二つの流れを水平に仕切る弾性板に生ずる有限振幅波*

長谷川 英治**, 山下 秀一郎***

Finite Amplitude Waves on an Elastic Plate Horizontally
Separating Two Different Fluid Streams

by Eiji HASEGAWA and Shuichiro YAMASHITA

Nonlinear waves on a thin elastic plate horizontally separating an upper fluid stream and a lower one are analysed theoretically. The lower stream is denser. The elastic plate is governed by the equation for large deflections including the in-plane forces due to the longitudinal deformations of the plate. Two fluid streams are assumed to be incompressible and inviscid, but on the elastic plate the balance of the normal component of force is expressed by taking the viscous stress into account. Some progressive waves of finite amplitude are found on the elastic thin plate. The nonlinear elevation of the elastic plate is obtained keeping up to the third order approximation in the wave amplitude. The unsteady amplitude of waves tend to a finite limit after a long time under the action of the viscosity of the fluid.

Key Words: Nonlinear Stability, Elastic Plate, Finite Amplitude Wave, Successive Approximation, Equilibrium Amplitude

1. は じ め に

よくいろいろな場合に、水面を防じんとか保温のために、シート状の薄い板で覆いをする。このとき、風のためにその薄い板が波形の運動をするのをよくみかける。ここでは、流れによって板に発生する波の形を決定することを考える。

ところで、水面に吹く風による波の発生の問題は、Kelvin-Helmholtz 形の不安定性として、古くから、波の中心課題として研究されてきている⁽¹⁾。そして、流体の運動の非線形性までとり入れてよく調べられている⁽²⁾⁻⁽⁴⁾。しかし、これらのほとんどは、完全流体として扱われるのが普通であり、流体の粘性をとり入れた非線形理論は、ほんの一、二の例を除いて⁽³⁾⁽⁵⁾、研究されていない。このように、流体の粘性を無視しているために、波の振幅展開によって⁽⁶⁾Landau の係数を決定し⁽⁷⁾、波動の非線形発展方程式より振幅を求めると、平衡振幅のまわりに時間的に振幅が変動する非定常的波動運動となることが知られている⁽²⁾。しかし、

流れが定常的で、しかも、それほど速くない場合には、十分時間がたてば一定の振幅の定常的波動運動となる事実とは符合しない。これは、流体の粘性を無視したためであり、この種の研究を行うには、散逸的效果をとり入れることが肝要である。したがって、流体と流体の境が弾性板で置き換えられたとしても、やはり、十分な時間のうちに到達するであろう平衡解をうるには、流体の粘性を考慮することが重要となろう。とはいっても、粘性を考慮して波動の問題を扱うのは、とくに有限振幅波の場合には、容易でなく、流体層の厚さが薄い場合にやっと解析が可能となった程度である⁽³⁾⁽⁵⁾。

ところで、流体中での板の運動の問題では、板の面に垂直方向の運動のみを解析し、板の面に沿う方向の運動は考えないのが普通であるから、流体の粘性を考慮するといっても、板の運動を決めるのに必要な粘性力は板に垂直方向のもののみである。そこで、流体の界面の変形についての研究でよい結果を得た、境界面の近くでのみ粘性を考慮する方法、すなわち、流れは、すべて、ポテンシャル流れであるとし、境界上でのみ、その完全流体の速度分布による粘性応力が働くとする方法を適用する⁽⁸⁾。このようにして、流れがなければ安定である、上の流体が下のそれより軽い場合につい

* 昭和60年4月1日 第62期通常総会講演会において講演。原稿受付 昭和59年10月31日。

** 正員、慶応義塾大学理工学部 (〒223 横浜市港北区日吉3-14-1)。

*** 慶応義塾大学大学院。

て、波の振幅の三乗の程度まで正しく評価して、振幅の変化を支配する方程式を作る。それにより、線形理論による不安定領域内での有限振幅波の変遷具合を時間的に調べ、とくに、平衡振幅の状態への移行過程について研究する。なお、その際、大きな変形を許す板の方程式として、第1に、カルマンの薄板の方程式が考えられるが、それは解として定在波のみしか許さないため⁽⁹⁾、ここでは、変形に基づく板の面に沿った方向の伸びのために生ずる面内力を考慮した大きな変形の場合の板の方程式⁽¹⁰⁾を用いる。

2. 支配方程式系

貯水槽の水面上をその面に沿って風が吹いている場合のように、ある方向に勝手な速さで水平に流れている異なる流体層をその界面に沿って薄いシート状の板で仕切った場合に、この系の波の発生条件と発生後の波の成長過程とがどうなるかについて理論的に考察する。その際、使用する板としては、薄くて比較的軽いゴムとかプラスチックなどを想定しているから、もし、波が発生したとしても、その波の波長はそれほど長くはないと想像されるから、上下の流体層の水平および鉛直方向の広がりとは十分広いものと仮定する。流体の運動は、波動運動を扱う場合一般に行われているように、非圧縮の渦なし運動とする。しかし、粘性については全く考えないというのではなく、板の表面においてその面に垂直方向の粘性応力が渦なし運動の速度分布に従って働くものとする。このような考え方は、水の波の減衰の問題や⁽¹¹⁾、流体中を運動する気泡の形の問題⁽⁸⁾でたいへんよい結果を導くことが知られている。上下の流れを仕切る板は弾性板とし、板の横変位による板の面内力を考慮したパネルフラッタの問題でよく用いられる⁽¹⁰⁾大変形の方程式により支配されるものとする。図1に示すように、系にかく乱を生じていない状態での板の中立軸に沿って x 軸を、それに垂直上向きに y 軸をとり、運動は二次元的であるとして扱う。いま、下の流体層に係る諸量には添字1を、上のそれらには添字2を付すこととし、速度の尺度として、平均流の速さ U_1, U_2 を用い、 $(U_1 + U_2)/2 (\equiv V)$ を選び、長さの尺度としては、重力の加速度 g を用い、 $V^2/g (\equiv l)$ を選び、時間 t は l/V で、速度ポテンシャルは Vl で規格化されるとすれば、平均流からのずれ、すなわち、かく乱による速度ポテンシャル ϕ_1, ϕ_2 、板の横変位 η を支配する方程式と境界条件は、無次元形で、

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$y \rightarrow -\infty : \frac{\partial \phi_1}{\partial x} = \frac{\partial \phi_1}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$y \rightarrow \infty : \frac{\partial \phi_2}{\partial x} = \frac{\partial \phi_2}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$y=0 : -\frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \eta}{\partial x} = Q \frac{\partial \phi_1}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} (1+Q) \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial t} - U_2 \frac{\partial \eta}{\partial x} = -Q \frac{\partial \phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} (1+Q) \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(1+\varepsilon) \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) \\ & - \frac{1}{2}(1-\varepsilon) \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) \\ & + \varepsilon \eta + D \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} - N \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \\ & = \frac{n}{\lambda} \int_x^{x+\lambda} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 dx \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \\ & - \frac{1+\varepsilon}{2} \left[Q \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}(1+Q) \left\{ \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right)^2 \right\} \right] \\ & + \frac{1-\varepsilon}{2} \left[Q \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}(1+Q) \left\{ \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right)^2 \right\} \right] \\ & - \frac{2(1+Q)}{1+(\partial \eta / \partial x)^2} \left[\frac{\mu_1}{R_e} \left\{ \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} \right. \right. \\ & \left. \left. - 2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} \right\} - \frac{\mu_2}{R_e} \left\{ \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. \times \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} \right\} \right] \quad \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

となる。ここで

$$Q = \eta \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\eta^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\eta^3}{3!} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \dots\dots\dots (8)$$

であり、流体の密度を $\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2$ 、粘度を $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2$ 、板のこわさを $\bar{D}$ 、外部から加えた面内力を $\bar{N}$ 、面密度を $\bar{m}$ 、ヤング率を $\bar{E}$ 、厚みを $\bar{h}$ として、無次元パラメータ

$$\varepsilon = \frac{\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2}{\bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_2}, \quad R_e = \frac{2(\bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_2)Vl}{\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2},$$

$$\mu_1 = \frac{2\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2}, \quad \mu_2 = \frac{2\bar{\mu}_2}{\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2},$$

$$D = \frac{\bar{D}}{(\bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_2)V^2 l^3}, \quad N = \frac{\bar{N}}{(\bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_2)V^2 l},$$

$$m = \frac{\bar{m}}{(\bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_2)l}, \quad n = \frac{\bar{E}\bar{h}}{2(\bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_2)V^2 l}$$

を導入した。また、 λ はかく乱の波長である。上式で、

式(1), (2)は渦なし運動の式, 式(3), (4)は板から遠い所ではかく乱がないことを示す式, 式(5), (6)は板と流体とがいっしょに動くことを示す運動学的条件式を $y=0$ の位置で適用した式, 式(7)は板の運動方程式であって, 板はその面に垂直方向に圧力と粘性力とを流体より受けるものとした式を, やはり, $y=0$ の位置で適用した式である。これらの式(1)~(7)で, 左辺は線形項, 右辺は非線形項が各々集められている。上の方程式系で, もし, 板の運動方程式(7)を界面での法線方向の力の釣り合い式で置き換えれば, Kelvin-Helmholtz 形非線形不安定性を扱うための方程式となる⁽²⁾。しかし, ここでは板の方程式としたことと, 粘性力を考慮したことによって, 全く違った性質の方程式となっている。以下では, ここに示した支配方程式(1)~(7)を非線形項を十分考慮しながら解析する。

3. 波の発生条件

支配方程式系(1)~(7)で, 右辺をすべて零とすれば, 線形の同次方程式系を得る。その方程式系の固有値として, 系の安定, 不安定を境する中立安定曲線が得られる。いま, かく乱の波数を α , 複素成長率を s とすれば, 式(1)~(4)を満たす解として,

$$\phi_1 = a_1 e^{i\alpha x} e^{s t} \dots\dots\dots (9)$$

$$\phi_2 = a_2 e^{i\alpha x} e^{-s t} \dots\dots\dots (10)$$

と書きうるから, これに対応して板の横変位 η を

$$\eta = \bar{\eta} e^{i\alpha x} e^{s t} \dots\dots\dots (11)$$

と表し, 式(5)~(7)の左辺に代入し, それらの右辺を無視すれば, 固有関係式

$$\begin{aligned} s = & [-i\alpha \{(1+\epsilon)U_1 + (1-\epsilon)U_2\} \\ & \pm (\alpha^2(1-\epsilon^2)(U_1 - U_2)^2 \\ & + 2\alpha^3 m \{(1+\epsilon)U_1^2 + (1-\epsilon)U_2^2\} \\ & - 4Ma(\epsilon + \alpha^2 N + \alpha^4 D))^{1/2}] / 2M \end{aligned} \dots\dots\dots (12)$$

をうる。ここで,

$$M = 1 + m\alpha$$

図 1 系の概略と座標系

である。なお, 式(9)~(11)の $a_1, a_2, \bar{\eta}$ は定数である。かく乱が成長するか否かの境は s の実部が零となる場合として与えられるから, そのときの限界値を密度の差を示すパラメータ ϵ の限界値 ϵ_c で表せば,

$$\begin{aligned} \epsilon_c = & [\{\alpha^2 m (U_1^2 - U_2^2) - 2M\} \\ & + (\{\alpha^2 m (U_1^2 - U_2^2) - 2M\}^2 \\ & + (U_1 - U_2)^2 \{\alpha^2 (U_1 - U_2)^2 \\ & + 2\alpha^3 m (U_1^2 + U_2^2) - 4Ma(\alpha^2 N \\ & + \alpha^4 D)\})^{1/2}] / \alpha (U_1 - U_2)^2 \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

となり, それに対応するかく乱の位相速度 v_c は, s の虚部より,

$$v_c = \{(1+\epsilon_c)U_1 + (1-\epsilon_c)U_2\} / 2M \dots\dots\dots (14)$$

となる。系は $\epsilon > \epsilon_c$ の場合に安定となり, $\epsilon < \epsilon_c$ の場合に不安定となる。なお, ここでは, 流れによる不安定現象を論ずることを目的としているから, 下の流体が上のそれより重い, ϵ が正の場合のみについて考えることにする。

4. 動く座標で書いた支配方程式系

3章で求めた, 限界の密度差 ϵ_c よりも小さい密度差 ϵ をもつ不安定領域ではかく乱が発生し, それは位相速度 v で x 方向に進む波となっているから, 速さ v で x 方向に移動する座標系を用いてかく乱の成長過程を記述することにする。すなわち, x を $x - vt$ で置き換え, 時間についての微分 $\partial/\partial t$ を $\partial/\partial t - v\partial/\partial x$ とすれば, $y=0$ での条件式(5)~(7)は,

$$y=0: Lx = N \dots\dots\dots (15)$$

となる。ここで, L は線形の微分演算子で, 要素

$$a_{11} = -\frac{\partial}{\partial y}, \quad a_{12} = 0, \quad a_{13} = (U_1 - v_c) \frac{\partial}{\partial x},$$

$$a_{21} = 0, \quad a_{22} = \frac{\partial}{\partial y}, \quad a_{23} = -(U_2 - v_c) \frac{\partial}{\partial x},$$

$$a_{31} = (1+\epsilon_c)(U_1 - v_c) \frac{\partial}{\partial x},$$

$$a_{32} = -(1-\epsilon_c)(U_2 - v_c) \frac{\partial}{\partial x},$$

$$a_{33} = 2\left(\epsilon_c + D \frac{\partial^4}{\partial x^4} - N \frac{\partial^2}{\partial x^2} + mv_c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)$$

をもつ 3 行 3 列の行列であり, x は ϕ_1, ϕ_2, η を成分とする列ベクトルであり, N は成分

$$(N)_1 = -\frac{\partial \eta}{\partial t} + (v - v_c) \frac{\partial \eta}{\partial x} + Q \frac{\partial \phi_1}{\partial y}$$

$$- \frac{\partial \eta}{\partial x} (1+Q) \frac{\partial \phi_1}{\partial x}$$

$$(N)_2 = \frac{\partial \eta}{\partial t} - (v - v_c) \frac{\partial \eta}{\partial x} - Q \frac{\partial \phi_2}{\partial y}$$

$$+ \frac{\partial \eta}{\partial x} (1+Q) \frac{\partial \phi_2}{\partial x}$$

$$\begin{aligned}
(N)_3 = & \frac{2n}{\lambda} \left(\int_x^{x+\lambda} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 dx \right) \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \\
& - 2(\varepsilon - \varepsilon_c) \eta - 2m \left\{ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - 2v \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial x} \right. \\
& + (v^2 - v_c^2) \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \left. \right\} - (1+Q) \left\{ (1 \right. \\
& + \varepsilon) \frac{\partial \phi_1}{\partial t} - (1-\varepsilon) \frac{\partial \phi_2}{\partial t} \left. \right\} \\
& - Q \left\{ (1+\varepsilon_c)(U_1 - v_c) \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right. \\
& - (1-\varepsilon_c)(U_2 - v_c) \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \left. \right\} - \frac{1}{2}(1+Q) \\
& \times \left[(1+\varepsilon) \left\{ \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right)^2 \right\} \right. \\
& - (1-\varepsilon) \left\{ \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right)^2 \right\} \left. \right] \\
& + \{ (1+\varepsilon_c)(v - v_c) - (\varepsilon - \varepsilon_c)(U_1 - v_c) \} \\
& + (\varepsilon - \varepsilon_c)(v - v_c) \} (1+Q) \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \\
& + \{ -(1-\varepsilon_c)(v - v_c) - (\varepsilon - \varepsilon_c)(U_2 - v_c) \} \\
& + (\varepsilon - \varepsilon_c)(v - v_c) \} (1 \\
& + Q) \frac{\partial \phi_2}{\partial x} - \frac{4}{1 + (\partial \eta / \partial x)^2} \frac{1+Q}{R_e} \\
& \times \left[\mu_1 \left\{ \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} \right\} \right. \\
& - \mu_2 \left\{ \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} \right\} \left. \right]
\end{aligned}$$

をもつ、非線形項を表す列ベクトルである。式(15)のように表示すれば、式(1)~(4)を満たす形式解 ϕ_1 , ϕ_2 を代入すると、式(15)で右辺を省略した式より、3章で述べた、 s の実部が零となる中立安定状態を示す定常解が得られる。その解を初項として、かく乱の振幅 $A(t)$ のべきの形に、非線形項を考慮した式(15)の解を求め、小さいけれども有限な振幅をもつかく乱の挙動について調べる。

5. 随伴方程式とその解

4章で述べたように、式(15)の右辺を零とした線形の同次方程式の解を、同式の右辺の非線形項を考慮して、修正することを考えていくのであるから、その際、可解の条件 (solvability condition) が必要となる。そのために、内積を定義し、随伴表式を作っておく。

いま、成分 ϕ_1 , ϕ_2 , η をもつ列ベクトル $\mathbf{x}$ と成分 ϕ'_1 , ϕ'_2 , η' をもつ列ベクトル $\mathbf{x}'$ があるとき、 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{x}'$ の内積として、

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{\lambda} \int_x^{x+\lambda} (\phi_1 \phi'_1 + \phi_2 \phi'_2 + \eta \eta')|_{y=0} dx \quad \dots\dots\dots (16)$$

をとることにする。すると、線形微分演算子である L

に対する随伴表式 L^* は L と

$$(\mathbf{x}', L\mathbf{x}) = (L^*\mathbf{x}', \mathbf{x}) \quad \dots\dots\dots (17)$$

なる関係をもつから、 L^* の要素 a_{ij}^* は

$$a_{11}^* = -\frac{\partial}{\partial y}, \quad a_{12}^* = 0, \quad a_{13}^* = -(U_1 - v_c) \frac{\partial}{\partial x},$$

$$a_{21}^* = 0, \quad a_{22}^* = \frac{\partial}{\partial y}, \quad a_{23}^* = (U_2 - v_c) \frac{\partial}{\partial x},$$

$$a_{31}^* = -(1+\varepsilon_c)(U_1 - v_c) \frac{\partial}{\partial x},$$

$$a_{32}^* = (1-\varepsilon_c)(U_2 - v_c) \frac{\partial}{\partial x},$$

$$a_{33}^* = 2 \left(\varepsilon_c + D \frac{\partial^4}{\partial x^4} - N \frac{\partial^2}{\partial x^2} + m v_c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \quad \dots\dots\dots (18)$$

となる。したがって、式(1)~(4)を満たす随伴方程式 $L^*\mathbf{x}^* = 0$ の解は二つあって、各々を $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{x}'^*$ とすれば、

$$\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} (1+\varepsilon_c)(U_1 - v_c)e^{ay} \cos ax \\ -(1-\varepsilon_c)(U_2 - v_c)e^{-ay} \cos ax \\ -\sin ax \end{pmatrix} \quad \dots (19)$$

$$\mathbf{x}'^* = \begin{pmatrix} (1+\varepsilon_c)(U_1 - v_c)e^{ay} \sin ax \\ -(1-\varepsilon_c)(U_2 - v_c)e^{-ay} \sin ax \\ \cos ax \end{pmatrix} \quad \dots (20)$$

となる。

6. 振幅を支配する方程式

式(15)の右辺を零とした場合の固有関数と同じ形をもつ振幅 $A(t)$ の基本波

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} (U_1 - v_c)e^{ay} \cos ax \\ -(U_2 - v_c)e^{-ay} \cos ax \\ \sin ax \end{pmatrix} A(t) \quad \dots\dots\dots (21)$$

の振幅が式(15)の右辺の非線形項によりどのように決定されるかを考える。以下では、 $A(t)$ が小さいものとして A^3 の程度までの正しきで振幅 $A(t)$ を決めることにする。

まず、式(15)の右辺に、第1近似解 $\mathbf{x}^{(1)}$ を代入すると、ベクトル N の成分 $(N^{(1)})_1$, $(N^{(1)})_2$, $(N^{(1)})_3$ は、 $\sin nax \equiv S_n$, $\cos nax \equiv C_n$ ($n=1, 2, 3$) として、

$$(N^{(1)})_1 = -\dot{A}S_1 + \alpha(v - v_c)AC_1 + \alpha^2(U_1 - v_c)A^2S_2 \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$(N^{(1)})_2 = \dot{A}S_1 - \alpha(v - v_c)AC_1 + \alpha^2(U_2 - v_c)A^2S_2 \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$\begin{aligned}
(N^{(1)})_3 = & -2(\varepsilon - \varepsilon_c)AS_1 + 2m\{2av \\
& \times \dot{A}C_1 + \alpha^2(v^2 - v_c^2)AS_1\} - (1+\varepsilon)(U_1 \\
& - v_c)\dot{A}C_1 - (1-\varepsilon)(U_2 - v_c)\dot{A}C_1 \\
& + (\alpha^2/2)(1+\varepsilon_c)(U_1 - v_c)^2A^2(1 \\
& - C_2) - (\alpha^2/2)(1-\varepsilon_c)(U_2 - v_c)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times A^2(1-C_2) - (\alpha/2)\{(1+\varepsilon_c)(v \\
& - v_c) - (\varepsilon - \varepsilon_c)(U_1 - v_c) + (\varepsilon - \varepsilon_c)(v \\
& - v_c)\} \{\alpha(U_1 - v_c)A^2(1-C_2) \\
& + 2(U_1 - v_c)AS_1\} - (\alpha/2)\{-(1 \\
& - \varepsilon_c)(v - v_c) - (\varepsilon - \varepsilon_c)(U_2 - v_c) \\
& + (\varepsilon - \varepsilon_c)(v - v_c)\} \{\alpha(U_2 - v_c) \\
& \times A^2(1-C_2) - 2(U_2 - v_c)AS_1\} - (\alpha^2 \\
& / 2)(1+\varepsilon)(U_1 - v_c)^2A^2 + (\alpha^2/2) \\
& \times (1-\varepsilon)(U_2 - v_c)^2A^2 - (6\mu_1/R_e) \\
& \times \alpha^3(U_1 - v_c)A^2S_2 + (6\mu_2/R_e) \\
& \times \alpha^3(U_2 - v_c)A^2S_2 \dots\dots\dots (24)
\end{aligned}$$

となる。式(22)～(24)で与えられる右辺をもつ第2近似方程式 $L\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{N}^{(2)}$ が解けるための条件は、式(19), (20)を用いて, $(\mathbf{x}^*, \mathbf{N}^{(2)}) = 0$ と $(\mathbf{x}^*, \mathbf{N}^{(2)}) = 0$ となるから、これらより、

$$(\varepsilon - \varepsilon_c)A = O(A^3) \dots\dots\dots (25)$$

$$(v - v_c)A = O(A^3) \dots\dots\dots (26)$$

$$\{(1+\varepsilon_c)(U_1 - v_c) + (1-\varepsilon_c)(U_2 - v_c) - 2\alpha m v\} \dot{A} = O(A^3) \dots\dots\dots (27)$$

をうる。このことを考慮し、第2近似方程式の右辺で A^2 の程度の大きさの項のみを残して、第2近似解 $\mathbf{x}^{(2)}$ を求めれば、

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x}^{(2)})_1 &= \frac{\dot{A}}{\alpha} e^{ay} S_1 - \frac{\alpha}{2} (U_1 - v_c)(1+B_1) \\
& \times A^2 e^{2ay} S_2 \dots\dots\dots (28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x}^{(2)})_2 &= -\frac{\dot{A}}{\alpha} e^{-ay} S_1 - \frac{\alpha}{2} (U_2 - v_c)(1-B_1) \\
& \times A^2 e^{-2ay} S_2 \dots\dots\dots (29)
\end{aligned}$$

$$(\mathbf{x}^{(2)})_3 = \frac{\alpha}{2} B_1 A^2 C_2 \dots\dots\dots (30)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
B_1 &= \alpha \{ (1+\varepsilon_c)(U_1 - v_c)^2 - (1-\varepsilon_c)(U_2 \\
& - v_c)^2 \} / [2(\varepsilon_c + 16\alpha^4 D + 4\alpha^2 N \\
& - 4\alpha^2 m v_c^2) - 2\alpha \{ (1+\varepsilon_c)(U_1 \\
& - v_c)^2 + (1-\varepsilon_c)(U_2 - v_c)^2 \}]
\end{aligned}$$

である。

さらに、 $\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{x}^{(2)}$ を式(15)の右辺に代入し、第3近似のための非線形項を書き下せば、

$$\begin{aligned}
(\mathbf{N}^{(2)})_1 &= -\alpha(1+B_1)A\dot{A}C_2 + \alpha(v \\
& - v_c)AC_1 - (\alpha^3/8)(1+6B_1)(U_1 \\
& - v_c)A^3C_1 + (9\alpha^3/8)(1+2B_1)(U_1 \\
& - v_c)A^3C_3 \dots\dots\dots (31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{N}^{(2)})_2 &= -\alpha(1-B_1)A\dot{A}C_2 - \alpha(v \\
& - v_c)AC_1 + (\alpha^3/8)(1-6B_1)(U_2 \\
& - v_c)A^3C_1 - (9\alpha^3/8)(1-2B_1)(U_2 \\
& - v_c)A^3C_3 \dots\dots\dots (32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{N}^{(2)})_3 &= -\alpha^4 n A^3 S_1 - 2(\varepsilon - \varepsilon_c)AS_1 \\
& - (2/\alpha)\dot{A}S_1 - 2m\{\dot{A}S_1 + 4\alpha^2 v \\
& \times B_1 A\dot{A}S_2 - \alpha^2(v^2 - v_c^2)AS_1\} \\
& + \alpha(1+\varepsilon_c)(U_1 - v_c)B_1 A\dot{A}S_2 + \alpha(1 \\
& - \varepsilon_c)(U_2 - v_c)B_1 A\dot{A}S_2 - (\alpha^3/8)(1 \\
& + \varepsilon_c)(U_1 - v_c)^2(5+2B_1)A^3S_1 - (\alpha^3 \\
& / 8)(1-\varepsilon_c)(U_2 - v_c)^2(5-2B_1)A^3S_1 \\
& + (\alpha^3/8)(1+\varepsilon_c)(U_1 - v_c)^2 \\
& \times (7+10B_1)A^3S_3 + (\alpha^3/8)(1-\varepsilon_c) \\
& \times (U_2 - v_c)^2(7-10B_1)A^3S_3 \\
& - \alpha \{ (1+\varepsilon_c)(v - v_c) - (\varepsilon - \varepsilon_c)(U_1 \\
& - v_c) \} (U_1 - v_c)AS_1 - \alpha \{ (1-\varepsilon_c)(v \\
& - v_c) + (\varepsilon - \varepsilon_c)(U_2 - v_c) \} (U_2 - v_c) \\
& \times AS_1 - (2\mu_1/R_e)\{2\alpha\dot{A}S_1 - \alpha^3(U_1 \\
& - v_c)(1+4B_1)A^2S_2\} - (2\mu_2/R_e) \\
& \times \{2\alpha\dot{A}S_1 + \alpha^3(U_2 - v_c)(1-4B_1)A^2S_2\} \\
& \dots\dots\dots (33)
\end{aligned}$$

となる。式(31)～(33)で与えられる非同次項に可解の条件を適用すると、求める振幅を決定するための方程式が、 A の三乗までの正しきで、

$$\dot{A} = \frac{\alpha}{2M} (aA + bA^3 + c\dot{A}) \dots\dots\dots (34)$$

えられる。ここで、

$$\begin{aligned}
a &= -2(\varepsilon - \varepsilon_c) + 2\alpha^2 m (v^2 - v_c^2) \\
& - \alpha(v - v_c)\{(1+\varepsilon_c)(U_1 - v_c) \\
& + (1-\varepsilon_c)(U_2 - v_c)\} - \alpha\{(1+\varepsilon_c)(v \\
& - v_c) - (\varepsilon - \varepsilon_c)(U_1 - v_c)\}(U_1 - v_c) \\
& - \alpha\{(1-\varepsilon_c)(v - v_c) + (\varepsilon - \varepsilon_c)(U_2 \\
& - v_c)\}(U_2 - v_c) \\
b &= -\alpha^4 n - (\alpha^3/2)(1-B_1)(1+\varepsilon_c) \\
& \times (U_1 - v_c)^2 - (\alpha^3/2)(1+B_1)(1-\varepsilon_c) \\
& \times (U_2 - v_c)^2 \\
c &= -(4\alpha/R_e)(\mu_1 + \mu_2)
\end{aligned}$$

である。なお、 A^3 までの近似の範囲では、位相速度 v は線形の場合の値をそのままとり、

$$v = \{(1+\varepsilon)U_1 + (1-\varepsilon)U_2\} / 2M \dots\dots\dots (35)$$

となる。可解条件式(34)を考慮して、非同次項式(31)～(33)をもつ第3近似方程式を解けば、第3近似解 $\mathbf{x}^{(3)}$ は

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x}^{(3)})_1 &= \{-(v - v_c)A + (\alpha^2/8)(1+6B_1) \\
& \times (U_1 - v_c)A^3\} e^{ay} C_1 + \{(U_1 - v_c)(B_{21} \\
& \times A^2 + B_{22}A\dot{A}) + (1+B_1)A\dot{A}/2\} e^{2ay} C_2 \\
& + (U_1 - v_c)\{B_{23} - (3\alpha^2/8)(1+2B_1)\} \\
& \times A^3 e^{3ay} C_3 \dots\dots\dots (36)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x}^{(3)})_2 &= \{(v - v_c)A - (\alpha^2/8)(1-6B_1) \\
& \times (U_2 - v_c)A^3\} e^{-ay} C_1 - \{(U_2 - v_c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times (B_{21}A^2 + B_{22}A\dot{A}) - (1 - B_1)A\dot{A}/2\} \\ & \times e^{-2\alpha y}C_2 - (U_2 - v_c)\{B_{23} - (3\alpha^2/8) \\ & \times (1 - 2B_1)\}A^3e^{-3\alpha y}C_3 \dots\dots\dots(37) \\ & (x^{(3)})_3 = (B_{21}A^2 + B_{22}A\dot{A})S_2 \\ & + B_{23}A^3S_3 \dots\dots\dots(38) \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} B_{21} &= \alpha^3\{(\mu_1/R_e)(1 + 4B_1)(U_1 - v_c) \\ & - (\mu_2/R_e)(1 - 4B_1)(U_2 - v_c)\} \\ & / [2(\epsilon_c + 16\alpha^4D + 4\alpha^2N - 4\alpha^2mv_c^2) \\ & - 2\alpha\{(1 + \epsilon_c)(U_1 - v_c)^2 + (1 - \epsilon_c)(U_2 \\ & - v_c)^2\}] \\ B_{22} &= \alpha\{(1 + \epsilon_c)(1 + 2B_1)(U_1 - v_c) \\ & - (1 - \epsilon_c)(1 - 2B_1)(U_2 - v_c) - 8\alpha m \\ & \times vB_1\} / [2(\epsilon_c + 16\alpha^4D + 4\alpha^2N \\ & - 4\alpha^2mv_c^2) - 2\alpha\{(1 + \epsilon_c)(U_1 - v_c)^2 \\ & + (1 - \epsilon_c)(U_2 - v_c)^2\}] \\ B_{23} &= -(\alpha^3/4)\{(1 + \epsilon_c)(1 + 4B_1)(U_1 \\ & - v_c)^2 + (1 - \epsilon_c)(1 - 4B_1)(U_2 - v_c)^2\} \\ & / [2(\epsilon_c + 81\alpha^4D + 9\alpha^2N - 9\alpha^2m \\ & \times v_c^2) - 3\alpha\{(1 + \epsilon_c)(U_1 - v_c)^2 + (1 \\ & - \epsilon_c)(U_2 - v_c)^2\}] \end{aligned}$$

である。もしも、式(34)より、振幅 $A(t)$ が決定されれば、流体と板の運動は、 A^3 までの正しさで、 $x = x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)}$ によって与えられることとなる。とくに、板の形は、式(21)、(30)、(38)より

$$\begin{aligned} \eta &= AS_1 + (\alpha/2)B_1A^2C_2 + (B_{21}A^2 \\ & + B_{22}A\dot{A})S_2 + B_{23}A^3S_3 + O(A^4) \dots\dots\dots(39) \end{aligned}$$

のように、 A^3 までの正しさで、求められることになる。

7. 有限振幅波の振幅

考えている系に生ずるかく乱波の振幅は式(34)によって定められる。したがって、この式を時間について積分して A を求めればよいのであるが、流体と板と流れの状況によって変わるパラメータをたくさん含むので、まず、弾性板はゴム製であり、下の流体は止っていて上の流体のみが流れている場合について、上下の流体がともに液体であることを想定して、 ϵ - α 面上に中立安定曲線を、板厚の変化をパラメータとして描けば、図2(a)のようになる。なお、その際、板厚を示すパラメータが他の量から分離されるように、板のヤング率 $\tilde{E}$ 、密度 $\tilde{\rho}_p$ 、厚さ $\tilde{h}$ を、各々、 $\tilde{E}/(\rho_1 + \rho_2)V^2 \equiv E$ 、 $\tilde{\rho}_p/(\rho_1 + \rho_2) \equiv \rho_p$ 、 $\tilde{h}/l \equiv h$ のように無次元表示し、板のポアソン比 σ を導入した。この図2中で、各曲線と α 軸とで囲まれた領域内で系は不安定となり、他で安定となっている。もし、下の流体が水であり、上側

の流体が石油の場合には、 $\epsilon = 0.111$ となり、図2中で、 α 軸に平行な $\epsilon = 0.111$ を示す直線が各曲線によって切りとられた波数領域内でかく乱が発生することになる。板厚が増すにつれて不安定となる波数領域は減少し、しかも、発生する波の波長は長い領域へと移動することがわかる。図2(a)で $h = 0.2$ の場合は、石油が 20.6 cm/s ほどの速さで流れ、板厚が 1.13 mm ほどの状態に相当するのであるが、この場合の不安定領域内で、波数が $\alpha = 0.15$ とし、初期 $t = 0$ で、 $A = 0.001$ 、 $\dot{A} = 0$ と選び、式(34)を数値的に積分し、図2(b)には、 A を t の関数として、図2(c)には、 A と $\dot{A}$ の関係を相平面上に示した。図2(a)~(c)より、不安定領域内では、式(34)の右辺の係数 a は正となつて、かく乱は初期には成長するが、負の係数 b をもつ非線形項により、成長は抑えられ、ある平衡振幅 A_e のまわりに振幅は振動し、時間とともに減衰する。その振動の振幅は式(34)より、流体の粘度に比例し、波長の二乗に反比例する抵抗をうける。いま、図2(a)の ϵ - α 平面上の、 $\epsilon = 0.111$ の不安定区間内で、式(34)の $\dot{A}$ 、 $\ddot{A}$ を零として得られる、平衡振幅

$$A_e = \sqrt{-a/b} \dots\dots\dots(40)$$

を波数の関数として示せば、図2(d)のようになる。図2(d)より、不安定領域内では、必ず、平衡振幅 A_e が有限の値として定められることがわかる。そのうえ、特に注意すべきことは、平衡振幅が最大となる波数は不安定波数区間の中央ではなく、波長の長い側の中立安定状態にごく近い波数の所であることである。そして、その波数は板厚にはほとんど関係せず一定となる。図2(e)には、石油と水をゴム板で仕切った場合について、面内力の影響を示した。引張面内力の増大は不安定領域の減少と平衡振幅の減少とをもたらす。そして、平衡振幅を最大とする波数は引張面内力の増大とともにほんのわずかな増大するが、実際の影響はほとんどない。図2(f)には、上下の流体の速度差 $\Delta U = U_1 - U_2$ の影響を示した。速度差の減少は不安定領域を減少させ、平衡振幅も減少させる。そして、最大平衡振幅となる波数は速度差の減少とともに増大し、波長の短い波が大きな振幅をもつこととなる。なお、平衡振幅は、式(40)からわかるとおり、流体の粘性には無関係である。

次に、図2(b)に示したように、振幅 A は十分時間がたてば、平衡振幅を中心として時間的に変動するから、その性質を調べてみよう。振幅の平衡値からのずれ、 $\Delta = A - A_e$ は、 $A_e \gg \Delta$ の条件のもとでは、振動数 $\omega = \sqrt{aa/M}$ 、減衰係数 $\beta = -aC/4M$ で、時間的に

変動することが、式(34)より知られる。これらの値を α の関数として示せば、図2(g)の2組の曲線群になる。これらより、振動数は不安定波数区間で中央よ

りやや波長の短い側で最大値をとり、減衰係数は波数の二乗に比例して波数の増大とともに大きくなっている。このように、不安定域で発生した波は時間的に周期変動する振幅をもち、式(35)の線形波と同じ位相速度をもつ進行波として伝ばし、次第に振幅の変動は小さくなり、ついには、一定のある振幅の定常進行波となることが知られる。

最後に、下の流体が液体で、上の流体が気体の場合の例として、水と空気に相当する $\epsilon=0.997$ の平衡振幅を示せば、図3のようになる。この場合には、流体が液体と液体の場合に比べ、安定であるため、不安定域での実際の流速が大きく、したがって、不安定とな

(a) 中立安定曲線

(b) 振幅の時間変化

(c) 相平面に示した振幅

(d) 平衡振幅への板厚の影響

(e) 平衡振幅への面内力の影響

(f) 平衡振幅への速度差の影響

(g) 振幅の振動数と減衰係数

図2 ゴム板に仕切られた二つの液体の流れ
($E=50\,000$, $\rho_p=0.528$, $\sigma=0.5$)

図3 気体と液体の場合の平衡振幅

る波数の範囲が高波数領域に移るけれども、かく乱波の変遷過程は本質的の違いを示さない。

8. む す び

薄い弾性板で水平に仕切られた二つの流れに発生する有限の振幅をもつかく乱波の挙動が、流体は渦なし運動をするものとし、板はそれ自身の変形による面内力を考慮した大変形の方程式に従うものとし、板は流体より、その面に垂直方向に、圧力と同時に粘性力を受けるとして理論的にとり扱われた。その結果

(1) かく乱波の位相速度で動く座標系のもとで、振幅展開を用いて、振幅の三乗までの正しさで、振幅を決定するための方程式が導かれ、

(2) 一方、位相速度は線形波のそれと同じ近似の程度で等しいことが示された。

(3) 流体と板の材質を具体的に指定したうえで、振幅の方程式から、有限な平衡振幅が不安定領域内に必ず存在し、

(4) かく乱波の振幅はその平衡値のまわりで時間的に周期変動しながら、流体の粘性のために減衰し、最後には、平衡振幅の定常的進行波としてかく乱は伝ばする。

(5) その際、平衡振幅が最大となる波数は、不安定波数域の中央ではなくて、波長の長い側の中立安定状態にごく近い所となっている。

(6) しかし、平衡振幅に到達するまでの振幅の時間的変動の振動数は、逆に、波長の短い中立安定状態に近い側で最大となり、

(7) その振動の減衰係数は波長が短くなるにつれて、波数の二乗に比例して、大きくなることが知られた。

文 献

- (1) Chandrasekhar, S., *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, (1961), 481, Oxford Univ. Press.
- (2) Drazin, P. G., *J. Fluid Mech.*, 42-2 (1970), 321.
- (3) Nayfeh, A. H. and Saric, W. S., *J. Fluid Mech.*, 46-2 (1971), 209.
- (4) Nayfeh, A. H. and Saric, W. S., *J. Fluid Mech.*, 55-2 (1972), 311.
- (5) 長谷川・田辺, 機論, 47-417, B (昭56), 771.
- (6) Stuart, J. T., *J. Fluid Mech.*, 9-3 (1960), 353.
- (7) Landau, L. D. and Lifshitz, E. M., *Fluid Mechanics*, (1959), 103, Pergamon Press.
- (8) Miksis, M. J., Vanden-Broeck, J. M. and Keller, J. B., *J. Fluid Mech.*, 123 (1982), 31.
- (9) Hasegawa, E., *Theoretical and Applied Mechanics*, 28 (1980), 325, Univ. Tokyo Press.
- (10) Matsuzaki, Y., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 48-3 (1981), 472.
- (11) Lighthill, J., *Waves in Fluids*, (1978), 229, Cambridge Univ. Press.

討 論

〔質問〕 橋本 弘之〔東北大学高速力学研究所〕

図1に示す運動系は厳密には板の上下面 ($y = \pm h/2$) においてそれぞれ不安定性が存在し、実際の板の運動は両者の干渉の結果として実現されるものと思われる。しかるに、著者は板の上下界面が同一の変動をするものとして両面を $y=0$ の位置で代表した解析を行い、1個の条件式(13)のみを得ている。さらに、図2には $h=0.05 \sim 0.2$ の比較的大きな板厚の効果をも示しているが、これは $y \cong 0$ とした計算条件と矛盾しないのか。著者が考えている流れ模形が、実際に実現する弾性板とその上下面を流れる流体の運動との相互干渉に基づいた不安定性を、適確に表現しているという根拠があったらお示し願いたい。

〔回答〕 板を厚みのない面とみなすか、それとも、上下別々の二つの面からなるある厚みをもつものとみなすかは、板の運動方程式としてどんなものを採用したかにかかわる問題である。ところで、現在までのところ、板の方程式といわれるものは、カルマンの方程式にしろ、本論文で用いた方程式にしても、変形のために生ずる面内力の算出には板の内部の応力状態を考慮するが、板の方程式として最終的にまとめあげられた方程式は板の中立面の位置で代表された1枚の厚みのない面についてのものである。目下のところ、板の方程式と呼ばれる式でこれよりもっと正確なものは導出されていないと思う。したがって、ご指摘いただいているように、板の両面の運動は同一であると

し、普通、流体を境する板の運動の問題で以前より今日まで取扱われてきているような方法で(付1)(付2)、ここでは解析を進めた。

次に、現実の板と流体の運動を適確に表現しているか否かについての問題であるが、板の振幅の方程式の導出にいたるまでの過程で、著者としては、特別に無理な仮定を導入したとも思っていないので、結果は十

分実現の現象を説明しうるものであると思っている。なお、板の表面での粘着の条件を課さなかったのは、やはり、現存する板の方程式にかかわりがあり、通常、板の問題では、板の横変位についての運動方程式のみで面に沿った方向の変位についてのそれは考えられていない。したがって、流体の側の運動もその程度の正確さで考えてもよいことになり、壁面に接する方向の記述に不備な完全流体の運動とみなし、その運動に基づく法線方向の粘性力のみを正しく表現する方法を採用した。

(付1) Kelly, R. E., *AIAA J.*, 3-6 (1965), 1113.

(付2) Schroter, V. and Fahy, F. J., *J. Sound Vib.*, 74-4(1981), 465.