物体のまわりの低レイノルズ数流れの数値解析*

中林 幸三郎**, 三宅 裕***, 青井 忠正****

Numerical Analysis of Low Reynolds Number Flow around
a Body Immersed in a Uniform Stream

by Kohzaburo NAKABAYASHI, Yutaka MIYAKE, and Tyusei AOI

In this report, the factors that are responsible for the accuracy of numerical calculations of two-dimensional low Reynolds number flows around cylindrical bodies immersed in a uniform stream on the basis of Navier-Stokes equations are discussed.

The finite difference calculations have been carried out for a circular cylinder and it has been confirmed that the difference of the outer boundary condition affects little on the accuracy, if the outer boundary is sufficiently far from the body, but if a comparatively near outer boundary is assumed, Oseen flow is recommended as the outer flow on the boundary. The results can be extended to the other geometries of cylinders and Imai's asymptotic solution can be available in place of the Oseen flow.

Some aspects of the flow, such as streamlines, length of twin-vortices, angle of flow separation, etc. are also discussed.

Key Words: Fluid Mechanics, Low Reynolds Number Flow, Numerical Simulation, Finite Difference Method, Full Navier-Stokes Equation, Oseen Approximation, Plane Flow

1. ま え が き

物体のまわりの層流をできるだけ大きいレイノルズ数まで、解析的にしろ数値的にしろ精度よく求めることは流れ解析の基礎を為す問題の一つとして古くから多くの研究者の関心を集めてきた。流れはこの場合、だ円形方程式に支配されるので無限遠方の境界条件を指定することが必要であるが、その条件は物体形状にはよらず、物体が流れに与える力によって決まるので代表的な物体として二次元流れでは円柱がとり上げられてきた。円柱のまわりの流れを数値的に解く試みは Thom⁽¹⁾、川口⁽²⁾の先駆的論文を始めとして幅広いレイノルズ数範囲を扱った最近の Fornberg の報告⁽³⁾にいたるまで多くの研究がある^{(4)~(6)}。

物体のまわりの流れの差分式による数値解では無限遠での境界条件の選び方と、無限遠境界を有限境界に置きかえるに際してその物体からの距離が解の精度に影響する。無限遠の境界条件については Takaisi⁽⁸⁾が、うず度とじょう乱の流れ関数 ψ について

(1) $\psi_\infty, \zeta_\infty$ を Imai の漸近解 (第1項)⁽⁹⁾とする場合

(2) $\psi_\infty, \zeta_\infty = 0$ とおく場合

について $0.5 \leq Re \leq 100$ の範囲で SLOR 法を用いた差分法で解を求め、いずれの境界条件でも C_D にはほとんど差がないと述べているが、十分小さいレイノルズ数に対して数値解がオゼン近似の厳密解とくい違っていると結論しており、吟味の結果にやや疑問が残る。また Fornberg⁽³⁾は無限遠の境界条件をうず度についてはすべて $\partial\psi/\partial r = 0$ とし、じょう乱の流れ関数 ψ の値については

(1) $\psi = 0$

(2) Imai の漸近解 (第1項)

(3) $\partial\psi/\partial r = 0$

(4) 混合条件,

すなわち上記(1)と(3)の組合せの四つの場合について吟味している。その結果、外方境界条件を非常に大きくとればこれらの境界条件の違いは結果に影響しないことを確かめ、外方境界の大きさを有限とするときは $Re \leq 40$ では(3)、 $Re > 40$ では(4)の条件が適当であると結論している。しかしこれらの結論の一般性の説明は十分でなくならずしも確立された結論とは言えない。

* 昭和60年3月31日 第62期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和59年10月1日。

** 正員、摂南大学工学部 (〒572 寝屋川市池田中町17-8)。

*** 正員、大阪大学工学部 (〒565 吹田市山田丘2-1)。

**** 大阪工業大学 (〒535 大阪市旭区大宮5-16-1)。

本報では計算精度を低下させないでできるだけ小さな外側境界を設定するための条件と好適な外側境界条件を探索するために円柱のまわりの流れをとり上げて検討した。本報では従来の報告に比べてより小さい差分格子を用い、解の収束の基準として最も収束しにくいと考えられる円柱表面上のうず度と定るうず中の ϕ, ζ の値の収束を用いて、差分解としては従来の解に比べて高い精度の解を求めて上記の条件を調べたものである。

2. 基礎式と境界条件

円柱のまわりの二次元流れを解くため円柱中心を原点とする極座標系 (r, θ) を考える。ただし長さ r は円柱半径で無次元化する。 (r, θ) を

$$z = \log r, \quad \theta = \theta \quad \dots\dots\dots (1)$$

を用いて (z, θ) 座標系に変換する。無限上流での一様流速を U とし、流れ関数 Ψ を

$$\Psi = e^z \sin \theta + \phi(z, \theta) \quad \dots\dots\dots (2)$$

と表わす。ただし Ψ, ϕ は Ua で無次元化してある。 ϕ はじょう乱の流れ関数である。 ϕ とうず度 $\zeta(a/U$ で無次元化)は次式を満足することになる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = -e^z \zeta \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2} + \frac{Re e^z}{2} \left(\sin \theta \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} - \cos \theta \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \\ = \frac{Re}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \right) \quad \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

ここに $Re = 2aU/\nu$ (ν : 流体の動粘性係数)はレイノルズ数である。流れは x 軸(一様流の向き)に関して対称であるので境界条件は次のようになる。

$$\theta = 0, \pi \text{ で}$$

$$\phi = \zeta = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$z = 0 \text{ で}$$

$$\phi(0, \theta) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_{z=0} = -\sin \theta \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$z = z_\infty \text{ で}$$

$$\left. \begin{aligned} \phi(z_\infty, \theta) &= f(C_D; z_\infty, \theta) \\ \zeta(z_\infty, \theta) &= g(C_D; z_\infty, \theta) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

または

$$\left. \begin{aligned} \phi(z_\infty, \theta) &= \phi^0(z_\infty, \theta) \\ \zeta(z_\infty, \theta) &= \zeta^0(z_\infty, \theta) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここに

$$\begin{aligned} f(C_D; z, \theta) &= \frac{C_D}{2} \left(\frac{\theta}{\pi} - \operatorname{erf} Q \right) \\ &\quad - \frac{C_D^2 R_e}{16\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{P} [\sqrt{2} (\operatorname{erf} \sqrt{2} Q - 1) \right. \end{aligned}$$

$$\left. - e^{-Q^2} \operatorname{erf} Q \right\} + \frac{\sqrt{2} P}{P^2 + Q^2} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\begin{aligned} g(C_D; z, \theta) &= -\frac{C_D R_e}{4\sqrt{\pi}} \frac{Q}{r} e^{-Q^2} + \frac{C_D^2 R_e^2}{64\sqrt{\pi} r} \\ &\quad \times \left\{ -\frac{1}{P} e^{-Q^2} \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} Q e^{-Q^2} + (2Q^2 - 1) \operatorname{erf} Q \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{P^3} \left[\sqrt{2} (\operatorname{erf} \sqrt{2} Q - 1) - e^{-Q^2} \operatorname{erf} Q \right] \right\} \quad \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

$$\text{ただし } P = \sqrt{Re r/2} \cos(\theta/2), \quad Q = \sqrt{Re r/2}$$

$$\sin(\theta/2), \quad \operatorname{erf} Q = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^Q e^{-s^2} ds \quad \text{である。上式は}$$

Takami-Keller⁽⁶⁾がImai⁽⁹⁾の死水内の漸近解を全流場に拡張したもので、 f, g の第1項がオゼン近似の漸近解である。 ϕ^0, ζ^0 は設定した外側境界面上のオゼン流れの解析解から求められる流れ関数値、うず度である。本報では $z = z_\infty$ ではこれら二つの境界値を用いて計算し、それらの結果を吟味する。以下式(7)の境界条件をT. B. C., 式(8)をO. B. C.と略記する。これらの境界条件は物体の後流を考慮しており、採用すべき境界条件としては最も妥当と考えられる。

3. 差分方程式

差分式には最も簡単な中央差分式を用いる。高次精度の中央差分式の数値精度に対する効果はDennis-Chang⁽⁷⁾が検討しているが、抗力係数などの値にはほとんど差が生じないと報告している。

本報では運動方程式に対応するうず度の式にはADI法を用いて外側境界条件が流れの場内に速やかに影響しうるように配慮した。また流れの関数には θ 方向にSLOR法を用いた。用いた差分式は次のとおりである。

流れの関数:

$$\begin{aligned} \alpha_B \phi_{i,j}^{n+1} + \alpha_0 \phi_{i,j}^{n+1} + \alpha_D \phi_{i,j}^{n+1} \\ = -e^{2(i+1)a} \zeta_{i,j}^n - \alpha_A \phi_{i+1,j}^n \\ - \alpha_C \phi_{i-1,j}^n \quad \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

$$\text{ただし } \alpha_A = \alpha_C = 1/a^2, \quad \alpha_B = \alpha_D = 1/b^2,$$

$\alpha_D = -2[(1/a^2) + (1/b^2)], a = \Delta z, b = \Delta \theta$ で添字 (i, j) は格子点 $[z = (i-1)a, \theta = (j-1)b]$ を意味する。

うず度の差分式には $\phi^{n+(1/2)}$ が必要であるが、これらは次式で求めた。

$$\left. \begin{aligned} \phi_{i,j}^{n+1} &= \phi_{i,j}^n + K(\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^n) \\ \phi_{i,j}^{n+(1/2)} &= \frac{1}{2}(\phi_{i,j}^n + \phi_{i,j}^{n+1}) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここに K は緩和係数で本報では1.6に選んでいる。

うず度の式: 最初の1/2回は θ 方向に対して線緩和を次式を用いて行う。

$$\begin{aligned} & \beta_B \zeta_{i,j+1}^{n+(1/2)} - (\beta_{02} + \rho) \zeta_{i,j}^{n+(1/2)} + \beta_D \zeta_{i,j-1}^{n+(1/2)} \\ & = -\beta_A \zeta_{i+1,j}^n + (\beta_{01} - \rho) \zeta_{i,j}^n - \beta_C \zeta_{i-1,j}^n \dots\dots (13) \end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned} \beta_B &= \frac{1}{b^2} + \frac{R_e e^z}{4b} \sin \theta \\ &+ \frac{R_e}{8ab} (\phi_{i+1,j}^{n+(1/2)} - \phi_{i-1,j}^{n+(1/2)}) \\ \beta_D &= \frac{1}{b^2} - \frac{R_e e^z}{4b} \sin \theta \\ &- \frac{R_e}{8ab} (\phi_{i+1,j}^{n+(1/2)} - \phi_{i-1,j}^{n+(1/2)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_{02} &= \frac{2}{b^2}, \quad \beta_{01} = \frac{2}{a^2} \\ \beta_A &= \frac{1}{a^2} - \frac{R_e e^z}{4a} \cos \theta \\ &- \frac{R_e}{8ab} (\phi_{i,j+1}^{n+(1/2)} - \phi_{i,j-1}^{n+(1/2)}) \\ \beta_C &= \frac{1}{a^2} + \frac{R_e e^z}{4a} \cos \theta \\ &+ \frac{R_e}{8ab} (\phi_{i,j+1}^{n+(1/2)} - \phi_{i,j-1}^{n+(1/2)}) \end{aligned}$$

後の 1/2 回, すなわち $(n+1)$ は次式を用いて z 方向に線緩和を行った。

$$\begin{aligned} & \beta_A \zeta_{i+1,j}^{n+1} - (\beta_{01} + \rho) \zeta_{i,j}^{n+1} \\ & + \beta_C \zeta_{i-1,j}^{n+1} = -\beta_B \zeta_{i,j+1}^{n+(1/2)} \\ & + (\beta_{02} - \rho) \zeta_{i,j}^{n+(1/2)} - \beta_D \zeta_{i,j-1}^{n+(1/2)} \dots\dots (14) \end{aligned}$$

上式で ρ は加速係数で 3.0, 2.5, 2.0, 1.5 の四つの値を順に使用した。

式(11)に対しては内側(物体上)境界で式(5), (6)を, また外側境界面上で式(7)または式(8)の ψ を用いた。また式(13), (14)に対しては外側境界面上では式(7)または式(8)の ζ を用いるが, 内側境界面上では式(5)のほかに物体面上での ζ の値が必要である。これは次式を用いて求めた。

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= - \left\{ \frac{2(\psi_2 + \sin \theta)}{a^2} + \frac{2 \sin \theta}{a} + \sin \theta \right\} \\ \text{または} \\ \zeta_0 &= \frac{1}{2a^2} \{ \psi_3 - 8\psi_2 - (2a^2 + 6a + 7) \sin \theta \} \end{aligned} \dots\dots (15)$$

ただし ψ の添字は差分格子の z 方向の壁からの列の番号である。差分商の高い精度をもとにしてつくった 2 番めの式はかならずしも最初の式よりよい結果をもたらさない。なお物体面上のうず度の評価のためには Dennis-Chang⁽⁷⁾の方法があるが, 本質的には式(11)~(15)で解いた本報の ζ_0 の評価と変わらない。収束までの計算時間にとって初期値として与える ψ, ζ の分布は重要であるが, 本報では Tomotika-Aoi⁽¹⁰⁾によ

って求められたオゼン近似式に対する解析解を数値計算して用いた。

差分格子は $\Delta z = 0.05$, $\Delta \theta = 3^\circ$ とした。 z_∞ はその影響を調べる場合のほかは $z_\infty = 3 (r_\infty = 20.1)$ に選んだ。ただし $R_e < 1$ では z_∞ は大きくとることが必要なので $z_\infty = 4.8 (r_\infty = 121)$ とした。また収束の判定は物体近傍の死水内でもっとも収束しにくい位置のうず度の変化率が 10^{-4} 以下になったときを目安とした。

4. 抗力係数 C_D

円柱の抗力 D は $\rho U^2 a$ で無次元化して抗力係数 C_D で表わす。 C_D は次式で求める。

$$\begin{aligned} C_D &= -\frac{4}{R_e} \int_0^\pi \zeta_0 \sin \theta d\theta \\ &+ \frac{4}{R_e} \int_0^\pi \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \sin \theta d\theta \dots\dots (16) \end{aligned}$$

または

$$\begin{aligned} C_D &= -\frac{4}{R_e} \int_0^\pi \zeta_0 \sin \theta d\theta \\ &- 2 \int_0^\pi P(1, \theta) \cos \theta d\theta \dots\dots (17) \end{aligned}$$

ただし添字 0 は円柱面上の値を意味する。また $P(1, \theta)$ は壁面上の無次元圧力係数である。上式で右辺第 1 項は摩擦抗力, 第 2 項は圧力抗力を表わす。

5. 計算結果と考察

5.1 差分解の誤差 従来の円柱まわりの流れの数値解の報告ではその精度を定量的に明示した報告はないが, 本計算の数値精度を明らかにしておくために厳密な解析解⁽¹⁰⁾が知られているオゼン近似式を本報の差分法で解き解析解と比較した。

図 1 は誤差の精度を示すために円柱面上のうず度 ζ_0 の誤差を求めたものである。図 1 中 r. m. s. は

図 1 オーゼン近似の誤差

$$r. m. s. = \sqrt{\frac{\sum_{N} [(\zeta_0)_n - (\zeta_0)_a]^2}{N}} \dots\dots\dots (18)$$

で、円柱面上の $N=61$ 個の格子点上でのうず度の数値解 $(\zeta_0)_n$ と解析解 $(\zeta_0)_a$ の差の総和を代表している。また $\Delta\epsilon$ は $\Delta\epsilon = r. m. s. / |\bar{\zeta}|$ で $|\bar{\zeta}|$ は円柱面上のうず度 $(\zeta_0)_a$ の平均値である。誤差は Re の増加とともにほぼ直線的に増加し、数値解の困難が増す。なお、外側境界面 (円) の距離は $r_\infty = 20.1$ である。

表 1 は抗力係数 C_D の比較で、 C_{DF} , C_{DP} , C_{DT} はそれぞれ摩擦抗力、圧力抗力、全抗力である。それぞれのレイノズル数の左欄は解析解、右欄は数値解である。解析解では C_{DF} と C_{DP} は同じである。 C_D もまたレイノズル数の増加とともに誤差が増大するが、その誤差は主として圧力抗力の誤差に起因している。円柱面上の圧力 $P(1, \theta)$ は

$$\begin{aligned} P(1, \theta) &= \frac{P(1, \theta) - P(r_\infty, \pi)}{\rho U^2 / 2} \\ &= 2 + \frac{4}{Re} \int_0^\infty \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \right)_{\theta=\pi} dz \\ &\quad - \frac{4}{Re} \int_0^\pi \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)_0 d\theta + 2 \int_0^\pi \zeta_0 \cos \theta d\theta \end{aligned} \dots\dots\dots (19)$$

で求められる。図 2 は $P(1, \theta)$ の例で、実線は差分解、

破線は解析解、一点鎖線は解析解からうず度を求めて $P(1, \theta)$ のみ差分式で求めた場合である。レイノズル数の増加とともに円柱面上の圧力分布の精度は急速に低下する。しかし C_D は $\theta = \pi/2$ の上流側と下流側でのある積分値の差になるので、誤差は打ち消し合い $P(1, \theta)$ にあらわれるほどの誤差は生じない。 $P(1, \theta)$ の誤差は主として式 (19) の第 3 項のうず度の壁面に垂直な方向の変化率の誤差に起因する。図 3 は $Re=20$ の場合の $r=1.00$ (円柱表面)、1.05, 1.105 の円周上でのうず度の分布で、実線は差分解、破線は解析解である。差分解の未知量として直接求められるうず度は図 3 のように誤差は十分に小さい。うず度の大きさは壁から離れるにつれて速やかに減少するのでその微分を差分に置きかえるに際しての誤差が大きくなる。しかし図 4 に示すようにナビエ・ストークス式 (以下 N-S 式と略す) の場合には壁近傍のうず度の変化率は壁にそう方向にも、垂直な方向にもオゼン近似の場合よりはるかに小さい。オゼン近似は x 軸方向へのうず度の輸送効果を過大に見積もる近似になるからである。したがって N-S の場合にはうず度の差分近似による誤差は図 2 に示すほどの誤差は与えないと考えられる。

5.2 外側境界条件 図 5 は円柱が受ける抗力の

表 1 オゼン近似の C_D

	Re = 1		Re = 10		Re = 20		Re = 40	
C_{DF}	5.928	5.927	2.088	2.093	1.733	1.743	1.513	1.532
C_{DP}	5.928	5.922	2.088	2.104	1.733	1.757	1.513	0.944
C_{DT}	11.857	11.849	4.175	4.197	3.466	3.499	3.026	2.475

図 2 円柱面上の圧力分布 (オゼン近似)

図 3 円柱近傍のうず度分布 (オゼン近似)

図 4 円柱近傍のうず度分布 (Full N-S 式)

表 2 円柱の抗力係数 $C_D = D/\rho U^2 a$ の比較

Reynolds number ...	0.01	0.05	0.1	1.0	4.0	10	20	40	60	80	100
OSEEN	380.366	100.536	58.312	11.857	5.842	4.175	3.466	3.026	2.850	2.750	2.688
T.B.C.	-----	-----	54.248	10.050	4.430	2.769	2.018	1.517	1.298	1.176	1.093
PRESENT O.B.C.	379.494	100.221	57.925	10.556	4.444	2.728	1.966	1.462	1.243	1.121	1.038
TAKAMI & KELLER	-----	-----	-----	10.283	4.437	2.754	2.003	1.536	1.325	---	---
DENNIS & CHANG	-----	-----	-----	---	---	2.846	2.045	1.522	---	---	---
FORNBERG	-----	-----	-----	---	---	---	2.000	1.498	---	---	1.058

図 5 円柱の抗力係数の計算値

レイノルズ数による変化の計算結果である。実線は T. B. C., 一点鎖線は O. B. C. を外側境界条件として $r_\infty = 20.1$ にとって N-S 式を数値的に解いた場合で、破線はオゼン近似の解析解である。また○印は Tritton の実験値⁽¹¹⁾である。

5・1 節に述べたようないろいろな誤差の原因が考えられるにもかかわらず数値解の結果は十分大きいレイノルズ数まで、いずれの境界条件でも C_D は実験値とよく一致する。表 2 は C_D のこれまでの報告を数値的にまとめて示したものである。オゼン近似は $Re=1$ でもなおかなり過大な C_D を与えるが、 Re が十分小さいとき N-S 式はオゼン近似で十分精度よく近似できると考えられるので図 5 に C_D のオゼン近似による C_D すなわち C_{Doseen} とのくい違いを示した。O. B. C. の場合には $Re \leq 0.1$ でオゼン近似と 1% 以内に近づくが、T. B. C. の場合にはくい違いが残る。また Re が大きいとき $Re=4$ を境に、 Re がそれ以上では T. B. C. のほうが O. B. C. より小さい C_D 値を与え、それ以下では逆になる。なお C_D は Re の減少とともに $1/Re$ の程度で増大するが、T. B. C. では C_D を用いて外側境界条件を決めており、数値解の過程での繰返しごとに修正を必要とするので Re が小さくなると C_D が大きいために収束が困難になる。本計算では $Re=0.04$ が下限であった。

r_∞ が十分大きいとき、外側境界条件は数値解の結果に大きな影響を与えないことを Fornberg⁽³⁾が指摘している。このことを吟味するために C_D , ζ_{max} の収束

(a) C_D

(b) ζ_{max}

図 6 外側境界線の距離の影響

値に対する r_∞ の距離の影響を調べた。図 6 はその結果で、(b) の ζ_{max} は円柱表面上のうず度の最大値である。なお、図 6 では見やすくするために C_D , ζ_K は図中に示したようにそれぞれの Re に対して定義した C_{DK} , ζ_K に変換して示した。また図 6 中○印は表 2 に示したこれまでの報告の値で、T は Takami-Keller⁽⁶⁾, D は Dennis-Chang⁽⁷⁾の計算値で、添字は Re の値である。報告された値が必ずしも十分な r_∞ の値でないことがわかる。図 6 より以下のことがわかる。

(1) r_∞ が十分大きければ外側境界条件の違いは計算結果には影響しない。その r_∞ の限界値はほぼ 200 である。

(2) T. B. C. の場合は Re が大きいほど r_∞ の値は大きな値を要するが、O. B. C. の場合は反対に Re が大きいほど r_∞ は小さくてよい。

(3) O. B. C. では r_∞ を大きくするにつれて C_D , $\zeta_{\max}$ とも減少しながら飽和値に漸近する。一方、T. B. C. の場合には Re が 4 を境に Re がそれ以上のときは減少しながら漸近するが、それ以下では反対に増加しながら漸近する。図 5 の C_D の値の $Re=4$ 付近での入れかわりはこのことに対応している。

以上より外側の境界条件は O. B. C. を採用するほうが有利であり、 Re が小さいほど r_∞ は大きくとることが必要であると結論される。 Re が小さいほど粘性拡散の効果が大きく、物体の存在の影響が遠方まで及ぶからである。また、 Re が大きいほど物体が流れ場に与えるじょう乱は狭い後流域に限定されるようになり、遠方での後流域内部での分布の誤差は大きな誤差を生じない。図 7 は T. B. C. と O. B. C. の場合の $r_\infty=20.1$ の外側境界円上での境界条件として与える ψ と ζ の分布である。 $Re=1$ ではオゼーン近似はより弱いじょう乱流れを仮定することになるが $Re=10, 40$ ではより強いじょう乱流れを仮定することになる。T. B. C. は式 (9), (10) に示したように距離 (r) の第 2 項までの漸近展開であるから有限な距離では必ずしも適当な流れを与えない、すなわち図 7 の点 (●: $Re=1$, ■: $Re=10$, ▲: $Re=40$) は漸近解の第 1 項を示しているが、第 2 項までの解とはかなり差がある。本計算例では円柱を扱っているのでオゼーン近似の厳密な解析解が得られる。しかし任意の断面形状の場合にはオゼーン近似でも解析解は困難である。したがって任意の断面形状の場合には距離を十分にとり Imai の漸近解 (第 1 項) を外側境界条件として採用することが実用的と考えられる。

図 7 外側境界円上での ψ, ζ の分布

5.3 円柱のまわりの流れ 5.2 節では主として C_D に対する計算条件を述べた。本節では円柱のまわりの流れ、その他の流れの特長をなす諸量について述べる。

図 8 は円柱まわりの流れの流線 (上半分) と等うず度線 (下半分) の一例で、 $Re=40$ の場合である。また図 9 は $Re=10$ の場合の N-S 式の O. B. C. の場合 (実線) とオゼーン近似 (破線) の場合の比較である。図 8 では先述の外側の境界条件におけるじょう乱流れの強さの違いのため、物体から遠方の流線、等うず度線にくい違いがあらわれるが、物体近傍ではほとんど違いがあらわれない。より小さいレイノズ数ではくい違いは更に小さくなる。これに反し、オゼーン近似は対流項の線形化の不都合が物体近傍でより強くあらわれるので流線、等うず度線は全流場で一樣にくい違いが顕著になる。

図 10 は双子うずが発生する場合のはく離流線の出発位置 θ である。また図 11 は双子うず長さ L/a で、○印は Taneda⁽¹¹⁾ の実験値である。 θ は T. B. C. と O. B. C. とでは全く差が生じない。このことは図 8 で流れのくい違いが物体近傍で小さくなることと符号する。一方オゼーン近似は対流効果が過大になっているので物体近傍では局所的にレイノズ数が大きくなったこ

図 8 円柱まわりの流れ (O. B. C. と T. B. C. の比較)

図 9 円柱まわりの流れ (オゼーン近似と N-S 式)

図 10 円柱面上のはく離位置

と同等になり双子うずの発生がより低レイノルズ数で生じ、同じレイノルズ数でははく離領域が広がる。双子うずの長さについても双子うずが持続するレイノルズ数範囲では T. B. C. と O. B. C. の間の差は小さく、実験値とよく一致する。またオゼーン近似ではうずが下流側へ強く輸送されるため双子うずはより長くなる。オゼーン近似が N-S 式に対する近似として成り立つのは Re が 0.1 以下で、双子うずが発生する程度のレイノルズ数ではもはやよい近似ではなくなる。

6. 結 論

以上述べたように本研究では物体まわりの遅い流れの数値解析における外側境界の大きさと外側境界条件の設定に対して従来の研究では明確でなかった点について吟味し結論を得たものである。要約すると

- (1) 外側境界を十分遠方にとれば外側境界条件の違いは物体近傍の流れには影響しない。
- (2) 小さい外側境界を選ぶには外側境界条件としてオゼーン近似流れを選ぶのがよい。オゼーン流れが得られない場合には Imai の漸近解が有用であろう。
- (3) レイノルズ数が小さい領域では外側境界の位

図 11 双子うずの長さ

置は遠くにとる必要がある。

- (4) オゼーン近似は十分小さいレイノルズ数に対しては N-S 式に対する満足な近似になるがそのレイノルズ数の上限は 0.1 以下の程度で、双子うずが生ずる程度のレイノルズ数ではなお誤差が大きい。

文 献

- (1) Thom, A., *Proc. R. Soc., Ser. A*, 141 (1933), 651.
- (2) Kawaguti, M., *J. Phys. Soc. Jpn.*, 8-6 (1953), 747.
- (3) Fornberg, B., *J. Fluid Mech.*, 98-4 (1980), 819.
- (4) Apelt, C. J., *Aeronaut. Res. Council, Rep. Mem.*, No. 3175 (1961).
- (5) Keller, H. B. and Takami, H. (Greenspan, D. 編), *Numerical Studies of Steady Viscous Flow about Cylinder*, (1966), 115.
- (6) Takami, H. and Keller, H. B., *Phys. Fluids Suppl.*, II (1969), II-51.
- (7) Dennis, S. C. R. and Chang, G. Z., *J. Fluid Mech.*, 42-3 (1970), 471.
- (8) Takaisi, Y., 文献(6)の II-86 ページ.
- (9) Imai, I., *Proc. R. Soc., Ser. A*, 208 (1951), 487.
- (10) Tomotika, S. and Aoi, T., *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 3-2 (1950), 140.
- (11) Tritton, D. J., *J. Fluid Mech.*, 6-4 (1959), 547.
- (12) Taneda, S., *J. Phys. Soc. Jpn.*, 11-3 (1956), 302.