壁近傍のレイノルズ応力モデル*

島 信 行**

A Reynolds-Stress Model for Near-Wall Regions

by Nobuyuki SHIMA

The Reynolds stress model for high Reynolds numbers proposed by Launder et al. is extended to near-wall regions of low Reynolds numbers. In the development of the model, particular attention is given to the high anisotropy of turbulent stresses in the immediate vicinity of a wall and to the behavior of the exact stress equation at a wall. A transport model for the turbulence energy dissipation rate is also developed by taking into account its compatibility with the stress model at a wall.

The model and the near-wall model of Hanjalić and Launder are applied to fully-developed pipe flow. Comparison of the numerical results with Laufer's data shows that the present model gives significantly improved predictions. In particular, the present model is shown to reproduce the sharp peak in the distribution of the streamwise turbulence intensity in the immediate vicinity of a wall.

Key Words: Turbulence, Second-Order Closure, Reynolds-Stress Model, Near-Wall Turbulence, Low-Reynolds-Number Turbulence

1. 緒 言

乱流を、モデル化されたレイノルズ応力の輸送方程式(応力方程式モデル)によって解く方法は、現在、乱流計算の有力な方法の一つである。このようなモデルは通常、壁から十分離れた高レイノルズ数領域を対象としており、境界条件は普遍則に立脚して壁から離れた点において与えられる。しかし、普遍則が適用できない流れも数多くあり、壁近傍の低レイノルズ数領域にも適用され境界条件も壁で直接与えられるようにモデルを拡張することが望まれる。

いわゆる $k-\varepsilon$ モデルに関してはこのような試みは数多くなされており、Patel ら⁽¹⁾によって種々のモデルの比較検討がされている。一方、応力方程式モデルに関しては二、三の研究が見られる程度である。Hanjalić-Launder⁽²⁾は拡張モデル(以下、HL モデル)を提案したが、実際の適用にあたっては種々の仮定の導入によって薄いせん断層に対する3方程式モデルに帰着させており、提案されたモデルの全体としての性能は不明のままである。Prud'homme-Elghobashi⁽³⁾は

モデル定数の変更を含む広範な修正を施したモデルを提案したが、その計算結果を見ると、3方向の乱れ強さの壁近傍分布は改善されていない。

本研究は、現在最も広く用いられている応力方程式モデルの一つである Launder ら⁽⁴⁾のモデル(以下、LRR モデル)を壁近傍の低レイノルズ数領域に拡張したモデルを提案し、それを HL モデルとともに円管内流に適用し Laufer⁽⁵⁾の実験結果と比較検討するものである。

2. 応力方程式

2.1 厳密方程式 非圧縮性の流れにおいて、レイノルズ応力を支配する厳密方程式は次式で与えられる⁽⁶⁾。

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \overline{u_i u_j} = & - \left(\overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \right) \\ & - 2\nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho} p \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \\ & - \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \overline{u_i u_j u_k} - \nu \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i u_j} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\rho} p (u_j \delta_{ik} + u_i \delta_{jk}) \right\} \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

ここで、 x_i はデカルト座標、 D/Dt は実質微分であ

* 昭和60年3月31日 第62期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和59年10月30日。

** 正員、静岡大学工業短期大学部(〒432 浜松市城北3-5-1)。

り、 u_i , U_i はそれぞれ速度の変動分、平均分である。また、 p は圧力の変動分であり、 ν は動粘度、 ρ は密度、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。諸量の上付きバーはアンサンブル平均を示しており、また添字に関しては和の規約が用いられている。

式(1)の右辺第1項は生成項、第2項は散逸項、第3項は再分配項(圧力・ひずみ相関項)、第4項は拡散項である。このうち、生成項および粘性拡散項は厳密に扱えるのでモデル化の必要はない。

2.2 LRR モデル 散逸項は、乱れエネルギーの散逸率 ε を用いて次式でモデル化される。

$$2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon \quad \dots\dots\dots (2)$$

再分配項は、次のようにモデル化される。

$$\frac{1}{\rho} p \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \phi_{ij,1} + \phi_{ij,2} + \phi_{ij,w} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで、

$$\phi_{ij,1} = -C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\begin{aligned} \phi_{ij,2} = & -\frac{C_2 + 8}{11} \left(P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P \right) \\ & - \frac{30C_2 - 2}{55} k \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \\ & - \frac{8C_2 - 2}{11} \left(D_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P \right) \quad \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{ij,w} = & \left\{ 0.125 \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) \right. \\ & \left. + 0.015 (P_{ij} - D_{ij}) \right\} \frac{k^{3/2}}{\varepsilon l} \quad \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

である。諸式において、 k は乱れエネルギーであり、 P_{ij} , D_{ij} , P は次のように定義されている。

$$P_{ij} = - \left(\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$D_{ij} = - \left(\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right) \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$P = - \overline{u_k u_l} \frac{\partial U_k}{\partial x_l} \quad \dots\dots\dots (9)$$

式(4), (5)中の C_1 , C_2 はモデル定数であり、 $C_1=1.5$, $C_2=0.4$ が与えられる。式(6)中の l は、流れに接する壁が一つの平面とみなせる場合には壁からの距離そのものであり、その他の場合には適当な一般化が示唆されている⁽⁴⁾。

拡散項のうち、圧力を含む項は無視され、 $\overline{u_i u_j u_k}$ は次のようにモデル化される。

$$\begin{aligned} \overline{u_i u_j u_k} = & -C_s \frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{u_i u_l} \frac{\partial}{\partial x_l} \overline{u_j u_k} \right. \\ & \left. + \overline{u_j u_l} \frac{\partial}{\partial x_l} \overline{u_k u_i} + \overline{u_k u_l} \frac{\partial}{\partial x_l} \overline{u_i u_j} \right) \quad \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

ここで、モデル定数 $C_s=0.11$ である。

粘性拡散項は厳密項であるが、高レイノルズ数モデルとしてはその寄与は小さいので無視される。

2.3 HL モデル 散逸項のモデル式(2)は次のように修正される。

$$2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \frac{2}{3} \varepsilon \left\{ (1-f_s) \delta_{ij} + \frac{\overline{u_i u_j} f_s}{2k/3} \right\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここで、 f_s は、局所乱れレイノルズ数

$$R_T = k^2 / (\nu \varepsilon) \quad \dots\dots\dots (12)$$

の関数であり、次式で与えられる。

$$f_s = 1 / (1 + R_T / 10) \quad \dots\dots\dots (13)$$

他の項については、この場合当然、粘性拡散項が復活するほかは、LRR モデルがそのまま適用される。 $\phi_{ij,w}$ については、特に検討されていないが、ここでは、それを含めて HL モデルと称する。

2.4 本モデル 壁において、HL モデルの散逸項は厳密式と同じ挙動をするが、再分配項は矛盾している。いま、平面壁上に x_1 - x_3 面がのるようなデカルト座標系 O - $x_1 x_2 x_3$ をとり、厳密式(1)の壁での挙動を調べると次のことが知られる。すなわち、再分配項は $\overline{u_1^2}$, $\overline{u_2^2}$, $\overline{u_3^2}$ 方程式においては零であり、 $\overline{u_1 u_2}$ 方程式においては一般に零でない有限値をとりそれが圧力寄与の拡散項と相殺する。一方、HL モデルの場合、再分配項のうち $\phi_{ij,2}$, $\phi_{ij,w}$ は零であり、 $\phi_{ij,1}$ の寄与によって $\overline{u_1^2}$, $\overline{u_2^2}$, $\overline{u_3^2}$ 方程式において一般に零でない有限値をとり、 $\overline{u_1 u_2}$ 方程式においては零になる。

この矛盾を解消するために、Lumley⁽⁷⁾による散逸項と再分配項の扱い方から出発する。それによれば厳密式中の散逸項と再分配項は次のように書き直される。

$$\begin{aligned} & -2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho} p \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ & = -\frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon + \left\{ \frac{1}{\rho} p_{(1)} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right. \\ & \quad \left. - 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon \right\} \\ & \quad + \frac{1}{\rho} p_{(2)} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \quad \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

ここで、 p は、変動分のみ寄与による $p_{(1)}$ と平均速度場も寄与する $p_{(2)}$ との和に分解されている。このように書いた場合、右辺第1項はもはやモデル化の必要のない高レイノルズ数型の散逸項であり、第2項は変動分のみを含む再分配項、第3項は平均速度場を含む再分配項である。モデル化において圧力寄与の拡散項はやはり無視するので、 $p_{(1)}$ を含む項、 $p_{(2)}$ を含む項とも前述の系の壁にて、 $\overline{u_1^2}$, $\overline{u_2^2}$, $\overline{u_3^2}$ 方程式のみならず $\overline{u_1 u_2}$ 方程式においても零になるとする扱いが妥当で

あろう。壁にて、 $2\nu\partial u_i/\partial x_k \cdot \partial u_j/\partial x_k$ は $(\varepsilon/k)\overline{u_i u_j}$ に等しく⁽⁹⁾かつ、式(14)の右辺第2項の高レイノルズ数モデルが式(4)であるとみなすことができるから、結局、第2項のモデル $\phi_{ij,1}^*$ として次式を与える。

$$\phi_{ij,1}^* = -C_1^* \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) \quad \cdots \cdots \cdots (15)$$

$$C_1^* = C_1 \{1 - (1 - 1/C_1) f_w\} \quad \cdots \cdots \cdots (16)$$

ここで、 f_w は、壁にて1、壁から十分離れた高レイノルズ数領域にて零になる関数である。Lumley は多くの因子の影響を考慮して複雑な形を与えているがここでは簡明な式(15)、(16)を採用する。

平均速度場を含む再分配項に関しては、 $\phi_{ij,2}$ はそのまま採用するが、壁効果分 $\phi_{ij,w}$ については再考が必要である。式(6)中の括弧内第1項の寄与はすでに式(15)、(16)に含まれていると考えられるし、また式(6)中の $k^{3/2}/(\varepsilon l)$ は壁にて零であり、 $\phi_{ij,w}$ を付加することの効果は壁の極く近傍ではほとんどないからである。そこで、次のモデル $\phi_{ij,w}^*$ を考える。

$$\begin{aligned} \phi_{ij,w}^* = & \left\{ \alpha \left(P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P \right) \right. \\ & + \beta \left(D_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P \right) \\ & \left. + \gamma k \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right\} f_w \quad \cdots \cdots \cdots (17) \end{aligned}$$

上式は壁から十分離れた高レイノルズ数領域で零に近づき、壁近傍で一定の効果を持ち、壁においては零になるという条件(前述の壁での条件)を満たしている。次に、 α, β, γ の値を定める。いま仮に $f_w = 1$ とすると、LRR モデルの誘導においてなされたように⁽⁴⁾、現在のモデルに対しても、対数則領域におけるレイノルズ応力の各成分の大きさが次のように算定できる。

$$\overline{u_i^2}/k = 0.925 + 4(2\alpha - \beta)/9 \quad \cdots \cdots \cdots (18)$$

$$\overline{u_2^2}/k = 0.465 - 4(\alpha - 2\beta)/9 \quad \cdots \cdots \cdots (19)$$

$$\overline{u_3^2}/k = 0.610 - 4(\alpha + \beta)/9 \quad \cdots \cdots \cdots (20)$$

$$\begin{aligned} (-\overline{u_1 u_2}/k)^2 = & \{(0.236 + \alpha) \overline{u_2^2}/k \\ & - (0.109 - \beta) \overline{u_1^2}/k + (0.182 - \gamma)\} / 1.5 \end{aligned} \quad \cdots \cdots \cdots (21)$$

ここで、添字1, 2, 3はそれぞれ、流れ方向、壁に直角方向、壁に沿って流れと直角の方向を示している。これらの式は仮想的な対数則領域におけるレベルであるが、試行数値計算のための各定数の概略値を得るために、これらを利用する。すなわち、壁の極く近傍でのレイノルズ応力成分の強い非等方性を実現するために、上記諸式において、何らかの基準で強い非等方性が見られるように諸定数の概略値を定める(現実の対数則領域では、関数 f_w の効果によって適正なレベル

が実現される)。そこで、一つの試みとして、 $k, \overline{u_i^2}, \overline{u_2^2}, -\overline{u_1 u_2}$ のそれぞれの分布における最大値が基準とされた。Laufer の実験(の低レイノルズ数の結果)によれば、このような値は、摩擦速度を U_τ として

$$\left. \begin{aligned} k/U_\tau^2 &\sim 4, \quad \overline{u_i^2}/U_\tau^2 \sim 0.95 \\ \overline{u_2^2}/U_\tau^2 &\sim 1.7, \quad -\overline{u_1 u_2}/U_\tau^2 \sim 0.9 \end{aligned} \right\} \quad \cdots \cdots \cdots (22)$$

である。これを式(18)~(21)に用いると

$$\alpha = 0.45, \beta = -0.03, \gamma = 0.08$$

が得られるが、できるだけ因子を減らすことが望まれるので、試行数値計算の結果、次の値が選ばれた。

$$\alpha = 0.45, \beta = 0, \gamma = 0.08 \quad \cdots \cdots \cdots (23)$$

拡散項については、もちろん粘性拡散項は維持し、 $\overline{u_i u_j u_k}$ については式(10)を採用する。

なお、関数 f_w については3・3節にて定める。

3. 散逸率方程式

本章では、応力モデルに現れる乱れエネルギーの散逸率 ε のモデル方程式について述べる。

3・1 LRR モデル 次式によって与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{D\varepsilon}{Dt} = & C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \\ & + \frac{\partial}{\partial x_m} \left(C_\varepsilon \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_m u_i} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) \quad \cdots \cdots \cdots (24) \end{aligned}$$

ここで、モデル定数 $C_{\varepsilon 1} = 1.44, C_{\varepsilon 2} = 1.9, C_\varepsilon = 0.15$ である。右辺の第1項、第2項は ε の生成と消滅を、第3項は拡散を表している。

3・2 HL モデル 式(24)の右辺第2項 $C_{\varepsilon 2} \varepsilon^2/k$ が $C_{\varepsilon 2} f_\varepsilon \varepsilon \bar{\varepsilon}/k$ によって置き換えられる。ここで、 $\bar{\varepsilon}, f_\varepsilon$ は次式で与えられる。

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon - 2\nu(\partial k^{1/2}/\partial x_i)^2 \quad \cdots \cdots \cdots (25)$$

$$f_\varepsilon = 1.0 - (0.4/1.8) \exp\{-(R_T/6)^2\} \quad \cdots \cdots \cdots (26)$$

この他の修正としては、粘性拡散項 $\nu \partial^2 \varepsilon / \partial x_k \partial x_k$ が復活するほかに、次のような平均速度場に関係した生成項 ψ が付加される。

$$\psi = C_{\varepsilon 3} \nu \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_j u_k} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_i} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_i} \quad \cdots \cdots \cdots (27)$$

諸定数に若干の変更があり、 $C_\varepsilon = 0.15, C_{\varepsilon 2} = 1.8, C_{\varepsilon 1} = C_{\varepsilon 2} - 3.5 C_\varepsilon = 1.275$ とされる。また、新たな定数 $C_{\varepsilon 3}$ に関しては、 $C_{\varepsilon 3} = 2.0$ が与えられる。

3・3 本モデル 応力方程式を縮約することによって乱れエネルギー k に対する式を導き、それを壁に適用すると(厳密式、HL モデル、本モデルのいずれに対しても)次式が得られる。

$$\varepsilon = \nu \partial^2 k / \partial x_i \partial x_i \quad \cdots \cdots \cdots (28)$$

さらに、この右辺の量に対する方程式を導き、それを壁に適用すると(HL モデル、本モデルのいずれに対

しても) 次式が得られる.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_i \partial x_i} \right) = -\nu \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_i \partial x_i} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_m} \left(\nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_i \partial x_i} \right) \quad (29)$$

したがって、応力モデルと ε モデルの壁における両立性の観点からは、これが壁において $\partial \varepsilon / \partial t$ と同じ挙動をすることが望まれる.

u_1, u_2, u_3 を壁近傍で展開し、 k および $\varepsilon [= \nu (\partial u_k / \partial x_i)^2]$ を計算すると

$$k = ax_2^2 + bx_2^3 + cx_2^4 + \dots \quad (30)$$

$$\varepsilon = \nu(2a + 4bx_2 + dx_2^2 + \dots) \quad (31)$$

となる. ここで、 a, b, c, d は x_1, x_3, t の関数である平均量である. 一般的な場合を扱うのは困難であるので、以下、平均量が x_2, t にのみ依存する場合を考える. 式(30), (31)を用いて式(29)の右辺を計算すると $(-2\nu^2 d + 24\nu^2 c)$ となるが、HL モデルの ε 方程式に対して同様の計算を行い壁における $\partial \varepsilon / \partial t$ を求めた結果はそれと一致しない. そこで HL の ε モデルに対して、付加項

$$\xi = \left\{ \left(-2 + \frac{7}{9} C_{\varepsilon 2} \right) \frac{\varepsilon \bar{\varepsilon}}{k} - \frac{1}{2} \frac{\bar{\varepsilon}^2}{k} \right\} f_w \quad (32)$$

を導入する. ここで

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon - \nu \partial^2 k / \partial x_i \partial x_i \quad (33)$$

である. 容易に確かめられるように、これによって、壁にて $\partial / \partial t (\nu \partial^2 k / \partial x_i \partial x_i)$ と $\partial \varepsilon / \partial t$ は一致する.

HL モデルにおける付加生成項 ψ は形が複雑で、しかも理論的根拠が確たるわけでもないので、ここでは採用しない. しかし、生成項を高レイノルズ数形のままだと保つと壁近傍で小さすぎる. ここでは、生成項に修正関数を乗じ、 $C_{\varepsilon 1}(1 + C_{\varepsilon 4} f_w)(\varepsilon/k)P$ とする.

モデル定数の値は $C_{\varepsilon} = 0.15$, $C_{\varepsilon 1} = 1.35$, $C_{\varepsilon 2} = 1.8$ とする. $C_{\varepsilon 1}$ に対しては、LRR, HL 両モデルの中間的な値が選ばれた. また、 $C_{\varepsilon 4}$ については、試行数値計算の結果、 $C_{\varepsilon 4} = 1.0$ が採られた.

2.4 節および本節において提示したモデルに現れる関数 f_w が依存する変数として、ここでは R_T ではなく、壁からの距離 x_2 を陽に含めた $\sqrt{k} x_2 / \nu$ を選ぶ. 多くの試行計算の結果、定められた関数は次式である.

$$f_w = \exp \{ -(0.015 \sqrt{k} x_2 / \nu)^4 \} \quad (34)$$

3.4 壁境界条件 散逸率 ε の壁面での境界条件としては、壁にて厳密に成立する次式を用いる.

$$\varepsilon = 2\nu (\partial k^{1/2} / \partial x_i)^2 \quad (35)$$

4. 数 値 解 法

まず、円管内発達流の条件のもとで、応力方程式、散逸率方程式および平均場に対する運動方程式を円筒

座標系において表し (ただし、時間微分項は維持)、それらを、定常解に対する摩擦速度 U_τ と管半径 R を用いて無次元化する. したがって、計算の支配パラメータはレイノルズ数 $R_\tau^* = U_\tau R / \nu$ である. 次に、等間隔差分によっても壁近傍の計算点が密となるように無次元半径方向座標 r を

$$r = (1/b) \tanh[\sigma \tanh^{-1}(b)] \quad (36)$$

によって、 σ に変換する ($b = 0.98$). 続いて、空間微分は中心差分で、時間微分は前進差分で置き換え、諸式を差分化する.

用いた数値解法は陰的な非定常解法である. 時間微分項から生じるもの以外で次時刻の値をとるとする項は当然拡散項であるが、応力方程式については、乱流拡散項のうちの $\{C_\sigma(k/\varepsilon) \overline{u^i u^j} \cdot \overline{u^i u^j}, i\}$, $\ast$ (上付き添字は反変成分, コマは共変微分を示す) の $\overline{u^i u^j}$ から生じる項および粘性拡散項とする.

壁境界条件については、 ε に対しては式(35)を二次精度で差分化したものを用い、その他の諸量は当然、零とおかれる. また、管中心においては、対称性の考察によって簡便化された諸式が用いられる.

以上述べた方法によって数値計算が行われたが、その際レイノルズ数の値は Laufer の実験 (の低レイノルズ数の場合) に対応する $R_\tau^* = 1050$ とされた.

時間刻みとしては、無次元時間 tU_τ/R を単位として、 $2 \times 10^{-4} \sim 10^{-3}$ が用いられた. 定常解への到達は、時間間隔 10 の間のそれぞれの変数の最大変化量とその変数の最終値との比の全域での最大値が 10^{-6} より小になるかどうかということによって判定された.

半径の分割数に依存しない解を得るために幾種かの分割数に対して計算が試みられた. 本モデルに対して分割数 70 の結果を基準にとると、分割数 60 の結果は、管内平均流速に基づくレイノルズ数が 0.43% 減、管摩擦係数が 0.86% 増であった. また、分割数 80 の結果は、それぞれ 0.04% 減、0.08% 増であった. これらによって、分割数 70 による解は十分な精度を有していると判断され、それが採用された.

5. 計 算 結 果 と 考 察

以下に諸量の分布を示すが、図において y は壁からの距離であり、シンボルは計算点位置を示している.

図 1 に軸方向平均速度 U の分布を壁座標において示す. 対数則領域において、本モデルの結果は、通常受け入れられている 2 種の対数則の中間に位置しほぼ妥当であるのに対し、HL モデルの結果はかなり上方に位置していることが知られる. これに対応して、管摩擦係数においては、HL モデルはブラジウス則に比

して7.0%低い値を与える。一方、本モデルでは1.6%高であり、より妥当な値を示している。ただ、本モデルの結果では、遷移層から対数則領域へ近づくのがやや急速すぎるように思われる。

図2には、レイノルズせん断応力 $\overline{uv}$ の壁近傍の分布を示す。これは平均速度分布と直接対応しているわけであるが、HLモデルでは粘性底層を除いて全般的に Laufer の値より低く、本モデルでは遷移層近傍で Laufer の値より高い部分が見られる。

図3～5には、それぞれ、軸方向、半径方向、周方向の乱れ強さ u' , v' , w' の壁近傍分布を示す。図3から知られるように、HLモデルでは、 u' 分布が壁のごく近傍で大きい極大値をもつという実験結果をまったく説明できない結果になっている。それに対して、本モデルでは、その値はまだやや小さいものの実験結果とほぼ同位置で最大値をとる傾向が示されている。さらに図4を見ると、HLモデルでは、 v' 分布の最大値の位置がむしろ u' の場合よりも壁に近いという受け入れられない結果になっている。この v' 分布についても、壁のごく近傍においては、本モデルのほうが Laufer の結果に近いことが知られる。ただ、本モデルの w' 分布は、図5から知られるように、 $U_{\tau}y/\nu=20\sim30$ 近傍で台状に近い分布になっている点がやや難点である。

図6には散逸率 ε の壁近傍分布を示す。図6中の Laufer のデータは、元の値に対して後に修正計算が施された結果を Hinze⁽⁹⁾より引用したものである。図6を見ると、HLモデルは ε の最大値において、本モデルは壁での ε の値において、より Laufer の結果に近いと言える。しかし、 ε については通常かなり大きい測定誤差が含まれていると考えられており、それほど明確な議論はできない。

紙幅の関係で幾つかの図を割愛したが、それらについて顕著な点にのみ触れる。管中心速度と管半径を基準とした平均速度分布については、本モデル、HLモデルとも、Laufer の結果に比してよりふくらみのある形状(より高レイノルズ数の場合の形状)となった。

図3 軸方向乱れ強さの分布

図1 平均速度分布

図4 半径方向乱れ強さの分布

図2 レイノルズせん断応力の分布

図5 周方向乱れ強さの分布

図 6 乱れエネルギー散逸率の分布

これは母体となった LRR モデルの問題点であろう。 u' 分布については、 $r \leq 0.9$ においては図 3 とは逆に HL モデルのほうが本モデルよりかなり大きく、管中心部近傍での Laufer のデータとの一致の程度はやはり本モデルのほうが良いことが知られた。

以上で見たように、本モデルは全体として HL モデルに比して実験結果とよく一致しており、とりわけ、3 方向の乱れ強さの分布をよく再現していると言える。

6. 結 言

壁から十分離れた高レイノルズ数領域に対する応力方程式モデルである LRR モデルを、壁近傍の低レイノルズ数領域にも適用できるように拡張したモデルが提案された。それを既存の HL モデルとともに円管内

流に適用し、Laufer の実験結果と比較検討した結果、本モデルによって諸量の予測が顕著に改善されることが示された。

本研究の適用例は円管内流に限られており、もちろんこのような流れでは、(各方向の乱れ強さが得られるなどの点を除いては) 応力方程式モデルがより低次のモデルに優越する点は少ない。したがって、より広範な流れに適用し洗練していくことが今後の課題であり、本研究はその第 1 段階を提示するものである。

最後に、本研究の数値計算は名古屋大学大型計算機センター FACOM M 382 システムによって行ったものであることを付記する。

文 献

- (1) Patel, V. C., ほか 2 名, *Proc. 3rd Symp. Turbulent Shear Flows*, (1981), 1.1.
- (2) Hanjalić, K. and Launder, B. E., *J. Fluid Mech.*, 74-4 (1976), 593.
- (3) Prud'homme, M. and Elghobashi, S., *Proc. 4th Symp. Turbulent Shear Flows*, (1983), 1.7.
- (4) Launder, B. E., ほか 2 名, *J. Fluid Mech.*, 68-3 (1975), 537.
- (5) Laufer, J., *NACA Tech. Rep.*, 1174 (1954).
- (6) たとえば, Rotta, J. C. (大路訳), 乱流, (昭 50), 123, 岩波書店.
- (7) Lumley, J. L., *Advances in Applied Mech.*, 18 (1978), 123, Academic Press.
- (8) Reynolds, W. C., *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 8 (1976), 183.
- (9) Hinze, J. O., *Turbulence*, 2nd Ed. (1975), 736, McGraw-Hill.