非定常非線形熱伝導の数理解析*
(第1報, 基礎概念)

川下 研介**, 森川 吉郎***, 根本 栄治†

The Mathematical Analysis of Nonlinear Unsteady Heat Conduction
(1st Report, General Fundamental Idea)

by Kensuke KAWASHIMO, Kichiro MORIKAWA, and Eizi NEMOTO

In this paper, a new analytical method for the boundary value problem of the nonlinear unsteady heat conduction with temperature dependent thermal properties is presented.

Two non-equilibrium integral functions have been introduced: the function of the thermal conductivity $\Phi_1(\varphi)$ and the function of the heat capacity $\Phi_2(\varphi)$.

By setting the integration intervals of these functions to satisfy the relation $\Phi_1(\varphi) = \Phi_2(\varphi)$, the nonlinear heat conduction equation could be linearized.

This method is applicable to the cases such as linear, quadratic and exponential variations of the thermal conductivity and heat capacity.

Key Words: Thermal Conduction, Thermodynamics, Mathematical Analysis, Nonlinear Equation, Thermal Engineering

1. は し が き

著者らは、従来、非定常非線形熱伝導を明確にすることを目的として解析的研究^{(1)~(5)}を行ってきたが、本論文では、熱物性値がまず一次関数、次いで二次関数、および指数の温度関数で与えられるとき、初期条件、および境界条件を満足する厳密解をえたので、具体的な数値例をあげて、非線形熱伝導体の非定常熱伝導現象を明確にすることができた。よって、ここに報告するものである。

 x : 空間座標 $\mathcal{G}$: 熱伝導作用素 $\mathcal{J}$: 表面熱伝達作用素 α : 熱伝達率 δ : 変分 κ : 温度伝導率 $= \lambda_0 / c_0 \rho_0$ λ : 熱伝導率 ρ : 質量密度 φ : 非平衡度 Φ : 非平衡度関数

記 号

本論文で用いた主な記号は、次のとおりである。

 c : 比熱 b, q, r, s : 一次、二次および指数関数の係数 S : 非可逆エントロピ t : 時間 v : 体積 ($dv = dx_1 dx_2 dx_3$)

2. 新解析の基礎と表現

2.1 基礎方程式 熱伝導率、および比熱が一次関数で与えられる場合を考える。

$$\left. \begin{aligned} c\rho &= c_0\rho_0(1+p\varphi) \\ \lambda &= \lambda_0(1+q\varphi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

いま、三次元空間座標の中での非可逆エントロピは

$$S = \iint \left[c_0\rho_0(1+p\varphi)\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\lambda_0}{2}(1+q\varphi) \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \right)^2 \right] dv dt \dots\dots\dots (2)$$

で与えられる。

熱伝導基礎方程式は、非可逆エントロピの極小原理

* 昭和59年11月22日 第930回講演会において論文講演として講演、原稿受付 昭和59年4月24日。

** 正員、LLL 集団 (●162 東京都新宿区弁天町66)。

*** 正員、青山学院大学理工学部 (●157 東京都世田谷区千歳台6-16-1)。

† 正員、茨城工業高等専門学校 (●312 勝田市中根深谷津866)。

より

$$\delta S = 0 \dots\dots\dots (3)$$

である。

よって、次のように上式(3)は、熱伝導作用素 $\mathcal{J}$ によって

$$\begin{aligned} \delta S = & \left[c_0 \rho_0 p \left(\frac{1}{p} + \varphi \right) \frac{\partial}{\partial t} \right. \\ & \left. - \sum_{i=1}^3 \lambda_0 q \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{q} + \varphi \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \right] \varphi \equiv \mathcal{J}(\varphi) = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (4)$$

と表される。

ここで著者らは、非平衡度関数 $\Phi_1(\varphi)$, $\Phi_2(\varphi)$, および $\Phi(\varphi)$ を、式(5)~(8)のごとく定義する。

$$\Phi_1(\varphi) = \int_{1/q-1/p}^{1/q-1/p+\varphi} \left(\frac{1}{p} + \varphi \right) d\varphi \dots\dots\dots (5)$$

$$\Phi_2(\varphi) = \int_0^\varphi \left(\frac{1}{q} + \varphi \right) d\varphi \dots\dots\dots (6)$$

$$\Phi_1(\varphi) = \Phi_2(\varphi) \equiv \Phi(\varphi) \dots\dots\dots (7)$$

$$\Phi_1'(\varphi) = \Phi_2'(\varphi) = \Phi'(\varphi) = \frac{d\Phi}{d\varphi} \dots\dots\dots (8)$$

ゆえに、非線形熱伝導作用素 $\mathcal{J}$ は、線形熱伝導作用素 $\mathcal{J}$ へ変換できるので、式(4)は次式(9)となる。

$$\mathcal{J}(\Phi) = \left[c_0 \rho_0 p \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i=1}^3 \lambda_0 q \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right] \Phi = 0 \dots\dots\dots (9)$$

すなわちこれは、変分によってえられた式(4)の非線形熱伝導作用素が、非平衡度関数 $\Phi(\varphi)$ によって、線形熱伝導作用素へ変換できることを示している。

2・2 境界条件 一般の境界条件(第3種の境界条件)、次式(10)は

$$-\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \alpha \varphi \dots\dots\dots (10)$$

非平衡度関数 Φ で表される。上式(10)に、式(1)の λ を代入し、次式の α^* を導入すれば

$$\alpha^* = \alpha \left(\frac{1}{q} + \frac{\varphi}{2} \right) \dots\dots\dots (11)$$

表面熱伝達作用素 $\mathcal{J}$ は

$$\left(\lambda_0 q \frac{\partial}{\partial x} + \alpha^* \right) \Phi \equiv \mathcal{J}(\Phi) = 0 \dots\dots\dots (12)$$

となり、一般の境界条件を、非平衡度関数 Φ で表現することができる。

すなわち、 λ , および $c\rho$ が一次関数で与えられる場合の熱伝導作用素は、等価な非平衡度関数を導入することにより、定物性の場合の熱伝導作用素へ変換でき、同時に、一般の境界条件もこの非平衡度関数 Φ を用いて表面熱伝達作用素として表すことができる。

ここで、定義式(5)~(8)の幾何学的関係について考察する。

図1において、式(5), および式(6)は、台形

EFHI, および台形 ABDO を表し、積分範囲は、各々 $[1/q-1/p, 1/q-1/p+\varphi]$, および $[0, \varphi]$ で同一の面積を表し、 φ の方向へ $\pm(1/q-1/p)$ だけ平行移動した相互関係にあることを示している。

このことは、 λ と $c\rho$ が φ の一次関数で与えられる場合、式(4)に示す非線形熱伝導作用素が、互いに平行移動してえられる等価な非平衡度関数により、線形熱伝導作用素へ帰着できるという新しい解析的表現を提示している。

2・3 二次関数の場合 熱伝導率, および比熱が φ の二次関数で与えられる場合を考える。

$$\left. \begin{aligned} c\rho &= c_0 \rho_0 (1 + p\varphi) (1 + r\varphi) \\ \lambda &= \lambda_0 (1 + q\varphi) (1 + s\varphi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

式(2)と同様に、非可逆エントロピ S を求めると、次式(14)となる。

$$\begin{aligned} S = & \iint \left[c_0 \rho_0 (1 + p\varphi) (1 + r\varphi) \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^3 \frac{\lambda_0}{2} (1 + q\varphi) (1 + s\varphi) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 \right] dv dt \end{aligned} \dots\dots\dots (14)$$

よって、変分をとり、式(3)の条件より熱伝導作用素 $\mathcal{J}$ を求めると

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\varphi) = & \left[c_0 \rho_0 p r \left(\frac{1}{p} + \varphi \right) \left(\frac{1}{r} + \varphi \right) \frac{\partial}{\partial t} \right. \\ & \left. - \sum_{i=1}^3 \lambda_0 q s \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{q} + \varphi \right) \left(\frac{1}{s} + \varphi \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \right] \varphi = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (15)$$

で表される。

ここで、非平衡度関数 $\Phi_{pr}(\varphi)$, $\Phi_{qs}(\varphi)$, および $\Phi(\varphi)$ を、式(16)~(21)のごとく定義する。

$$\begin{aligned} \Phi_{pr}(\varphi) &= \int_{(1/p+1/r)/2}^{(1/p+1/r)/2+\varphi} \left(\frac{1}{p} + \varphi \right) \left(\frac{1}{r} + \varphi \right) d\varphi \\ &= \int_{(1/p+1/r)/2}^{(1/p+1/r)/2+\varphi} \left[\varphi_{pr}^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r} \right)^2 \right] d\varphi \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

図1 $\Phi_1(\varphi)$ と $\Phi_2(\varphi)$ の幾何学的関係

$$\varphi_{pr} \equiv \varphi + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{r} \right) \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{qs}(\varphi) &= \int_{(1/q+1/s)/2}^{(1/q+1/s)/2 + \varphi} \left(\frac{1}{q} + \varphi \right) \left(\frac{1}{s} + \varphi \right) d\varphi \\ &= \int_{(1/q+1/s)/2}^{(1/q+1/s)/2 + \varphi} \left[\varphi_{qs}^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{s} \right)^2 \right] d\varphi \quad \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

$$\varphi_{qs} \equiv \varphi + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{s} \right) \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$\Phi_{pr}(\varphi) = \Phi_{qs}(\varphi) \equiv \Phi(\varphi) \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$d\varphi_{pr} = d\varphi_{qs} = d\varphi \quad \dots\dots\dots (21)$$

よって、上式(15)の非線形熱伝導作用素は

$$\mathcal{J}(\Phi) = \left[c_0 \rho_0 p r \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i=1}^3 \lambda_0 q s \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right] \Phi = 0 \quad \dots\dots\dots (22)$$

となり、二次関数の場合も、式(1)の一次関数の場合と同様に、非線形熱伝導作用素を線形化できる。

ここで、式(16)、および式(18)で表される非平衡度関数の幾何学的関係を、図2、および図3に示す。二次関数の時も、一次関数と同等の関係が成り立つ。

また、第3種の境界条件の場合の表面熱伝達作用素も、式(12)と同様に求められる。

2・4 指数関数の場合 熱伝導率、および比熱が指数関数で与えられる場合を考える。

$$\left. \begin{aligned} c\rho &= c_0 \rho_0 (1 + p \exp \varphi) \\ \lambda &= \lambda_0 (1 + q \exp \varphi) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (23)$$

非可逆エントロピを求めると、次式(24)となる。

$$\begin{aligned} S &= \iint \left[c_0 \rho_0 (1 + p \exp \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^3 \frac{\lambda_0}{2} (1 + q \exp \varphi) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 \right] dv dt \quad \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

変分 $\delta S = 0$ より熱伝導作用素 $\mathcal{J}$ を求めると

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\varphi) &= \left[c_0 \rho_0 p \left(\frac{1}{p} + \exp \varphi \right) \frac{\partial}{\partial t} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=1}^3 \lambda_0 q \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{q} + \exp \varphi \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \right] \varphi = 0 \quad \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

と表される。

よって、非平衡度関数 $\Phi_1(\varphi)$ 、 $\Phi_2(\varphi)$ および $\Phi(\varphi)$ を、次式(26)～(28)のごとく定義する。

$$\Phi_1(\varphi) = \int_{\varphi_p}^{\varphi_p + \varphi} \left(\frac{1}{p} + e^\varphi \right) d\varphi \quad \dots\dots\dots (26)$$

$$\Phi_2(\varphi) = \int_0^\varphi \left(\frac{1}{q} + e^\varphi \right) d\varphi \quad \dots\dots\dots (27)$$

$$\Phi_1(\varphi) = \Phi_2(\varphi) \equiv \Phi(\varphi) \quad \dots\dots\dots (28)$$

ただし、 φ_p は

$$\varphi_p = \ln \frac{\varphi(1/q - 1/p) + e^p - 1}{e^p - 1} \quad \dots\dots\dots (29)$$

である。

ゆえに、式(25)の非線形熱伝導作用素は

$$\mathcal{J}(\Phi) = \left\{ c_0 \rho_0 p \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i=1}^3 \lambda_0 q \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right\} \Phi = 0 \quad \dots\dots\dots (30)$$

となり、一次関数、および二次関数の場合と同様に、線形熱伝導作用素へ変換できる。

ここで、図4に、非平衡度関数 $\Phi_1(\varphi)$ 、および $\Phi_2(\varphi)$ の幾何学的関係を示す。

よって、指数関数の場合も、一次関数、および二次関数の場合と同様に、非平衡度関数の幾何学的意味を明確にすることができた。

また、指数関数の場合の表面熱伝達作用素は、式(12)と同手法で求めることができる。

なお、本論文に示した等価面積をもつ非平衡度関数による線形化変換は、非線形熱伝導問題を、非可逆エ

図2 Φ_{pr} の幾何学的意味

図3 Φ_{qs} の幾何学的意味

更に, 中空球の基礎方程式

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \kappa \frac{q}{p} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right), \quad x_1 < x < x_2 \quad (39)$$

を, 条件式(32)のもとで解くと, 次式(40)の温度分布解をえる。

$$\begin{aligned} \varphi = & \left\{ \frac{1}{q^2} + \frac{2}{x} \left[x_1 \Phi_1 + (x_2 \Phi_2 - x_1 \Phi_1) \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_1 \Phi_1 - (-1)^n x_2 \Phi_2}{n} \sin \frac{n\pi x}{x_2 - x_1} \right. \right. \\ & \left. \left. \times e^{-\kappa \frac{q}{p} \left(\frac{n\pi}{x_2 - x_1} \right)^2 t} \right] \right\}^{1/2} - \frac{1}{q} \quad (40) \end{aligned}$$

式(36), (40)も, ϑ 関数などを用いれば, 式(34)と同様に, 収束のよい級数に変換することができる。

3・2 境界値問題2 (両端等温冷却条件)

次に両端等温冷却条件の場合の厳密解を求める。式(31)の基礎方程式を, $x_1=0, x_2=l$ の場合

初期条件: $\Phi[\varphi(x, t=0)] = \Phi_0$

$$\left. \begin{aligned} \text{境界条件: } \Phi[\varphi(x=x_1, t)] &= 0 \\ \Phi[\varphi(x=x_2, t)] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

で解くと, 次式(42)の温度分布解をえる。

$$\varphi = \left\{ \frac{1}{q^2} + 2\Phi_0 \left[\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l} \times e^{-\kappa \frac{q}{p} \left[\frac{(2n+1)\pi}{l} \right]^2 t} \right] \right\}^{1/2} - \frac{1}{q} \quad (42)$$

また, 式(34)と同様に, t の小さい領域で収束のよい級数を ϑ 関数などにより求めると, 次の級数解をえる。

$$\varphi = \left\{ \frac{1}{q^2} + 2\Phi_0 \left[1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \operatorname{erfc} \frac{nl+x}{2\sqrt{\kappa qt/p}} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \operatorname{erfc} \frac{(n+1)l-x}{2\sqrt{\kappa qt/p}} \right] \right\}^{1/2} - \frac{1}{q} \quad (43)$$

この解は, $t \rightarrow 0$ の温度分布の検討に特に有用である。

更に, 円筒問題を考え, 基礎方程式(35)を, 式(41)の初期条件, および境界条件で解くと, 次式(44)の温度分布解をえる。

$$\varphi = \left[\frac{1}{q^2} + 2\Phi_0 \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(x_1 \alpha_n) U_0(x \alpha_n)}{J_0(x_1 \alpha_n) + J_0(x_2 \alpha_n)} \times e^{-\kappa \frac{q}{p} \alpha_n^2 t} \right]^{1/2} - \frac{1}{q} \quad (44)$$

ただし, $U_0(x \alpha_n)$, および α_n は, 式(37)の関数, および式(38)の根である。

また, 中空球の場合, 基礎方程式(39)を, 式(41)の初期条件, および境界条件で解くと, 次式(45)の温度分布解をえる。

$$\varphi = \left\{ \frac{1}{q^2} + \frac{2}{x} \left[\frac{2}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} x' \Phi_0 \sin \frac{n\pi x'}{x_2 - x_1} dx' \times \sin \frac{n\pi x}{x_2 - x_1} e^{-\kappa \frac{q}{p} \left(\frac{n\pi}{x_2 - x_1} \right)^2 t} \right] \right\}^{1/2} - \frac{1}{q} \quad (45)$$

これらの式は, t の大きい場合収束がよいが, t の小さい場合の収束性の良い級数については, 式(34), および式(43)と同様に, ϑ 関数などを用いて求めうる。

図6 p = 一定の温度分布 (両端温度固定)

図7 q = 一定の温度分布 (両端等温冷却)

図8 p = 一定の温度分布 (両端等温冷却)

4. 数 値 例

ここで、厳密解の数値例として、一次関数の場合の平板問題の温度分布を示す。

図5、および図6は、両端温度固定条件〔式(32)〕の厳密解である式(33)の非定常温度分布を p 、および q をパラメータとして変化させ示したものである。

式中の定数は、 $l=1$, $\kappa=1$, $\Phi_1=(\varphi_1/q+\varphi_1^2/2)_{\varphi_1=1}$, および $\Phi_2=(\varphi_2/q+\varphi_2^2/2)_{\varphi_2=0}$ として厳密解を求めた。

また、図7、および図8は、両端等温冷却条件〔式(41)〕の厳密解である式(42)の温度分布を求めたものである。

図5、6と同様、 p 、および q の係数の効果を表していることが分かる。

これらの2数値例は、一次元的な平板問題における非定常温度分布を示したものであるが、非線形熱伝導問題を解析する新しい数理解析手法として、工業的に十分活用できることを示唆している。

5. む す び

本論文では、非定常非線形熱伝導の境界値問題を解析することを目的とし、熱伝導率、および比熱が、非平衡度 φ の一次、二次、および指数の関数で表される場合を取り上げ、熱伝導率、および比熱の非平衡度関数 Φ が相等しくなる積分上限値、および下限値が存在するため、非線形熱伝導作用素が定物性の線形熱伝導作用素へ帰着できる新解析法を提示した⁽⁶⁾。

なお、一次元的熱流の場合の有限な厚さの平板、中空円筒、および中空球の厳密解を求めることができた。さらに、平板の数値例を挙げて具体化した。

文 献

- (1) 川下, 機論, 38-310 (昭47), 1471.
- (2) 川下・森川, 機論, 45-394, B (昭54), 842.
- (3) 森川・川下, 機論, 50-449, B (昭59), 87.
- (4) 根本・川下, 機講論, No. 831-1 (昭58-6), 220.
- (5) 根本・川下, 機講論, No. 834-11 (昭58-11), 65.
- (6) Weyl, H., *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, (1931), 4, Methuen.