二次元乱流後流における大規模構造および小規模構造の特性*

木谷 勝**, 松村 昌典***

Large-Scale and Small-Scale Turbulence Structure in the Intermediate Wake of a Two-Dimensional Normal Plate

by Masaru KIYA and Masanori MATSUMURA

Turbulence structure in the intermediate wake of a normal flat plate was studied experimentally by a conditional-sampling technique. The measurements were made at a section 8.0 heights downstream of the front face of the plate. Velocity fluctuations were decomposed into those produced by large-scale structures and those associated with small-scale structures: the former fluctuations were again decomposed into the phase-averaged fundamental component and the deviation from it (large-scale deviation). Velocity vector fields, contours of streamlines, vorticity of the fundamental component, together with contours of intensity and correlation of the large-scale deviation velocity, were presented and discussed. Contours of intensity, correlation and turbulence intermittency of the small-scale fluctuations were also presented in and around the large-scale structures. Large Reynolds shear stress associated with the large-scale deviation velocity was suggested to be a result of the stretching of vortex filaments in the saddle-point flow region.

Key Words: Turbulence, Wake, Coherent Structure, Conditional Sampling, Unsteady Flow, Saddle-Point Flow, Normal Plate

1. 緒 言

流体を取扱う工学的諸装置においては、上流側物体の後流の影響を受ける物体の例が多くみられる。たとえば、多段ターボ機械の動翼あるいは静翼、熱交換器の管群、複合高層煙突、ビル群などがあげられる。最近では大形航空機の後流渦に小形機がまきこまれて事故となった例もある。下流側物体に作用する変動流体力を評価するためには、上流側物体の乱流構造とくに物体寸法の数倍～10倍程度下流の領域(中間領域とよぶ)における構造を把握する必要がある。また、燃焼装置の中には、乱流後流の大きな混合・拡散作用を利用するものがある。

二次元物体の中間領域における後流中の組織的構造は、可視化法⁽¹⁾や位相平均法^{(2)~(5)}などによってしだいに明らかになりつつある。位相平均法を用いた研究の多くは、流線、速度ベクトル線図、渦度分布、乱流間欠係数分布などによって組織的構造を表現している。最近 Cantwell-Coles⁽⁶⁾は円柱の近傍後流中の組織的構造とこれに重畳されている不規則な速度変動のエネル

ギ分布、速度相関分布などを明らかにした。著者らは別報⁽⁷⁾において、中間領域における円柱後流中の速度変動を大規模な組織的構造(大規模構造)によるものと小規模な構造(小規模構造)によるものとに分離し、位相平均法によってこれらの構造を求めた。

瞬時の速度を Q 、時間平均を $\bar{Q}$ 、大規模構造および小規模構造による速度変動をそれぞれ $\bar{q}$, q' とすれば、

$$Q = \bar{Q} + \bar{q} + q'$$

である。 Q の位相平均を $\langle Q \rangle$ として、大規模構造の位相平均 $\langle \bar{q} \rangle$ を

$$\langle \bar{q} \rangle = \langle Q \rangle - \bar{Q}$$

で定義する。 $\bar{q}$ と $\langle \bar{q} \rangle$ の差 $\bar{q} - \langle \bar{q} \rangle = \bar{q}'$ は、主流と直角なある断面を通過する個々の大規模構造の循環、形状、位置などが一定でないこと(大規模構造の分散またはジッタ)によるものである。Cantwell-Coles⁽⁶⁾は $\bar{q}' + q' = q^*$ を不規則変動としているが、 q^* の中には大規模構造の分散の影響が含まれており、小規模構造による変動 q' を正しく反映していない。後に示すように、レイノルズ数の大きい乱流後流では $\bar{q}'$ は q' に比較して大きいので、小規模構造を調べるには q' をなるべく正確に分離する必要がある。

本論文は、大規模構造の位相平均 $\langle \bar{q} \rangle$ 、大規模構造

* 昭和59年8月28日 第927回講演会において講演、原稿受付 昭和59年1月30日。

** 正員、北海道大学工学部(〒060 札幌市北区13条西8丁目)。

*** 准員、北海道大学大学院。

の分散 q' および小規模構造 q' を別々に求め、それらの時空間における分布形状から中間領域における乱流後流の構造を明らかにすることを目的としている。物体としては円柱にくらべてはく離点の固定されている垂直平板を用いた。

座標と主な記号の定義を図1に示す。平板(高さ h)のスパンに垂直な面内で主流方向に x 軸、これと直角に y 軸、スパン方向に z 軸をとる。座標原点はスパン中央の前方よどみ点である。 x, y 軸方向の速度成分を U, V , 対応する時間平均値を $\bar{U}, \bar{V}$, 変動成分を u, v とする。また、主流速度を U_0 とする。

2. 実験装置および方法

2.1 実験および測定装置 実験には試験部断面 $30\text{ cm} \times 30\text{ cm}$, 長さ 101 cm の吸込形風路を用いた。実験における主流速度は $U_0 = 16.4\text{ m/s}$ であり、このとき平板設置位置における乱れ強さ $(\bar{u}^2)^{1/2}/U_0$ は 0.2% 以下であった。供試平板は高さ $h = 20.0 \pm 0.1\text{ mm}$, 厚さ 4.3 mm の黄銅製で、両端は図1のように 30° にそぎ落としてある。平板のスパンは風路試験部の幅と一致させてあるので、アスペクト比は 15.0 , 拘束比は 6.7% である。なお端板は使用していない。高さ h を代表長さとするレイノルズ数は 2.3×10^4 , 平均渦放出周波数 f_K は $0.146 U_0/h$ (ストローハル数は 0.146) である。

速度の測定には X 形熱線プローブを用いた。測定は $(x/h = 8.0, z/h = 0.0)$ の直線上(測定線とよぶ)で y 方向の多数の点について行った。位相平均のための基準信号は $(x/h = 8.0, y/h = 0.0, z/h = 0.25)$ の位置に固定されたもう一つの X 形熱線プローブから求めた。プローブの受感部は、直径 $5\text{ }\mu\text{m}$, 長さ約 1 mm のタングステン線であり、2本の熱線の間隔は約 1 mm である。これらのプローブは定温度形熱線流速計で作動させ、出力は直線化器を通した後、アナログデータレコーダ(周波数特性 $\text{DC} \sim 10\text{ kHz}$)に記録される。このデータレコーダから再生された約 10 s のデータをサンプリング周波数 20 kHz でデジタル変換 (12 bit) し、大形電子計算機(北海道大学大型計算機センター

図1 座標系および主な記号の定義

HITAC M-280H) によって処理した。

後流中心における u, v の rms 値は、 $|z| \leq 5h$ の範囲でほぼ一定(誤差 3.5% 以内)であった。したがって、乱れの二次元性は良好なものと考えられる。

2.2 大規模構造と小規模構造 1章の緒言で述べたように、瞬間速度 U, V および変動速度 u, v を次のように分解する。

$$U = \bar{U} + u, V = \bar{V} + v$$

$$u = \langle \tilde{u} \rangle + \tilde{u}' + u', v = \langle \tilde{v} \rangle + \tilde{v}' + v'$$

本論文では、 $\langle \tilde{u} \rangle, \langle \tilde{v} \rangle$ を基本速度変動、これに寄与する構造を基本構造： $\tilde{u}', \tilde{v}'$ を大規模速度変動、これに寄与する構造を大規模変動構造： u', v' を小規模速度変動、これに寄与する構造を小規模構造とよぶことにする。これらをまとめると図2のようになる。

$\tilde{u}, \tilde{v}$ は平均渦放出周波数 f_K と同程度の周波数帯、 u', v' は f_K よりも高周波数帯にあるから、 u, v をデジタルローパスフィルタ(カットオフ周波数 $4f_K$)に通してえられた出力を $\tilde{u}, \tilde{v}$, デジタルハイパスフィルタ(カットオフ周波数 $4f_K$)に通してえられる出力を u', v' とした。カットオフ周波数をこの値に設定したのは、著者らの直観によるもので必ずしも客観的な根拠があるわけではない。ただ、 $4f_K$ が後流中心における u の変動周波数の2倍であることを注意しておきたい。直観的にいえば、物体から周期的に放出される渦の $1/4$ 以下のスケールのもを小規模構造とよんでいることになる。

2.3 位相の定義と基準信号 位相の決定は、基準信号検出位置(2.1節参照)における x, y 軸方向の速度変動成分 u_r, v_r にそれぞれ $2f_K, f_K$ を中心とするごくせまい周波数帯の変動のみを通すデジタルバンドパスフィルタをかけてえられた信号 u_f, v_f によって行った。図3は、同時刻における u_r, v_r, u_f, v_f および測定線上の $y/h = 3.0$ の高さの u ならびに位相 ϕ との関係を示す。位相 ϕ は次式で定義する。

図2 乱流後流中の速度変動の分割

$$\varphi = \pi \left(\frac{t - t_{1,i}}{t_{2,i} - t_{1,i}} \right) \quad (t_{1,i} \leq t \leq t_{2,i})$$

$$\varphi = \pi \left(\frac{t - t_{2,i}}{t_{1,i+1} - t_{2,i}} \right) + \pi \quad (t_{2,i} \leq t \leq t_{1,i+1})$$

ここに $t_{1,i}$ は時刻 $t=0$ から i 番めに $v_f=0$, かつ $dv_f/dt > 0$ となる時刻であり, $t_{2,i}$ は i 番めに $v_f=0$, かつ $dv_f/dt < 0$ となる時刻である。

測定線上の大規模構造の長さスケール, 循環, y 方向位置に変動のあることはすでに述べた。長さスケールの変動はとくに v_f の周期 T_v に影響を与えていると思われる。また y 方向位置に変動がなければ, u_f の周期 T_u は平均渦放出周期 $T_K (=1/f_K)$ の $1/2$ となるはずである。図3の u_f と u を比較すると, u_f が不規則となる時刻(図中の矢印)では, u が乱流波形を示している。これは, この時刻に検出された大規模構造の y 方向位置が, 外側にずれたためと推測される。

本論文では, これらの特徴を考慮して, 大規模構造のうち, スケールや y 方向位置の変動が大きいものを位相平均から除外するために, v_f, u_f の半周期 $T_v/2, T_u/2$ ごとに次の条件をつけた。

$$0.85 T_K/2 \leq T_v/2 \leq 1.15 T_K/2$$

$$0.3 T_K/4 \leq T_u/2 \leq 1.7 T_K/4$$

T_v の条件を満たす波形は全体の92%, T_u の条件を満たす波形は全体の85%であった。したがって両方の条件を満たす波形は全体の75%であり, 抽出された波形は平均880周期であった。なお, 位相平均は一周期を120等分し, 連続二周期について行った。

図3 基準信号 u_f, v_f と位相 φ の関係

3. 実験結果および考察

3.1 変動量の時間平均 図4に種々の速度変動波形の一例を, 図5にその変動エネルギーと速度相関の時間平均分布を示す。大規模変動エネルギー $\langle \bar{u}^2 \rangle$ は x 方向の全変動エネルギー $\bar{u}^2$ の80%程度をしめている。基本速度変動エネルギーのうち $\langle \bar{u}^2 \rangle$ は $\langle \bar{v}^2 \rangle$ に比べかなり小さいが, 小規模変動エネルギーについては $\bar{u}^2, \bar{v}^2$ はほぼ等しい。また大規模変動による速度相関 $\overline{u'v'}$ は, 時間平均速度相関 $\overline{uv}$ とほぼ等しい。これらの結果から, 大規模変動は乱流後流中で主要な力学的役割をになっていることがわかる。

3.2 基本構造と乱流分布 図6は基本構造の速度ベクトル $(\langle \bar{u} \rangle + \bar{U} - U_c, \langle \bar{v} \rangle)$ の分布を示す。ここに U_c は大規模構造の x 方向の移動速度(ここでは渦中心の移動速度)である。 x 方向の速度成分 $\langle u \rangle$ から U_c をひくことによって, 渦とともに移動する座標系からみたベクトル場がえられる。

図4 速度変動の各成分波形の一例

図5 速度変動エネルギーおよび相関(横軸はこれらを U_0^2 で割ったものの100倍を示す)

U_c は, $x/h=8.0$ を中心として流れ方向に $\Delta x (=0 \sim 0.9h)$ 離れた 2 点における y 方向速度変動から求めた。すなわち平均渦放出周波数 f_K をもつ変動成分の位相差 θ を求め, $U_c = 2\pi\Delta x f_K / \theta$ とした。一般に U_c は y の関数であるから, 渦中心の移動速度を求めるために, あらかじめ両者の関係を実験的に求めておき, ある y における U_c を用いたときの速度ベクトル場の渦中心の y 座標が, 最初に仮定した y 座標と一致するまで U_c を順次変化させて試行錯誤をくり返した。この結果, 移動速度として $U_c/U_0=0.815$, 渦中心の y 座標として $y/h=0.50$ がえられた。位相 φ と x 方向座標との間には, $x = U_c\varphi / 2\pi f_K$ の関係があるので, これにより位相軸を x 軸に変換することができる。

図 7 は渦とともに動く座標系から見た流線である。流れ関数 $\langle \tilde{\psi} \rangle$ は, 次式で定義した。

$$\langle \tilde{\psi} \rangle = \langle \tilde{\psi}_0 \rangle + \int \{ (\langle U \rangle - U_c) dy - \langle V \rangle dx \}$$

ここに $\langle \tilde{\psi}_0 \rangle$ は任意定数である。

図 8 は乱流間欠関数 I の位相平均 $\langle I \rangle$ の分布である。 I は $(du'/dt)^2$ (t : 時間) の短時間平均値がしきい値 e_{th} より大きい時 $I=1$, 小さい時 $I=0$ となる関数である。平均時間は平均渦放出周期 $1/f_K$ の $1/10$ とし,

図 6 基本構造による速度ベクトル ($\langle U \rangle - U_c, \langle V \rangle$)

●: 渦中心, ×: あん部点,
----: 乱流境界線 (以下同様)

図 7 基本構造の流線

e_{th} は I と u' の対応を調べ, 妥当な値 $[(du'/dt)^2]$ の長時間平均の 0.2% を設定した。なお, v' について同様に求められた I は, u' についてのものと大差なかった。

図 9 は乱流間欠数 I が 1 から 0 に立ち下がるひん度の分布である。流れは図中, 左から右であるから, このひん度が高い位置では, その右側が乱流, 左側が非乱流域となる確率が高いといえる。したがって等高線の尾根を結ぶ曲線 (りょう線) の右側が乱流, 左側が非乱流となる確率が高い。 I が 0 から 1 に立ち上がる場合についても同様にりょう線をえがくことができる。本論文ではこのりょう線を乱流境界線とよぶことにする。

図 10 は渦度 $\langle \tilde{\omega} \rangle = \partial \langle V \rangle / \partial x - \partial \langle \tilde{u} \rangle / \partial y$ の

図 8 乱流間欠関数の位相平均 $\langle I \rangle$ (等高線の間隔は 0.1)

図 9 I が 1 から 0 に立ち下がる頻度 $\langle \tilde{\omega} \rangle h / U_0$

図 10 基本構造内の渦度分布 (等高線の間隔は 0.2)

(a) $\langle u'^2 \rangle / U_0^2 \times 10^3$ (等高線の間隔 8)

(a) $\langle v'^2 \rangle / U_0^2 \times 10^3$ (等高線の間隔 8)

(b) 基本速度変動 $\langle \tilde{u}^2 \rangle / U_0^2 \times 10^3$ (等高線の間隔 2)

(b) 基本速度変動 $\langle \tilde{v}^2 \rangle / U_0^2 \times 10^3$ (等高線の間隔 8)

(c) 大規模速度変動 $\langle \tilde{u}'^2 \rangle / U_0^2 \times 10^3$ (等高線の間隔 5)

(c) 大規模速度変動 $\langle \tilde{v}'^2 \rangle / U_0^2 \times 10^3$ (等高線の間隔 3)

(d) 小規模速度変動 $\langle u'^2 \rangle / U_0^2 \times 10^3$ (等高線の間隔 1)

(d) 小規模速度変動 $\langle v'^2 \rangle / U_0^2 \times 10^3$ (等高線の間隔 1)

図 11 主流方向の変動エネルギー

図 12 主流と直角方向の変動エネルギー

分布である。渦度は渦中心付近で最大となり、等渦度線はほぼ同心円状である。渦(基本構造)の循環 Γ は、 $\Gamma/U_0 h = 2.1$ である。渦放出の一周期の間に、はく離点から放出される循環 Γ_0 は $(1/2)(1 - C_{pb})U_0^2/f_K$ (C_{pb} : 背圧係数) であるから、 $C_{pb} = -1.08^{(8)}$ とするとき $\Gamma/\Gamma_0 = 0.3$ となる。これは Davies⁽²⁾ が D 形断面柱に対して求めた値 0.26 に近く、Cantwell-Coles⁽⁶⁾ の結果を円柱の 8 倍下流に外挿した値 0.35 よりもやや小さい。

3・3 速度変動エネルギー分布 x 方向および y 方向の速度変動エネルギー分布をそれぞれ図 11, 12 に示す。これらの分布図のうち、

(a) は速度変動 u, v のエネルギー $\langle u^2 \rangle, \langle v^2 \rangle$ である。 $\langle u^2 \rangle$ は渦中心で最大となり、あん部点の方向に等高線が引きのばされている。これに対して $\langle v^2 \rangle$ は、符号の異なる二つの渦の中間領域で最大となっている。

(b) は基本速度変動のエネルギー分布である。渦中心付近とあん部点付近とで分布形状が異なるのは、図 4 からわかるように、 $\langle \bar{u} \rangle$ の波形が正弦波ではなく、高速側が比較的とがり、低速側が比較的平坦となっているためと思われる。 $\langle \bar{v} \rangle^2$ の等高線には、二つの渦の中間領域に最大値が現れる。

(c) は大規模変動のエネルギー分布である。 $\langle \bar{u}'^2 \rangle$ は渦中心で最大である。 $\langle \bar{u}'^2 \rangle$ の等高線が y 方向に引きのばされているのに対し、 $\langle \bar{v}'^2 \rangle$ のそれは x 方向に引きのばされている。また $\langle \bar{v}'^2 \rangle$ の大きな値はほぼあん部点と渦中心を結ぶ曲線の近くの領域に分布している。

(d) は小規模変動のエネルギー分布である。 $\langle u'^2 \rangle, \langle v'^2 \rangle$ はともによく似た分布形状をしており、渦中心よりも後流の外側方向に最大値の位置が移動している。等高線はほぼ同心円状に広がっている。なお、 $\langle \bar{u}'^2 \rangle, \langle \bar{v}'^2 \rangle$ の分布形状は Cantwell-Coles⁽⁶⁾ の結果と定性的により対応を示している。

3・4 変動速度相関 図 13(a)～(d) は変動速度相関の分布である。(a) は変動速度全体の相関 $\langle uv \rangle$ であり、あん部点付近に最大値がある。(b) は基本速度変動による相関 $\langle \bar{u} \rangle \langle \bar{v} \rangle$, (c) は大規模変動による相関 $\langle \bar{u}' \bar{v}' \rangle$ である。 $\langle \bar{u}' \bar{v}' \rangle$ はあん部点付近で最大となっている。このことは大規模変動構造が、あん部点で一定方向の変形を受けていることを示唆しており、これがレイノルズ応力生成の主要な原因と考えられる。(d) は小規模変動による相関 $\langle u' v' \rangle$ であり、その絶対値は他の相関に比べて 1 けた以上小さい。これが最大となる位置は渦中心からかなりずれている。あん部点付近の等相関線があん部点からの流出方向にほぼ

(a) $\langle uv \rangle / U_0^2 \times 10^3$ (等高線の間隔 4)

(b) 基本速度変動の相関 $\langle \bar{u} \rangle \langle \bar{v} \rangle / U_0^2 \times 10^3$ (等高線の間隔 3)

(c) 大規模速度変動の相関 $\langle \bar{u}' \bar{v}' \rangle / U_0^2 \times 10^3$ (等高線の間隔 3)

(d) 小規模速度変動の相関 $\langle u' v' \rangle / U_0^2 \times 10^4$ (等高線の間隔 2)

図 13 速度相関

平行であることから、小規模構造もあん部点において特定の方向に伸長を受けていることが想像される。

速度相関は、速度変動ベクトルの向きが x 軸に対し $\pm 45^\circ$ 方向に集中している時、大きな値をとる。これに対して速度変動ベクトルの向きが 0° あるいは 90° 方向に集中しているときは、速度相関は小さい。したがって、速度相関の大きさのみによっては、速度変動ベクトルがある特定の方向に集中している割合、ならびに方向そのものを知ることはできない。そこで本論文では速度変動ベクトルのある特定方向への集中割合 R を以下のように定義し、その分布を求めた。

速度変動ベクトルの集合を $(v_i, i=1, N)$ とする。座標軸 x, y を図 14 のように θ だけ回転させた座標軸を x_θ, y_θ とする。 v_i をそれぞれの座標系に対応する成分に分解すれば、 $v_i=(u, v)$, $v_i=(u_\theta, v_\theta)$ となる。図 14 の x_θ 軸方向の速度変動エネルギーの平均値 E_θ 、および x, y 面内の全変動エネルギー E_t (座標系の回転には無関係) となる。全変動エネルギーの中に占める x_θ 方向の変動エネルギーの割合 $r_\theta(=E_\theta/E_t)$ を用いて変動ベクトルの集中割合 R を次のように定義する。

$$R=1-\frac{r_{\theta\min}}{r_{\theta\max}}$$

ここに $\theta_{\max}, \theta_{\min}$ は、 r_θ がそれぞれ最大、最小となる θ である。また $r_{\theta\max}+r_{\theta\min}=1$, $|\theta_{\max}-\theta_{\min}|=\pi/2$ である。ある任意の点における速度変動ベクトルの方向が、互いに平行であれば $R=1$, $0\sim 2\pi$ の範囲に一樣に分布しておれば $R=0$ となる。

図 15 は R を大きさとし、 $\theta_{\max}$ を方向とするベクトルの場を示したものである。(a) は大規模速度変動によるもの。(b) は小規模速度変動によるものである。(a) ではあん部点付近の R が大きく、方向がほぼ 45° であん部点の流出方向に直角となっている。すなわちこの方向に大規模変動構造の伸長が生じていることがわかる。これはこの領域で $\langle \tilde{u}'\tilde{v}' \rangle$ が最大となることに対応している。なお、乱流境界線はこれらのベクトルにほぼ垂直に交わっている。これは興味深いことで

図 14 座標軸の回転と速度成分

ある。(b) に示す小規模速度変動に対する R は (a) の場合よりもかなり小さいが、 $R=0$ ではないことから、小規模構造もあん部点の流出方向をはじめとする特定方向に変形をうけていると思われるが、その詳細は明らかでない。

4. 結 論

本論文では、垂直平板の乱流後流 ($x/h=8.0$) における速度変動を、基本変動、大規模変動、小規模変動の 3 成分に分解し、それぞれの特性と相互の関連を実験的に求めた。レイノルズ数は 2.3×10^4 である。主な結果を要約すれば、次のとおりである。

- (1) 大規模変動のエネルギーは、小規模変動のエネルギーよりもはるかに大きい。
- (2) 大規模変動のエネルギーは、渦中心で最大であり、等エネルギー線は渦中心からあん部点の方向に引きのばされている。またこれによるレイノルズ応力は、あん部点で最大値をとり、その大きさは時間平均のレイノルズ応力と同程度である。大規模変動は中間領域の後流中における乱れの主要な構成要素である。
- (3) 小規模変動のエネルギーが最大となる位置は、渦中心よりもいく分後流の外側方向にずれている。

(a) 大規模速度変動

(b) 小規模速度変動

図 15 速度変動エネルギーの集中方向およびその大きさを示すベクトル図

(4) 大規模変動の速度相関は、あん部点で最大となる。

(5) 大規模速度変動ベクトルは、あん部点で主流方向に対して約 45° 傾斜している。

本研究にあたり、実験遂行上の援助を受けた北海道大学工学部、鈴木雍宏博士、ならびに実験装置の作製に協力された山崎輝夫、山保敏幸両技官に謝意を表す。

文 献

(1) Papailiou, D. D. and Lykoudis, P. S., *J. Fluid Mech.*, **62**

(1974) 11.

(2) Davies, M. E., *J. Fluid Mech.*, **75**(1976) 209.

(3) Cantwell, B. J., *Ph. D. Thesis, Calif. Inst. of Tech.*, (1975).

(4) Boisson, H. C., ほか 2 名, *IMFT Rep.*, No. M 3-39(1981).

(5) Boisson, H. C., ほか 3 名 (Michel, R., ほか編), *Unsteady Turbulent Shear Flows*, (1981), 262, Springer-Verlag.

(6) Cantwell, B. and Coles, D., *J. Fluid Mech.*, **136**(1983) 321.

(7) 木谷・松村, 機講論, No. 844-6(昭 59-3), 9.

(8) Bearman, P. W. and Trueman, D. M., *Aeronaut. Q.*, **23**(1972) 229.