三次元的な強いねじれ形状を有する
遷音速タービン翼間流れの数値解析*

小 屋 雅 彦**, 小 竹 進***

Numerical Analysis of Fully Three-Dimensional Flow
in Transonic Turbine Cascades

by Masahiko KOYA and Susumu KOTAKE

In order to calculate transonic flows in highly three-dimensionally twisted turbine blade cascades, the finite volume integral method of solving the governing equations is implemented for the treatment of boundary conditions and the discretization scheme. The developed scheme reduces the discretization error associated with the distorted grid configuration of highly three-dimensional blades. With the developed method, flows in two typical turbine blade cascades has been calculated with two kinds of treatment of energy equation.

Key Words: Compressible Flow, Gas Turbine, Transonic, Inviscid, Computational Fluid Dynamics, Three-Dimensional

1. 序 論

タービン翼列を通過する遷音速流れあるいは亜音速流れを数値解析する目的で、時間変化項を含む質量、運動量およびエネルギー式を直接時間と空間について積分し、各有限体積内で各保存則が満たされる計算法についての研究が近年盛んに進められ、タービン翼間流れに適用されてる^{(1)~(5)}。しかしながら、実機のタービン翼列は二次流れを抑制する空力設計法の進歩とともにその形状は三次元的なねじれが強くなり、かつその流れは高亜音速から遷音速域であるにもかかわらず、上記計算法の適用は低亜音速流れかあるいは三次元的なねじれの弱い翼列内の流れに限られている。

三次元的なねじれの強い遷音速タービン翼列内の流れの数値解析においては、解の収束性と計算精度上、翼面境界条件と格子点の設定に特別の考慮が必要である。ここでは、流れの変化の激しい翼前縁部および後縁部において微小距離だけ離れた2点を想定し、流束の連続性および翼面境界条件を共に満足させる特別な取扱いを行い、解の収束性・精度を高めた。また、有限

体積側面内の格子点における半径方向および周方向ベクトルの向きが有限体積中心点での向きと異なることにより、体積積分についての離散化において発生する誤差を抑制するために新たに補正項を加えた。

本計算法の確立により、従来不可能であった強いねじれ形状を有する三次元遷音速タービン翼間内の流れの数値解析が新たに可能となった。

本計算法の適用例として、最新のジェットエンジン用高圧タービンの静翼および動翼内の流れを選び、三次元的な速度ベクトル場および静圧場について考察を行った。

記 号

C_a : 軸コード長さ m
 e : 内部エネルギー
 p : 圧力 N/m^2
 R_r : ロータルピ
 r : 半径方向座標
 T : 温度 K
 t : 時間 s
 w : 速度 m/s
 x : 軸方向座標
 α : 上流境界での半径方向流入角

* 昭和59年8月29日 第927回講演会において講演、原稿受付 昭和59年1月27日。

** 正員、石川島播磨重工業(株) (〒188 田無市向台町3-5-1)。

*** 正員、東京大学工学部 (〒113 東京都文京区本郷7-3-1)。

β : 上流境界での周方向流入角

θ : 周方向座標

κ : 比熱比

ρ : 密度 kg/m^3

Ω : 角速度

Δt : 時間幅

添 字

i : 軸方向指数

j : 半径方向指数

k : 周方向指数

0: よどみ点条件

t : 時間

x : 軸方向成分

r : 半径方向成分

θ : 周方向成分

2. 基礎式

2.1 基礎式 三次元非粘性流れについての基礎式を翼に固定した円筒座標系で表すと

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho w_x \\ \rho w_r \\ \rho w_\theta \\ \rho R_r - p \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho w_x \\ \rho w_x^2 + p \\ \rho w_r w_x \\ \rho w_\theta w_x \\ \rho w_x R_r \end{pmatrix} \\ & + \frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} \rho w_r \\ \rho w_x w_r \\ \rho w_r^2 + p \\ \rho w_\theta w_r \\ \rho w_r R_r \end{pmatrix} \\ & + \frac{\partial}{\partial \theta} \begin{pmatrix} \rho w_\theta \\ \rho w_x w_\theta \\ \rho w_r w_\theta \\ \rho w_\theta^2 + r p \\ \rho w_\theta R_r \end{pmatrix} \\ & - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \{p + \rho(w_\theta + r\Omega)^2\}/r \\ -2\rho w_r \Omega \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} = 0 \quad \dots (1)$$

である。ここに、

$$R_r = e + \frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2} - \frac{r^2 \Omega^2}{2}$$

また、状態方程式は

$$p = \rho(\kappa - 1) \left(R_r - \frac{p}{\rho} - \frac{w^2}{2} + \frac{r^2 \Omega^2}{2} \right) \dots (2)$$

となる。熱の出入りのない非粘性流に対しては、エネ

ルギ式はその解として全温一定の条件で与えられる。

2.2 格子点作成 計算領域は1ピッチの翼間で構成され、それぞれ翼列上流側、下流側に翼弦線方向に拡張される。計算領域は x, r および θ 方向の面によって六面体の有限体積体の集合に分割される。軸方向の面は境界条件の指定により任意の不等間隔に分割され、半径方向の面は等間隔分割であるが、内側壁面および外側壁面近傍ではその間隔を半分にしている。周方向の面は翼間1ピッチ間を等間隔分割しているが、境界近傍では同様にその間隔は半分にしてある。格子形状概要を図1に示す。翼形状の三次元的な強いねじれを反映し、得られる有限体積体はねじれた六面体となる。格子点作成に用いられる翼座標は空力翼設計プログラムによるディスクファイルを介して与えられる。

2.3 有限体積法による離散化 基礎式は有限の時間および体積について積分され離散化される。空間微分項の体積積分は有限体積体の6面についての面積分により表すことができ、面積分値は各面上における状態量(速度・圧力など)の値が一定であると仮定することにより、つぎの式(3)~(5)が得られる。

$$\begin{aligned} \iint \frac{\partial F}{\partial x} dv dt &= \Delta t \{ F_{i+1,j,k} S_{xx\ i+1,j,k} \\ &- F_{i-1,j,k} S_{xx\ i-1,j,k} - F_{i,j+1,k} S_{rx\ i,j+1,k} \\ &+ F_{i,j-1,k} S_{rx\ i,j-1,k} - F_{i,j,k+1} S_{tx\ i,j,k+1} \\ &+ F_{i,j,k-1} S_{tx\ i,j,k-1} \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint \frac{\partial F}{r \partial \theta} dv dt &= \Delta t \{ F_{i,j,k+1} S_{t\theta\ i,j,k+1} \cos(\theta_{i,j,k+1} - \theta_{i,j,k}) \\ &- F_{i,j,k-1} S_{t\theta\ i,j,k-1} \cos(\theta_{i,j,k} - \theta_{i,j,k-1}) \dots \dots (4) \end{aligned}$$

図1 格子形状

$$\begin{aligned}
& \iint \frac{\partial F}{\partial r} dv dt \\
& = \Delta t \{ F_{i,j+1,k} S_{rr\ i,j+1,k} \cos(\theta_{i,j+1,k} - \theta_{i,j,k}) \\
& \quad - F_{i,j-1,k} S_{rr\ i,j-1,k} \cos(\theta_{i,j,k} - \theta_{i,j-1,k}) \\
& \quad - F_{i+1,j,k} S_{xr\ i+1,j,k} \cos(\theta_{i+1,j,k} - \theta_{i,j,k}) \\
& \quad + F_{i-1,j,k} S_{xr\ i-1,j,k} \cos(\theta_{i,j,k} - \theta_{i-1,j,k}) \\
& \quad - F_{i,j,k+1} S_{tr\ i,j,k+1} \cos(\theta_{i,j,k+1} - \theta_{i,j,k}) \\
& \quad + F_{i,j,k-1} S_{tr\ i,j,k-1} \cos(\theta_{i,j,k} - \theta_{i,j,k-1}) \\
& \quad - F_{i,j,k+1} S_{tt\ i,j,k+1} \sin(\theta_{i,j,k+1} - \theta_{i,j,k}) \\
& \quad - F_{i,j,k-1} S_{tt\ i,j,k-1} \sin(\theta_{i,j,k} - \theta_{i,j,k-1}) \} \\
& \quad \dots\dots\dots (5)
\end{aligned}$$

各点における投影面積成分 (S_{xx} , S_{xr} など) は, その点を中心とし有限体積体を構成する 27 点の格子点の座標値を用いて幾何学的計算により求められる。これらの投影面積成分値はそのベクトル和が閉じることになる。すなわち式 (3) ~ (5) において F の値を一定とする時, 右辺項の値は各々零となる必要がある。

上式の離散化においては有限体積体は半分ずつ重複することになり, その各面を横切る流束は一つおきの有限体積体の対応する面を横切る流束と相殺関係を成すが, 各面における状態量は隣接する計算点自身の値を用いることができる。一方, 有限体積体が重複しない離散化を行った場合, その各面を横切る流束は隣接する有限体積体の対応する面と相殺関係を成すが, 各面における状態量値は隣接する計算点での状態量値を用いて内挿により推定することになる。

時間微分項の積分は,

$$\begin{aligned}
& \iint \frac{\partial F}{\partial t} dv dt = \{ F_{i,j,k}^{t+\Delta t} - (1-\varepsilon) F_{i,j,k}^t \\
& \quad - \frac{\varepsilon}{6} (F_{i+1,j,k}^t + F_{i-1,j,k}^t \\
& \quad + F_{i,j+1,k}^t + F_{i,j-1,k}^t + F_{i,j,k+1}^t + F_{i,j,k-1}^t) \} \Delta v_{i,j,k} \\
& \quad \dots\dots\dots (6)
\end{aligned}$$

となる。ここに ε は人工粘性係数であり, 解を安定させるために必要であるが全圧損失をもたらすので可能な限り小さい値が望ましい。上述の計算法では $\varepsilon = 0.1$ を用いた。時間増分幅は解の安定条件

$$\Delta t < \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\Delta x}{a + w_x} \right)_{\min}$$

を満たすように選ぶ必要がある。

3. 境界条件

3.1 上流境界条件 上流境界値として, 全圧 p_0 , 全温 T_0 , 半径方向流入角 α , 周方向流入角 β が与えられる。上流境界端での軸流速度は隣接する 3 点での値を用いて二次関数近似により求められる。半径方向お

よび周方向速度は軸流速度および半径方向, 周方向流入角により与えられる。

3.2 下流境界条件 下流境界で与えられる静圧分布 P は得られる流れ場に大きく影響する。ここでは空力設計点における軸対称流れについての半径方向運動方程式を満たす静圧分布を与えた。

3.3 翼表面境界条件 固体壁ではそれを横切る質量, 運動量およびエネルギーの流束は存在しない条件を課す。翼表面での各状態量は隣接する 3 点での値を用いて二次関数近似により求められる。翼表面での速度は外挿により得られた速度を翼表面上に投影し, その翼表面に平行な速度成分のみ再び各座標軸方向に投影して, 軸方向, 半径方向および周方向成分の値を与える。また, 翼前縁部では流れの変化が特に大きいために特別な取扱いが必要とされる。ここでは図 2 に示すように前縁端を点 1 と点 2 に分けて考える。点 1, 点 2 における各状態量値はそれぞれ隣接する 3 点での値を用いて二次関数近似により求められる。速度を除く状態量についてはその物理的な意味を考え点 1, 点 2 における値の平均値を点 1, 点 2 における値とする。速度については点 1, 点 2 各々について外挿により得られた値を翼表面における取扱いと同様に投影, 再投影することによって, 点 1 での速度は面 S_2 に沿い点 2 での速度は面 S_3 に沿うようにする。いま, 状態量の値を F とする時, 面 S_1 および面 S_2 を通る流束, 面 S_1 および面 S_3 を通る流束はそれぞれ,

$$\left(\frac{2F_7 + F_1 + F_2}{4} \cdot \text{Area } S_1 + F_1 \cdot \text{Area } S_2 \right)_t,$$

図 2 翼前縁部境界条件

$$\left(\frac{2F_1 + F_2 + F_3}{4} \cdot \text{Area } S_1 + F_2 \cdot \text{Area } S_3 \right)_i$$

で与えられる。面 S_2 および面 S_3 を横切る流束は存在しないから、面 S_1 および面 S_2 を横切る流束の和は、面 S_1 および面 S_3 を横切る流束の和に等しい。翼後縁端における取扱いも翼前縁部と同様であり、圧力についてはクッタの条件を満たしている。これらの翼表面境界条件の取扱いにより離散化に伴う誤差を減少させることができた。内側壁面および外側壁面についての取扱いも翼表面と同じである。

3.4 周期境界条件 翼表面を除く周期境界では1ピッチごとに周期性を仮定する。すなわち、背側延長上の周期境界での状態量の値は腹側延長上の対応する点の値に等しい。

3.5 初期値 初期値の設定には種々な方法が考えられるが、ここでは格子点全体でマッハ数分布を入力として与えた。この場合、温度・圧力は全温・全圧の保存よりきまるのですべての初期値が容易に与えられる。しかし、最初に仮定される初期値の良否が解の収束性に与える影響が大きいので、質量保存則をほぼ満たす繰返し数100回程度の解の速度場を用いて初期値の再設定を行ったほうが収束性が良い。

4. 計 算 例

上記計算法をタービン実機翼に適用した例を示す。対象とした翼は高圧タービンの静翼および動翼であり、それぞれケース1、ケース2とする。図3に見ら

表1 翼および流れ場諸元

		Case 1	Case 2
chord (mm)	hub	71.4	33.9
	mean	81.3	34.0
	tip	83.5	35.6
maximum thickness (mm)	hub	10.9	8.4
	mean	11.6	7.7
	tip	13.3	6.4
chord/pitch	hub	1.20	1.22
	mean	1.29	1.13
	tip	1.25	1.11
stagger angle (deg)	hub	53.0	33.5
	mean	54.0	37.8
	tip	49.6	44.0
span height (mm)	inlet	69.0	45.0
	outlet	44.0	45.0
inlet total pressure (N/m^2)		9.36×10^5	6.30×10^5
inlet total temperature (K)		1300.0	1150.0
inlet tangential flow angle (deg)	hub	0.0	46.0
	mean	0.0	46.0
	tip	0.0	31.0
inlet radial flow angle (deg)	hub	18.9	0.0
	mean	4.0	0.0
	tip	-10.9	0.0
outlet static pressure (N/m^2)	hub	5.05×10^5	4.27×10^5
	mean	5.04×10^5	4.06×10^5
	tip	5.34×10^5	4.18×10^5
inlet mach number		0.21	0.35
outlet mach number		1.05	0.32

れるようにその形状は強い三次元的なねじれを有する。翼諸元および流れ場の概要を表1に示す。本計算に用いられた格子点数は54(軸方向)×17(半径方向)×15(周方向)、記憶容量は2.3MBであり、FACOM 380を用いると1格子、1繰返し当たりのCPU時間は 6×10^{-4} sである。既述のように収束性の良い初期値を設定することにより、繰返し数約500回で収束解が得られる。計算結果の精度の検討例として流量を考えると、上流境界面と下流境界面を通る流量の差は全流量の約1%である。

ケース1では表1に示されるように増速比が大きく、アスペクト比が小さい高圧タービン静翼内の流れを考える。この翼列は出口マッハ数1.05の遷音速翼列である。計算結果を図4~7に示す。図4には47%スパン高さ位置における r 面での速度ベクトル線図を示す。各線分は r 面内の速度の向きと大きさを表現している。図5~7により三次元的な静圧場の様子がよく理解される。図5には7, 47および93%スパン高さにおける翼面静圧分布を、図6には7, 47および93%スパン高さにおける r 面での静圧分布を示す。また、図7には x/C_a の60, 90, 128%位置における x 面での静圧分布を示す。各々流れの三次元性をよく示している。なお、図6および図7中における1から10までの数字はその面内における最大圧力、最小圧力を各々 $p_{\max}$, $p_{\min}$ とすると

$$10(p - p_{\min}) / (p_{\max} - p_{\min})$$

を表している。また図7におけるP.S, S.Sはそれぞれ腹側翼面、背側翼面を表す。

ケース2では高圧タービン動翼内の流れを対象とし、エネルギーを直接解く場合と全温を一定とする場合について検討し、計算法の精度とともに静圧場に及ぼす影響について考察した。図8に示されるように、翼表面におけるスリップ条件により流れの方向を拘束されている翼列を出て下流境界端に向かうに従い質量

ケース 1

ケース 2

図3 翼形状

保存則を満たすべく全温一定の場合の流出角はエネルギー式を直接解く場合に比べ小さくなる。また図9には人工粘性による全圧損失分布の相違がもたらす静圧分布の変化の様子が示される。特に $x/C_a=0.90$ におい

てエネルギー式を直接解いた場合、全温一定の場合に比べ外壁側の静圧が内壁側に比べ相対的に小さくなっているが、これは外壁側での全温損失が内壁側での全温損失よりも大きいことによるものと考えられる。以上の2点を除き両者の結果はよく一致している。

5. 結 論

三次元的なねじれの強い形状を有するタービン翼列を通過する遷音速流れあるいは亜音速流れを数値解析

図4 47%スパン高さにおける速度ベクトル図

図5 翼面静圧線図

93% SPAN HEIGHT

47% SPAN HEIGHT

7% SPAN HEIGHT

図6 r面における静圧線図

図 7 X 面における静圧線図

全温一定の場合

エネルギー式を直接解く場合

図 8 47%スパン高さにおける速度ベクトル図

全温一定の場合

エネルギー式を直接解く場合

図 9 X 面における静圧線図

するために、時間変化項を含む質量、運動量およびエネルギー式を直接時間と空間について積分し、各有限体積内で各保存則が満たされる計算法について下記の改良を加え、収束性および精度の良い計算法を確立した。

(1) 三次元的なねじれの強い形状を有するタービン翼列内流れを対象とする場合、各有限体積体の26格子点における半径方向および周方向ベクトルの向きがその中心点での向きと異なるために、体積積分についての離散化表示式においてベクトル方向の偏向に伴う補正を行う必要がある。本計算法では式(6)、(7)において補正項を加えることにより離散化に伴う誤差を小さくすることができた。

(2) 翼前縁部および後縁部においては流れの変化が局所的に特に激しいことに伴い、解の収束性および精度を高めるために特別な取扱いが必要である。本計

算では、前縁端(後縁端)において微小の距離だけ離れた2点で、速度は各々翼背側、翼腹側に沿うものとし、温度・圧力などは2点での値は等しくその平均値で定義することにより、前縁部(後縁部)において流束の連続性および翼面境界条件を共に満足させることができ、解の収束性・精度を高めることができた。

また、エネルギー式を直接解く場合と全温を一定とする場合についての結果を比較検討し、計算法の精度とともに静圧場に及ぼす影響について考察を行った。

文 献

- (1) Denton, J. D., *ASME Paper*, No. 82-GT-239 (1982).
- (2) Hove, W. V., *ASME Paper*, No. 83-GT-119 (1983).
- (3) Thompkins, W. T., *AIAA Paper*, 83-0257 (1983).
- (4) Camus, J-J, *ASME Paper*, No. 83-GT-12 (1983).
- (5) Koya, M. and Kotake, S., *ASME Paper*, No. 84-GT-19 (1984).

討 論

〔質問〕 井 上 雅 弘〔九州大学工学部〕

(1) 計算例の翼列はあまり強いねじれを有していないように思われるが、具体的に一つの格子のねじれがどの程度かをお示し願いたい。

(2) 一般にねじれが強い格子系では、衝撃波が存在する場合、衝撃波の補獲が困難であるように思われる。式(4)、(5)の採用でこの点は改良できるとお考えか。

(3) 図8のベクトル線図では、全温一定とエネルギー式を解く場合の差がはっきりしない。圧力分布でお示し願えないか。また図9の結果より、断熱流れとするほうが正確だと考えてよいか。

〔回答〕 (1) 最もねじれの強い部分での格子のねじれは式(4)、(5)における $\Delta\theta$ で表示すると約 10° である。

(2) 式(4)、(5)における補正項によって、最も基本的な各有限体積体内における流量・運動量・エネルギーの保存の度合いが改善できており、したがって、衝撃波の補獲の問題についても改良されている。

(3) 図8において全温一定の場合の流出角はエネルギー式を解く場合に比べ約 0.5° 小さい。エネルギー式を解いた場合の全温の分布は最大でも1%未満であるが、全圧損失は3~5%と大きい。周期変動流れ等の非定常解析においてはエネルギー式を解くべきであるが定常流れの場合は、むしろ全圧損失分布に留意する方が肝要であり、全温一定の方が有利である。

〔質問〕 田 村 敦 宏

〔科学技術庁航空宇宙技術研究所〕

有限体積法による非粘性翼列流れの解析は最近かなり多くの論文が発表されているが、まだ境界付近の取扱いを含むいくつかの点で改良の余地があるものと思われる。本報告では離散化、境界の外そう精度の向上、前後縁近傍の処理法などに工夫がみられかなりの前進と思われる。さて有限体積法による翼列解析では、概して圧力分布については誤差の影響は少ないが、衝撃波のない領域での全圧、断熱流れにおける全温のように本来一定値を保つべきものが誤差の影響を受けて変動しマッハ数分布に大きな影響を与えている。

この点に関して、全圧と、エネルギー式を用いた場合の全温の一様性がどの程度か、又全温一定の場合とどの程度異なるかご教示願えれば幸いである。最後に前後縁の扱いにおいて微小距離とはどの程度か、又点1と2で圧力温度を等しくしているが、圧力、温度と速度ベクトルの評価点を変えて等しいとおかずに済ますことは可能か。

〔回答〕 (1) エネルギー式を解いた場合の全温の分布は1%未満であるが全圧損失は3~5%と大きい。

(2) 微小距離だけ離れた点1と点2は現実には同1の点であり、距離は零である。したがって、速度については、翼面境界条件を満たすため、点1と点2とでそれぞれ別の値を与えたが、スカラー量である圧力・温度等は等値とした。後者は別に考えても結局平均化するなどして同一の値にする必要がある。