円管内におけるビンガム塑性流体の乱流遷移に関する
理論的研究*

中 村 雅 英**, 沢 田 雅**

Theoretical Study on Turbulence Transition of Bingham Plastic Fluid
in a Pipe

by Masahide NAKAMURA and Tadashi SAWADA

Turbulence transition of Bingham plastic fluid is studied theoretically by evaluating the stability of small disturbances. As the object of this study, fully developed flow in a pipe is chosen. The basic equation is derived from the Hencky equation and for the numerical calculation, Runge-Kutta-Gill method is adopted. In case of Bingham plastic fluid, it is found that the calculated Critical Reynolds Number does not become infinity. The calculated Critical Reynolds Number is compared with the experimental results and it is found that the calculated results agree well with the experimental results if relative plug radius is greater than 0.6.

Key Words: Non-Newtonian Fluid, Turbulence Transition, Theoretical Study, Plastic Fluid, Critical Reynolds Number

1. 結 言

塑性流体の乱流遷移条件は、スラリーなどの塑性流体を管路で輸送する際にはきわめて重要な意味をもつ。各種のスラリーのほか、血液もまた塑性的な性格をもっているが、血液の乱流は血管に損傷を与える可能性があることが知られているため、塑性流体の乱流遷移に関する研究は、生体工学的にみても重要な意味をもつと考えられる。

塑性流体の乱流遷移に関する理論的研究は、これまで、おもに流れ安定係数に基づいて行われてきたが⁽¹⁾流れ安定係数の定義の方法については、まだ定説がなく、適用範囲についても不明な点が多い。

一方、ニュートン流体の乱流遷移に関しては、流体中の微小じょう乱の安定性に基づいた研究が多く行われている。この方法は、塑性流体に関しても適用可能と考えられるが、この方法に基づいて具体的に下限臨界レイノルズ数(以下、単に臨界レイノルズ数と記す)を求め、実験値との比較・検討を行った研究は著者のしらべた範囲内では存在しない。

以上の理由から、本研究では塑性流体の臨界レイノルズ数を微小じょう乱安定法に基づいて具体的に求め実験値との比較・検討を行い、この方法の有効性・適用範囲について考察した。解析の対象は、もともと基本的なビンガム塑性流体の円管内における完全に発達した流れである。このような系に対し、微小じょう乱安定法を適用すると、ニュートン流体の場合、有限な臨界レイノルズ数は得られないが⁽²⁾、ビンガム塑性流体では、有限な臨界レイノルズ数が得られ、比せん半径が0.6以上の場合、実験値をよく再現した。

2. 主 要 記 号

$$D \equiv d^2/dr^2 - (1/r) \cdot d/dr$$

R : 円管の内半径

$$Re_m = u_m R / \nu$$

$$Re_*: \text{伊藤により定義されたレイノルズ数}^{(3)} \\ = 8\rho a \bar{u}_*^2 (1-a) / P_y$$

Re_*^c : 臨界レイノルズ数

a : 比せん半径⁽⁴⁾

c : 微小じょう乱の位相速度

P : 圧力

P_0 : 式(3)で定義される半径のみの関数

P_y : ビンガム塑性流体の降伏応力

* 昭和60年4月1日、第62期通常総会講演会において講演。原稿受付 昭和59年10月22日。

** 正員、秋田大学鉱山学部 (〒010 秋田市手形学園町1-1)。

- r_y : セン部の半径⁽⁴⁾
 r, θ, z : 座標
 t : 時間
 u_m : セン部の軸方向速度
 $u_z, (u_z)_{\max}, (u_z)_{\min}$: 主流の軸方向速度, およびその
 最大値, 最小値
 u'_r, u'_θ, u'_z : 微小じょう乱の速度
 ΔRe : 式(6)の右辺第2項をのぞいたことによる臨
 界レイノルズ数の変化
 Ψ : 微小じょう乱の流れ関数
 α, β : 微小じょう乱の波数, 角振動数
 μ_B : 塑性粘度
 ϕ : 式(3)で与えられる半径のみの関数
 ρ : 密度
 ν : μ_B/ρ
 添字, その他
 *: 無次元化された量 [式(4)]
 - : 半径方向平均値

3. 基礎方程式および解析方法

3.1 基礎方程式 ビンガム塑性流体の, 円管内における完全に発達した層流の速度分布は, 次式で与えられる⁽⁴⁾.

$$u_z = \begin{cases} \frac{RP_y}{\mu_B} \frac{(1-a)^2}{2a} \quad (=u_m), & r < r_y \\ \frac{RP_y}{\mu_B} \frac{1-2a+2a\frac{r}{R}-\left(\frac{r}{R}\right)^2}{2a}, & r_y \leq r \leq R \end{cases} \quad \dots\dots\dots(1)$$

ここで, $r < r_y$ は, 流体中のずり応力が降伏応力以下で, 流体のずり変形が生じない領域である (図1).

以下, ビンガム塑性流体の基礎式である Hencky の方程式⁽⁴⁾に基づいて, 微小じょう乱の満足する方程式を線形理論の範囲内で求める. さらに微小じょう乱を軸対称と仮定する⁽⁵⁾.

まず, 微小じょう乱の空間分布を考える. $r < r_y$ で

図1 ビンガム塑性流体の円管内層流速度分布

は, ずり変形は生ずることができないから, 当然, 微小じょう乱も生じないと考える. したがって, 微小じょう乱は $r_y \leq r \leq R$ でのみ零でなく境界条件は, $r = r_y, R$ で $u'_r = u'_z = 0$ である. ここで微小じょう乱の軸対称系における流れ関数 Ψ を導入する. Ψ は, 次式をみたす.

$$u'_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad u'_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad \dots\dots\dots(2)$$

ここで, Ψ, P を次のようにおく.

$$\Psi = \phi(r) \cdot \exp\{i(\alpha z - \beta t)\} \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$P = P_0(r) \cdot \exp\{i(\alpha z - \beta t)\}$$

以下の解析に先だち, 無次元化を行う. 無次元量に, * を付せば,

$$r^* = \frac{r}{R}, \quad t^* = \frac{u_m t}{R}, \quad P_0^* = \frac{P_0}{\rho u_m^2}$$

$$\alpha^* = \alpha R, \quad \beta^* = \frac{\beta R}{u_m}, \quad \phi^* = \frac{\phi}{u_m R^2} \quad \dots\dots\dots(4)$$

$$u_z^* = \frac{1-2a+2ar^*-r^{*2}}{(1-a)^2}$$

である. 流体の速度を, 主流速度と微小じょう乱の和として Hencky の方程式に代入し, 微小量の二乗以上を無視すれば次式のようなになる. ここで, 式(2)~(4)を用いている. なお, 以下の式では, すべて式(4)で示された無次元量を用いているため, * は省略する.

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2}{r} \left(u_z - \frac{\beta}{\alpha} \right) \phi = & -P_0^* + \frac{i\alpha}{Re_m} \left\{ \left(\frac{\phi'}{r} \right)' + \frac{\alpha^2}{r} \phi \right\} \\ & - \frac{2i\alpha}{Re_m} \left\{ \left(1 + \frac{a}{r-a} \right) \left(\frac{\phi}{r} \right)'' - \frac{a}{(r-a)^2} \left(\frac{\phi}{r} \right)' \right\} \\ & + \frac{2i\alpha}{Re_m} \left(1 + \frac{a}{r-a} \right) \left(\frac{2\phi}{r^3} - \frac{\phi'}{r^2} \right) \quad \dots\dots\dots(5 \cdot a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i\alpha \left(u_z - \frac{\beta}{\alpha} \right) \frac{\phi'}{r} = & \frac{i\alpha}{r} u_z' \phi - i\alpha P_0^* \\ & + \frac{1}{Re_m} \left\{ \left(\frac{\phi'}{r} \right)'' + \alpha^2 \left(\frac{\phi}{r} \right)' - 2\alpha^2 \left(1 + \frac{a}{r-a} \right) \frac{\phi'}{r} \right\} \\ & + \frac{1}{Re_m} \left\{ \frac{1}{r} \left(\frac{\phi'}{r} \right)' + \frac{\alpha^2}{r^2} \phi \right\} \quad \dots\dots\dots(5 \cdot b) \end{aligned}$$

式(5・a), (5・b)において, ダッシュは d/dr を示す. これらの式から, P_0 を消去すれば, 次式が得られる.

$$\begin{aligned} i \left\{ \left(u_z - \frac{\beta}{\alpha} \right) (D - \alpha^2) \phi - D u_z' \cdot \phi \right\} \\ = \frac{1}{\alpha Re_m} (D - \alpha^2)^2 \phi \\ + \frac{2\alpha a}{Re_m} \left\{ \frac{1}{(r-a)^2} \left(2\phi' - \frac{\phi}{r} \right) - \frac{2D\phi}{r-a} \right\} \quad \dots\dots\dots(6) \end{aligned}$$

式(6)が求める式である. 式(6)において, $a \rightarrow 0$ の極限をとれば, ニュートン流体でよく知られている, Orr-Sommerfeld の式に一致する. なお, ϕ の境界条

件は, $r=a, 1$ で $\phi=\phi'=0$ である。塑性の効果は

- (1) 式(6)の右辺第2項
- (2) 主流の速度分布 u_z
- (3) ϕ の境界条件

の三つを通じてあらわれる。

3・2 解析方法 解析方法を簡単に示す。まず, $r=a$ にて $\phi=\phi'=0$ をみたす式(6)の解を求める。その場合, 境界条件を

- (1) $r=a$ にて $\phi=\phi'=\phi''=0, \phi'''=1$
- (2) $r=a$ にて $\phi=\phi'=\phi''=0, \phi'''=1$

とすることにより二つの独立な解を求めそれぞれ ϕ_1, ϕ_2 とする。 $r=a$ にて $\phi=\phi'=0$ を満足する式(6)の一般解 ϕ は, A, B を任意定数として, $\phi=A\phi_1+B\phi_2$ とかける。この解が $r=1$ の境界条件も満足することも要求すれば, その条件は

$$\begin{pmatrix} \phi_1(1) & \phi_1'(1) \\ \phi_2(1) & \phi_2'(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (7)$$

となる。式(7)が, $A=B=0$ 以外の有意な解をもつ条件は, 次式となる。

$$\begin{vmatrix} \phi_1(1) & \phi_1'(1) \\ \phi_2(1) & \phi_2'(1) \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots (8)$$

本解析では, 微小じょう乱が下流にゆくにつれて成長または減衰する空間不安定モードを考えているため, α が複素数となる。実際の計算では, a, Re_m, β を与え, α を変化させて式(8)が満足されるときの α の虚部から安定・不安定を判別する。また, この計算を行う場合に, 特に Re_m が増大した場合, 解のはげしい変化により生ずる数値誤差のため, ϕ_1 と ϕ_2 とが独立でなくなる可能性があるが, この誤差は, Gram-Schmidt の方法⁽⁶⁾を適用することにより除去する。

式(6)は, その右辺第2項のため, $r=a$ にて特異性をもつ。そのため本解析では, 解を $r=a$ のべき級数で展開し, $r=a$ 付近の近似解を求めておき, それを初期条件として, ルンゲ・クッタ・ギル法を適用し ϕ_1, ϕ_2 を求めた。その場合, 実際に計算を行うと解 ϕ が, $r=a$ にて $\phi=\phi'=0$ を満足する場合, 式(6)の右辺第2項は, $r \rightarrow a$ の極限をとった場合, 有限値に収束することがわかる。そのため, 解が $r=a$ での境界条件を満足する場合, 特異性は問題にならずべき級数解が存在する。

ルンゲ・クッタ・ギル法により解を求める場合には区間 $[a, 1]$ を 100~200 等分した。数値解のチェックとして, 分割数を変化させた計算も行い, 解の変化が 1%以下であることを確認した。さらに, 単精度計算と, 倍精度計算の両者の結果を比較し, 差が 0.5%以下であることも確認しておいた。

4. 解析結果および検討

4・1 中立安定曲線 本解析結果のうち, 実用上最も興味深いものの一つとして, 中立安定曲線があげられる。その解析結果を, 縦軸を β , 横軸を Re_m として図2に示す。

円管内における完全に発達した流れに対しては, ニュートン流体の場合, すべての領域で流れは安定となる結果が得られているが⁽²⁾, ビンガム塑性流体の場合図2からあきらかなように, 有限の Re_m, β に対して中立安定曲線が存在する。この原因は, 主流から微小じょう乱に移動するエネルギーと考えられるが, その詳細については, 4・2 節で議論する。

図2からわかるように, 中立安定曲線の形は, 流れに平行な平板上に生ずる境界層の安定性に対して, Tollmien らが求めたものとよく似ており, $Re_m \rightarrow \infty$ の方向にのびた2本の漸近枝をもっている。

次に中立安定状態にある微小じょう乱のもつ位相速度 $c(=a/\beta)$ について検討する。位相速度に関する結果を図3に示す。図3からわかるように, 位相速度の Re_m に対する依存性はきわめて複雑であり, 比せん半径 a に応じて大きく変化する。中立安定にある微小じょう乱の位相速度に関しては, Rayleigh の第1定理が知られており⁽⁶⁾, 位相速度 c は次式をみす。

$$(u_z)_{\min} < c < (u_z)_{\max} \dots\dots\dots (9)$$

この場合, $(u_z)_{\min}=0, (u_z)_{\max}=1$ であるから, c は $0 < c < 1$ を満足しなくてはならない。この結果と図3とは矛盾せず, この場合でも, Rayleigh の第1定理は成り立つことがわかる。

最後に, 最小の Re_m をもつ微小じょう乱に関する結果を示す。各の比せん半径に対し, 中立安定にあり, かつ最小の Re_m をもつ微小じょう乱の波数 α と, 角振動数 β を比せん半径の関数として図4に示す。

図4から, α, β は $a=0.5$ 付近で大きく変化することがわかる。これは, 主流から微小じょう乱に移動するエネルギーは, a がこの程度の値をもつときに大きく変化することが予想されるため(図6), この影響によるものと考えられる。また, 図4より α は1のオーダーの数値であることがわかる。これは, 中立安定状態にあり, かつ最小の Re_m をもつ微小じょう乱の波長は円管の内径程度であることを示す。実際の管路は, 内径よりきわめて長い場合が多いので, この程度の波長の波は, 実際に存在することが可能であると考えられる。また周期についても, 図3の β をもとに計算すると, $R=2 \text{ cm}, \rho=1044 \text{ kg/m}^3, P_y=0.333 \text{ N/m}^2, \mu_B=0.003 \text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$ の条件下 (9.7%のけい藻土) で 0.28

sとなる。これらの数値は、ここで考えたような微小じょう乱が、実験室内において実際に存在することを示していると考えられる。

4・2 臨界レイノルズ数 この節では、流れが乱流に遷移するときの臨界レイノルズ数に関して、解析結果と実験結果の比較・検討を行う。図5に、比較結果を、縦軸を臨界レイノルズ数、横軸を比せん半径として示す。なお図5において、縦軸のレイノルズ数の定義は伊藤⁽³⁾にしたがった。また、図5の実験結果も伊藤⁽³⁾により得られたものである。

図5より以下のことがわかる。

(1) 比せん半径が0.6以上の場合、解析結果と実験結果とはよく一致し、微小じょう乱安定法の有効性を示している。

(2) 比せん半径が0.6以下の場合、解析結果は、実験結果より高い値を示し、 $a \rightarrow 0$ の極限(ニュートン流体への極限)では、よく知られている値、すなわち、解析結果は $Re_c^* \rightarrow \infty$ 、実験結果は $Re_c^* \rightarrow 2300$ に漸近する。

以下、この結果が得られた原因に関し、微小じょう乱のエネルギーに基づいて考察する。一般に、微小じょう

う乱のエネルギーは、非線形性により主流から供給されるため、移流項がエネルギー源の役割をはたすものと考えられる⁽⁷⁾。ビンガム塑性流体では、粘性項も非線形となるが、レイノルズ数の高い領域では、粘性項の非線形性による寄与は、移流項にくらべ小さいと考えられる。

ここで、式(6)の導出過程をふりかえってみると、移流項にもとづく項は、式(5・b)の右辺第1項であり、これが式(6)の左辺中括弧内第2項になっている。したがって、式(6)の左辺中括弧内第2項が、主流と微小じょう乱間のエネルギーの授受の効果を示していると考えられる。

式(6)の左辺中括弧内第2項の形から、 Du_z は、主

(a) 比せん半径が、0.1, 0.3, 0.5の場合

(b) 比せん半径が0.7の場合

図3 中立安定にある微小じょう乱の位相速度

(a) 比せん半径が、0.1, 0.3, 0.5の場合

(b) 比せん半径が0.7の場合

図2 中立安定曲線

図4 中立安定にあり、かつ最小の Re_m をもつ微小じょう乱の波数、角振動数

流と微小じょう乱間を移動するエネルギーと、強い相関があることが予想できる。そのため、主流と微小じょう乱間を移動するエネルギーの目安として、

$$\overline{Du_z} = \frac{\int_a^1 Du_z 2\pi r dr}{\int_a^1 2\pi r dr} \dots\dots\dots (10)$$

の大きさ、 $|\overline{Du_z}|$ を考える。 $|\overline{Du_z}|$ を、比せん半径の関数として図6に示す。

図6からわかるように、 $|\overline{Du_z}|$ は、 $a=0.6$ 付近から急激に増大しており、図6は、 $a>0.6$ の場合、微小じょう乱に与えられるエネルギーは、 $a<0.6$ の場合にくらべ、十分大きいことを示唆している。このため、微小じょう乱の成長は、 $a>0.6$ の場合、きわめて容易になることが予想できる。このことが、 $a>0.6$ において、解析結果と実験結果とがよく一致する原因と考えられる。

一方 $a<0.6$ の場合には、図6より主流から微小じょう乱へ供給されるエネルギーは十分でなく、微小じょう乱は成長しにくいことが予想できる。実際は、ここで考えたような微小じょう乱ばかりでなく、有限のじょう乱（線形理論で扱えない範囲のじょう乱）も存在するから、そのようなじょう乱の成長率のほうが大きくなり、線形理論で得られる値よりも低いレイノルズ数で乱流に遷移してしまったものと考えられる。

また図6は、 $a=0$ の場合（ニュートン流体の場合）には $|\overline{Du_z}|=0$ となりエネルギーの供給がないことを示している。このため、ニュートン流体の場合、線形理論の範囲内ではつねに流れが安定となることが説明できる。

以上の結果は、塑性効果により主流の速度分布に変化が生じたことが原因となりあらわれたものである。しかし、塑性の効果は式(6)の右辺第2項にもあらわれている。最後にこの項の臨界レイノルズ数に与える影響について考える。

まず、式(6)の右辺第2項をおとし、臨界レイノル

図5 臨界レイノルズ数に関する解析結果と実験結果⁽³⁾の比較

ズ数を求め、その値と通常の解析で求めた値との差を ΔRe^c とする。 $\Delta Re^c / Re^c$ を比せん半径の関数として図7に示す。

図7から、 $\Delta Re^c < 0$ であり、比せん半径の増加に伴い、 $|\Delta Re^c / Re^c|$ は大きくなっていることがわかる。式(6)の右辺第2項は、粘性項から生じたものであるから、この項は粘性により微小じょう乱をおさえ臨界レイノルズ数を上昇させる効果をもっていることが考えられる。さらに、比せん半径の増加は、この項の効果をつよめていることも式の形から容易に予想できる。

図7は、この考察と矛盾しないことがわかる。

5. 結 言

ビンガム塑性流体の乱流遷移条件を、微小じょう乱安定法に基づいて解析した。解析の対象は、もっとも基本的な、円管内における完全に発達した流れである。

まず、微小じょう乱の満足する式を、線形理論の範囲内で、Hencky の方程式に基づいて求め、その方程式をルンゲ・クッタ・ギル法により数値的に解き、伊藤の実験結果と比較した。その結果、

- (1) ニュートン流体の場合と異なり、微小じょう

図6 $|\overline{Du_z}|$ の比せん半径に対する依存性

図7 式(6)の右辺第2項の効果

乱安定法で、有限な臨界レイノルズ数が得られること、

(2) その値は、比せん半径が0.6以上の場合、実験結果とよく一致すること、

(3) 比せん半径が0.6以下では、実験結果より高い値を示すこと、
がわかった。さらにこれらの結果は、主流から微小じよう乱に移動するエネルギーを考えることにより、定性的に説明できることを示した。

文 献

- (1) 例えば、益山・野田, 日本鉱業誌, 99-1141 (昭58), 195.
- (2) Davey, A. and Drazin, P., *J. Fluid. Mech.*, 36-2 (1969), 209.
- (3) 伊藤, 化学技術者のための流体工学, (昭47), 244, 科学技術社.
- (4) 富田, レオロジー, (昭50), 315, コロナ社.
- (5) Leite, R. J., *J. Fluid. Mech.*, 5-1 (1959), 81.
- (6) 巽・後藤, 流れの安定性理論, (昭51), 125, 産業図書.
- (7) 桑原, 日本物理学会誌, 27-2 (1972), 96.