次元解析支援システム構成の試み*

渡 辺 崇**, 中 村 育 雄***

An Approach to the Development of the Dimensional Analysis System
Using the LISP Program

by Takashi WATANABE and Ikuo NAKAMURA

This study investigates the applicability of the symbolic data processing program to the various kinds of problems in fluid mechanics and examines its possibilities. As a link of the chain of this study, we take up the dimensional analysis using the pi theorem and develop the system written in LISP, which helps human intelligence analyze physical phenomena by the pi theorem. Some features of this system are as follows: The dimensions of the physical quantities have been put in the storage of the system in advance. When a physical quantity is input, the system gets its dimensions from the storage. This saves the difficulty of the input. The existing quantities, such as the Reynolds number and the Nusselt number, have also been placed in the storage. When the pi numbers obtained by the pi theorem need the rewriting or when the physical meaning of the pi numbers is required, the system refers to the existing quantities in the storage and imparts instruction.

Key Words: Natural Science, Fluid Mechanics, Knowledge Engineering, Dimensional Analysis, Pi Theorem, LISP

1. は じ め に

現存,そして今後の計算機に求められる役割として,人間の知的能力の支援があることはよく知られている。機械工学におけるこの分野の研究は,CAD関係や,産業用ロボット開発等の方面で推進されているようである。しかし,計算機の性能向上,知識工学の進歩から考えると,機械工学における計算機の知能の利用は,設計,製造の分野にとどまらず,現象の解析の方面でもなされるべきであると思われる。このような観点から,現段階での流体力学関連分野において,計算機の非数値的处理機能の適用の可能性,発展性を考慮した上で,ここでは,方法としての完成度が高い次元解析を取り上げた。そして計算機による支援について探ってみた。

物理現象を支配する物理量の間の関係が全く分っていない場合には,物理方程式の各項が次元的に同次であることを利用した,パイ定理に基づく次元解析が,現象,問題の理解,解決のための有効な手段となってくる。また,この,物理量の次元構成をみることに主

眼をおく解析法は,数学的な基礎付けとともに,ほぼ完成され,系統立った構成を持っているものと考えられる⁽¹⁾⁽²⁾。

ここでは,パイ定理に基づく次元解析の手法を,リスト処理言語 LISP を用いて計算機に組み込み,実際に次元解析を行う時の支援の手助けとなる道具の作成を試みた。全体は,図1にその一部を示すように,いくつかの機能の組合せで構成されている。専門家,例えば流体工学の専門家が流体問題の次元解析を行うことは容易であろうが,例えば熱を含んだ新しい問題を解析する際には,困難を感じるであろう。本次元解析プログラムでは,このような場合の便宜をはかった。一般によく用いられる物理量に対しては,あらかじめそれが持つ次元を登録しておき,実際の使用に際して

図1 次元解析プログラム構成の一部

* 昭和60年3月31日 第62期通常総会講演会において講演, 原稿受付 昭和59年10月30日。

** 正員, 名古屋大学大学院 (〒464 名古屋市中種区不老町)。

*** 正員, 名古屋大学工学部。

は、システムがその物理量の次元を参照するという機能を持たせ、物理量の入力を簡単化し誤りを防ぐようにした。また、得られた無次元量を既存の無次元量、物理量で書き替える機能を設け、得られた無次元量の物理的意味を知る場合、あるいは得られた無次元量を物理的意味を持つものへ再構成する場合の示唆を与えるようにした。以下、この次元解析プログラムの構成、機能について述べる。

2. 構 成 法

2.1 次元解析 まず、ここで用いたパイ定理に基づく次元解析の手法について、簡単に述べる。今、ある物理現象が、ある基本単位系のもとで、 m 個の物理量により支配されているとする。この時、無次元量を構成しない最大の物理量の数を k とすれば、 $m-k$ 個の無次元量（パイナンバ）が得られることになる⁽³⁾。この k は次元マトリックスの階数に等しく、次元マトリックスの行数、つまり基本単位を構成する次元の数 n 以下となる。ここではこの k の値の決定を、次元マトリックスに含まれる行列式が非零となる物理量の組合せが得られるまで、次元マトリックスの行数を順次減らしていく方法⁽⁴⁾により行った。この過程を図2に示す。まず減らすべき行数 i を零とする。 n 行の次元マトリックスから i 行を取る組合せを考える。このうちの、ある一つの組合せに従って $n-i$ 行の次元マトリックスを構成する。この次元マトリックスに、非零となる $n-i$ 次行列式が存在する場合、階数 k は $n-i$ となる。すべての可能な $n-i$ 行の次元マトリックスにおいて、その $n-i$ 次行列式が零となる場合には、ぬきとる行数 i を1増して、同様の手順を続ける。この k の値と、ぬきとるべき行が決定されれば、 k 個の物理量の組合せで、 $k=n-i$ 行のマトリックスから作られる行列式が非零となるものを選び出し、そのうちの任意の1組を用いて残りの物理量を無次元化し、 $m-k$ 個のパイナンバを得る。

同じ物理量の数に対して、 k の値が大きいくほど得られるパイナンバの数は少なくなり、無次元量とした結果もより洗練されたものになることが期待される。このため、ベクトル量として表される物理量に対しては、その方向性を考慮して解析する方法が提唱されている⁽⁵⁾。例えば、垂直方向の長さ、水平方向の長さの次元を別々のものと考え、基本単位の次元の数を増すことにより、物理的意味がよりはっきりとした無次元量を得ることができる。ここでは、基本単位各々に対して、この方向性を考慮した解析が可能であるような機能を加えた。

2.2 物理量の次元の登録 代表的な物理量の次元はあらかじめ「辞書」に登録されており、物理量の物理的意味を教えることにより、その次元を意識することなく入力できる。ここで物理量とは、例えば速度である量 U であり、 U の物理的意味とは速度 (VELOCITY) であることとする。物理的意味の次元は、LISP の属性リストに保存されている。図3は属性リストの例である。図は EXAMPLE という単語（これをアトムと呼ぶ）の持つ属性リストを示しており、属性名 P-NAME 1 の値が属性値 P-VALUE 1、属性名 P-NAME 2 の値が属性値 P-VALUE 2 等というように、属性名という名札と、その名札に対する値が交互に並べられた形となっている。さて、代表的な物理的意味はその次元とともに、あらかじめ図4に示すようなアトム DICTIONARY の属性リストとして保存されている。図は〔長さ、質量、時間〕の単位系の場合である。ここで、物理的意味の速度 VELOCITY に対しては、属性名 VELOCITY、属性値として速度の次元 (1 0 -1) 等々と保存されている。そして、物理量 U を、物理的意味 VELOCITY とともに教えるこ

図2 次元マトリックスの階数決定の手順

図3 属性リストの説明図

図4 次元の保存形式（〔長さ、質量、時間〕系）

とにより、物理量 U は、速度であるということと同時に、この属性リストを参照し、次元 $(10 - 1)$ を持つものとして理解される。

各物理量の物理的意味は、図 5 で示すアトム MEANING の属性リストを作ることにより保存される。入力された物理量の物理的意味のすべては、属性名 REF の値として参照することができる。そして、例えば速度という物理的意味を持つ量としては、属性名 VELOCITY の値として、 U と V であることが知られる。

なお、あらかじめ登録されている次元は、現段階では〔長さ、質量、時間、温度〕系における次元であり、他の系の次元は、この系の次元から変換することにより得ている。また、次元が登録されていない物理的意味を持つ量を入力する際の基本単位の統一をはかるため、解析のはじめに、利用する基本単位系を選択するようにした。

2.3 既存量との書き替え パイ定理に基づいた解析により得られたパイナンバそのもの、あるいは得られたパイナンバの積からなる新たなパイナンバを、既存の無次元量、物理量と比較することは、得られたパイナンバの物理的意味を理解する上でも有用である。ここでは、既存の無次元量、物理量もあらかじめ「辞書」に登録しておくことにより、得られたパイナンバの書き替えの際の便宜をはかった。既存の無次元量、物理量は、それを構成する物理的意味とともに、図 6

図 5 物理量とその意味の保存形式

図 6 既存量の保存形式

に示す、アトム EXISTING の属性リストの形で保存されている。図中、例えば属性名 RE は、レイノルズ数の略記であり、これは属性値として、RE がレイノルズ数 REYNOLDS-NUMBER という物理的意味を持つこと、そして、その内容が物理的意味の長さ、速度、動粘度 (LENGTH VELOCITY KINEMATIC-VISCOSITY) からなり、それぞれの 1 乗、1 乗、-1 乗の積であること $(1 1 -1)$ を表す情報を持っている。パイナンバを構成する各物理量は、その物理的意味も理解されている。このパイナンバの、いくつかの物理的意味のうちの一部、あるいは全部が、あらかじめ登録されている無次元量、物理量の内容が持つ物理的意味のならばと適合する時、書き替えができると示唆を与える。具体的な例として、パイナンバが物理的意味の速度、長さ、動粘度を含んでいるとする。この時、一方で、あらかじめレイノルズ数は長さ、速度、動粘度から構成される量であることが登録されており、得られたパイナンバはレイノルズ数を用いて書き替えることができると判定される。また、一度書き替えに用いた量も、その物理的意味が保存され、再度の書き替えの際に利用される。例えば、粘度、密度を新たに動粘度を用いて書き替えた場合、この動粘度は、次に動粘

```

*** I HAVE FOLLOWING SYSTEMS OF UNITS ***
1  LENGTH MASS TIME
2  FORCE LENGTH TIME
3  LENGTH MASS TIME TEMPERATURE
4  FORCE LENGTH TIME TEMPERATURE
5  LENGTH TIME ENERGY TEMPERATURE
***** PLEASE SELECT ONE SYSTEM
    IN NUMBER. *****

(a) R 1
***** DO YOU DIFFERENTIATE DIRECTIONS ?
      (YES/NO) *****

(b) R NO
***** ARE THERE ANY FUNDAMENTAL UNITS
      OTHER THAN LENGTH MASS TIME ?
      'NO' OR ANY UNITS *****

(c) R NO
***** PLEASE INPUT DERIVED QUANTITIES *****

(d) R VELOCITY U !
    NEXT DERIVED QUANTITY ?

(e) R LENGTH D !
    NEXT DERIVED QUANTITY ?

(f) R KINEMATIC-VISCOSITY NU !
    NEXT DERIVED QUANTITY ?

(g) R DENSITY RHO !
    NEXT DERIVED QUANTITY ?

(h) R STRESS TAU !
    NEXT DERIVED QUANTITY ?

(i) R !
    *** POSSIBLE COMBINATIONS FOR RANK 3
        (LENGTH MASS TIME) ARE
        1  (U D RHO)
        2  (U D TAU)
        3  (U NU RHO)
        4  (U NU TAU)
        5  (D NU RHO)
        6  (D NU TAU)
        7  (D RHO TAU)
        8  (NU RHO TAU) ***
    ***** PLEASE INPUT ONE COMBINATION
        OR ITS NUMBER *****

(j) R 3
    1  PI(U)=U*RHO**(1/2)*TAU**(-1/2)
    2  PI(D)=D*NU**(-1)*RHO**(-1/2)
        *TAU**(1/2)
  
```

図 7 方向性を考慮しない場合の実行例、その 1

度を含む量として登録された量で書き替える際に利用される可能性を持つ。

3. 手順および機能

ここでは円管内の流れを例にとり、この次元解析を支援する LISP プログラムの実際上の作動について示す。滑らかな管内流を支配する量として、速度 U 、円管直径 D 、動粘度 ν 、密度 ρ 、壁面せん断応力 τ を考えよう。図 7 は方向性を考慮しない場合の入力である。なお、以下の例でも同様であるが、図中、左側の括弧で囲ったイタリック文字 (a), (A) 等は、入力の手順を示すための説明上付けた記号であり、それらの次の文字 R は、LISP システムの持つ入力の際のプロンプトである。図 7 (a) で、基本単位系として〔長さ、質量、時間〕を選択する。方向性を考慮しないため、(b) で NO を入力。基本単位としては (a) で選択したもの以外は必要ないため (c) の入力は NO とする。(d)~(i) は物理量の入力である。(d) は、速度として U があることの入力である。最後の ! で、その物理的意味、物理量の入力の終わりを知らせる。以下同様に (e) では長さ、(f) では動粘度等と入力する。(i) の ! で、物理量の入力の終わりを示す。次元マトリックスの階数を求めた後、無次元化に用いることができる物理量の組合せが出力される。(j) で 8 番を選択する。1 番めのパイナンプバとして U の無次元量が、2 番めのパイナンプバとして D の無次元量が得られる。この二つのパイナンプバを、既存の量で書き替えてみる。図 8 は図 7 の続き

である。まず U と D から、つまり速度と長さから構成される量として、何が登録されているかを入力 (k) で問い合わせる。いくつかの既存量のうち、レイノルズ数を考えよう。レイノルズ数は長さ²と速度の積を含んでいることがわかるから、 U の無次元量である 1 番めのパイナンプバと、 D の無次元量である 2 番めのパイナンプバより、 U の 1 乗、 D の 1 乗の積からなる新たな 3 番めのパイナンプバを入力 (l) により作る。(m), (n) でこの 3 番めのパイナンプバの書き換えを要求する。レイノルズ数で表せることが示され、その指数を (o) で入力する。

図 9 は方向性を考慮する場合である。(B) で方向性解析の要求、続いて (C) で長さに対し、 X , Y , Z の三方向を考慮することを入力する。なお、ここでは管軸方向を Z とし、その垂直方向に X , Y をとるものとする。質量、時間に対しては方向性を考慮しないため (D), (E) で NO を入れる。物理量の入力は Huntley⁽⁵⁾に従い、その方向性を考慮しつつ行う。入力 (G) は、速度 U が Z 方向の長さの 1 乗の次元を持つことを意味する。直径 D は、 Z に垂直な方向の長さを代表する量であり、入力 (H) で X の 1/2 乗、 Y の 1/2 乗、合計として長さの 1 乗の次元を持つ量として入力する。以下同様に物理量の入力を行い、パイナンプバを得る。なお、この方向性を考慮した場合の、各方向の次元の入力については、今後なんらかの形で支援する機能を考えていきたい。図 10 は図 9 の続きであり、得られたパイナンプバを書き替えた例である。摩擦係数が

```
(j) R 8
      1  PI(U)=U*RHO**(1/2)*TAU**(-1/2)
      2  PI(D)=D*NU**(-1)*RHO**(-1/2)
          *TAU**(1/2)
      ***** CONTINUE ? (YES/NO)  HISTORY ?  ELIMINATE ?
      REWRITE ?  OR INPUT COMBINATION, REQUEST *****
(k) R (U D)
      FROUDE-NUMBER  FR=VELOCITY*LENGTH**(-1/2)*GRAVITY**(-1/2)
          .           .           .           .           .
          :           :           :           :           :
          .           .           .           .           .
      REYNOLDS-NUMBER  RE=LENGTH*VELOCITY*KINEMATIC-VISCOSITY**(-1)
      ***** CONTINUE ? (YES/NO)  HISTORY ?  ELIMINATE ?
      REWRITE ?  OR INPUT COMBINATION, REQUEST *****
(l) R 1 1 2 1 !
      3  PI(U*D)=(U*D)*NU**(-1)
      ***** CONTINUE ? (YES/NO)  HISTORY ?  ELIMINATE ?
      REWRITE ?  OR INPUT COMBINATION, REQUEST *****
(m) R REWRITE
      INPUT ONE NUMBER
(n) R 3
      PI(U*D)=U*D*NU**(-1)
      REYNOLDS-NUMBER  RE=D*U*NU**(-1)
      ***** INPUT EXPONENT OF RE *****
(o) R 1
      PI(U*D)=RE
      REYNOLDS-NUMBER  RE=D*U*NU**(-1)
      ***** CONTINUE REWRITING ? (YES/NO) *****
```

図 8 方向性を考慮しない場合の実行例, その 2

レイノルズ数に反比例するという結果が得られる。

4. お わ り に

パイ定理に基づく次元解析を行う LISP プログラムを作成し、計算機上で、簡単な入力により次元解析が行えることを示した。得られたパイナンバを、既存の無次元量、物理量で書き替える際の示唆を与える機能を設け、パイナンバの物理的意味、重要性を理解する上での手助けを与えるようにした。現段階では、あらかじめ登録してある基本単位系は少なく、また書き替えの対象となる既存量も〔長さ、質量、時間、温度〕系で現れる量に限られるが、この範囲においては実用的にも十分使用できることを示した。今後も順次登録量を増やし、また多くの辞書を持たせるようにしていく予定である。

パイ定理に基づく次元解析は、その方法がほぼ系統立てられており、現段階でも計算機上で実行することができた。物理現象を支配するパイナンバを見つけ出す方法としては、このパイ定理に基づく方法のほかに、現象を支配する物理法則を見極めて主要パラメータを見出す方法⁽⁶⁾、現象を支配する方程式、境界条件に基づく方法⁽⁷⁾が知られている。計算機上での実行を考えた場合、ここで述べたパイ定理に基づく解析以外では、まず物理法則を見きわめる方法が可能であると思われる。一方で、方程式、境界条件に基づく方法は、最も詳しい情報が得られるものと期待できる。このさらに進んだ方法は、より複雑な問題を整理し、適宜近似して重要なパラメータを得る際に有力となってく

```

*** I HAVE FOLLOWING SYSTEMS OF UNITS ***
1  LENGTH MASS TIME
2  FORCE LENGTH TIME
3  LENGTH MASS TIME TEMPERATURE
4  FORCE LENGTH TIME TEMPERATURE
5  LENGTH TIME ENERGY TEMPERATURE
***** PLEASE SELECT ONE SYSTEM
    IN NUMBER. *****

(A) R 1
    ***** DO YOU DIFFERENTIATE DIRECTIONS ?
    (YES/NO) *****

(B) R YES
    ***** PLEASE INPUT DIRECTOINS OR 'NO'
    FOR EACH UNIT *****
    FOR LENGTH
(C) R X Y Z !
    FOR MASS
(D) R NO
    FOR TIME
(E) R NO
    ***** ARE THERE ANY FUNDAMENTAL UNITS
    OTHER THAN LENGTH MASS TIME ?
    'NO' OR ANY UNITS *****

(F) R NO
    ***** PLEASE INPUT DERIVED QUANTITIES *****

(G) R VELOCITY U(Z) !
    NEXT DERIVED QUANTITY ?
(H) R LENGTH D(X 1/2 Y 1/2) !
    NEXT DERIVED QUANTITY ?
(I) R KINEMATIC-VISCOSITY NU(X Y) !
    NEXT DERIVED QUANTITY ?
(J) R DENSITY RHO(X -1 Y -1 Z -1) !
    NEXT DERIVED QUANTITY ?
(K) R STRESS TAU(X -1/2 Y -1/2) !
    NEXT DERIVED QUANTITY ?
(L) R !
    *** POSSIBLE COMBINATIONS FOR RANK 4
    (X Z MASS TIME) ARE
    1  (U D NU RHO)
    2  (U D NU TAU)
    3  (U D RHO TAU)
    4  (U NU RHO TAU)
    5  (D NU RHO TAU) ***
    ***** PLEASE INPUT ONE COMBINATION
    OR ITS NUMBER *****

(M) R 5
    1  PI(U)=U*D**(-1)*NU*RHO*TAU**(-1)

```

図 9 方向性を考慮した場合の実行例, その 1

```

(M) R 5
    1  PI(U)=U*D**(-1)*NU*RHO*TAU**(-1)
    ***** CONTINUE ? (YES/NO)  HISTORY ?  ELIMINATE ?
    REWRITE ?  OR INPUT COMBINATION. REQUEST *****

(N) R REWRITE
    ***** AVAILAABLE QUANTITIES ARE FOLLOWS:
    CF  FRICTION-COEFFICIENT=STRESS*DENSTY**(-1)*VELOCITY**(-2)
        .      .      .      .      .
        .      .      .      .      .
    MU  VISCOSITY=DENSITY*KINEMATIC-VISCOSITY
        PLEASE SELECT ONE ABBREVIATION *****

(O) R CF
    PI(U)=U*D**(-1)*NU*RHO*TAU**(-1)
    FRICTION-COEFFICIENT  CF=TAU*RHO**(-1)*U**(-2)
    ***** INPUT EXPONENT OF CF *****

(P) R -1
    PI(U)=CF**(-1)*U**(-1)*D**(-1)*NU
    FRICTION-COEFFICIENT  CF=TAU*RHO**(-1)*U**(-2)
    ***** CONTINUE REWRITING ? (YES/NO) *****

(Q) R YES
    PI(U)=CF**(-1)*U**(-1)*D**(-1)*NU
    REYNOLDS-NUMBER  RE=D*U*NU**(-1)
    ***** INPUT EXPONENT OF RE *****

(R) R -1
    PI(U)=RE**(-1)*CF**(-1)
    REYNOLDS-NUMBER  RE=D*U*NU**(-1)
    FRICTION-COEFFICIENT  CF=TAU*RHO**(-1)*U**(-2)
    ***** CONTINUE REWRITING ? (YES/NO) *****

```

図 10 方向性を考慮した場合の実行例, その 2

る。この場合、その方法自体を系統的に整理すると同時に、類似の問題における経験および推論的、発見的能力を持たせることが必要になると考えられる。この方面への発展は、また知識工学の応用例となるのみならず、知識工学そのものへも寄与するものと期待される。

なお、本次元解析 LISP プログラムの詳細については、できる限りの範囲で問い合わせに応じたい。

文 献

- (1) Bridgeman, P. W., *Dimensional Analysis*, (1921), Har-

vard Univ. Press.

- (2) Birkhoff, G., *Hydrodynamics*, (1950), 77, Princeton Univ. Press.
(3) Van Driest, E. R., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 13 (1946), A-34.
(4) Langhaar, H. L., *Dimensional Analysis and Theory of Models*, (1951), 37, John Wiley & Sons, Inc.
(5) Huntley, H. E., *Dimensional Analysis*, (1952), MacDonald & Co.
(6) Schuring, D. J., *Scale Models in Engineering*, (1977), Pergamon Press.
(7) Kline, S. J., *Similitude and Approximation Theory*, (1965), McGraw-Hill.