求める。

$j=0$ を平面噴流, $j=1$ を円形噴流として速度、密度、流量変化の換算因子 U_* , $g(\rho_\infty - \rho_*)$, m_* が運動量 $M_0 = \rho_0 U_0^2 D (D/4)^j$, 浮力強さ $N_0 = g(\rho_\infty - \rho_0) U_0 D (D/4)^j$, および ρ_∞ から決まるとして、次元解析を行えば次の式を得る。

$$U_* = U_0 R_{i_*}^{\frac{1+j}{3+j}} \dots\dots\dots (18)$$

$$g(\rho_\infty - \rho_*) = g(\rho_\infty - \rho_0) R_{i_*}^{\frac{1+j}{3+j}} \rho_\infty / \rho_0 \dots\dots\dots (19)$$

$$m_* = \rho_\infty U_0 \theta^{1+j} R_{i_*}^{-\frac{1+j}{3+j}} \dots\dots\dots (20)$$

ただし

$$R_{i_*} = \frac{g(\rho_\infty - \rho_0) D}{\rho_0 U_0^2} \left(\frac{\rho_0}{\rho_\infty} \right)^{\frac{1}{1+j}}$$

である。

たとえば式(19)を用いて気体噴流の中心温度変化 ΔT_1 を無次元表示する場合には、理想気体を仮定し $T_1 \approx T_\infty$ として次のようになる。

$$\frac{g(\rho_\infty - \rho_1)}{g(\rho_\infty - \rho_*)} = \frac{\Delta T_1}{\Delta T_0} \frac{T_\infty}{T_1} R_{i_*}^{-\frac{1+j}{3+j}} \approx \frac{\Delta T_1}{\Delta T_0} R_{i_*}^{-\frac{1+j}{3+j}} \dots\dots\dots (21)$$

〔付 録 2〕 半値幅のデータ 現在入手できるブルームの半値幅のデータは、ジェットに比較して非常にばらつきが大きく、こう配 c_1 , c_2 の値をジェットほど精度よく決めることができない。このばらつきの原因はブルームが低速であることに帰着する。たとえば速度測定の誤差をかりに ± 5 cm/s とすれば、図 4 からわかるように、 $U_1 = 5$ m/s 程度のジェットでは $U_1 \pm 5$ cm/s の範囲内にはいる y 領域はせまく、した

図 4 半値幅決定の概念図

がって b のばらつきは少ない。他方、 $U_1 = 0.5$ m/s 程度のブルームでは $U_1 \pm 5$ cm/s の範囲にはいる y 領域ははるかに広く、半値幅のデータは大きくばらつくことになる。

文 献

- (1) Kotsovinos, N. J. and List, E. J., *J. Fluid Mech.*, 81 (1977), 45.
- (2) 中込・平田, 機論, 46-410, B (昭 55), 2023.
- (3) Chen, C. J. and Rodi, W., *Vertical Turbulent Buoyant Jets, A Review of Experimental Data*, (1980), Pergamon Press.
- (4) List, E. J., *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 14 (1982), 189.
- (5) 石垣, 機論, 48-433 (昭 57), 1692.
- (6) 石垣, 機論, 48-433 (昭 57), 1701.
- (7) 石垣, 機論, 49-444 (昭 58), 1650.
- (8) 石垣, 機講論, No. 820-17 (昭 57-11), 18.
- (9) 石垣, 航空宇宙学会誌, 28-313 (昭 55), 102.
- (10) Bashir, J. and Uberoi, M., *Phys. Fluids*, 18 (1975), 405.
- (11) Jenkins, P. E. and Goldschmidt, V. W., *Trans. ASME, Ser. I*, 95-4 (1973), 581.
- (12) Harris, P. R., *Ph. D. Thesis, Univ. of Bristol*, (1967).
- (13) Anwar, H. O., *J. Hydraul. Res.*, 7 (1969), 411.
- (14) Morton, B. R., ほか 2 名, *Proc. Roy. Soc., Ser. A*, 234 (1956), 1.
- (15) Lee, S. L. and Emmons, H. W., *J. Fluid Mech.*, 11 (1961), 353.