排水トラップ中の封水挙動の線形的取扱い*
(第1報, 封水振動系の線形化)

澤 洋一郎**, 森井 宜治**, 松平 秀雄**

Linear Theory on Seal Water Behavior in Drain Traps
(1st Report, Linearization of the Seal Water Oscillation System)

by Yooichiro SAWA, Nobuharu MORII, and Hideo MATSUDAIRA

This paper deals with linearization of the seal water oscillation system. In this procedure, the authors introduce a phenomenal time which changes with the intermittent seal water flow. When the seal water behavior is observed on the scale of this phenomenal time, the non-linear oscillation system can be treated as a linear one: 1) The motion of the gravitational center in the seal water corresponds to second-order oscillation. 2) The seal water flow corresponds to the response of first-order lag component. 3) They are described as a linear combination. Thus, the linear system makes it simple to analyze the dynamic performance of drain traps.

Key Words: Fluid vibration, Drain traps, Seal water, Non-linear oscillation, Linearization

1. ま え が き

排水管と衛生器具の中間に設けられた曲り管内に水を封入することにより、排水管内の悪臭・廃ガスなどの室内への侵入を防止する装置を排水トラップという。排水トラップ中の水(封水)は、排水管内の空気圧の変化をうけて運動を開始し、封水が Weir (図1)を越えるたびにその一部がトラップ外へ流出する。これに伴い、封水の質量が減少しながらトラップ内で振動する。

本研究の目的は、管内空気圧変動による封水の動的挙動を解析し、排水トラップの性能に関して考察を行うことにより、トラップ設計に対する基本的指針を得ることである。

既報⁽¹⁾では、封水挙動を解析するために、封水重心の変位に関する運動方程式および間欠的に発生する封水流出過程を記述する流出方程式から成る非線形方程式系を導出し、模型実験との照合を行ってその妥当性を確認した。これによって、現実に関わり得る程度の大きさの空気圧変動に対する封水挙動の数値的予測が

可能となった。

一方、排水トラップの形状・寸法などの決定、排水系統中でのトラップの合理的配置などの設計上の指針は、現象の物理的構造を十分に把握した後、解析的手法を用いて封水特性(空気圧の大きさと最終水位の関係)を検討することによって得られる。

しかしながら、封水の振動現象は以下に挙げる非線形性によって特徴付けられるため、それに対する解析的手法の適用を困難にしている。

(a) 流出過程による封水質量の減少と封水の運動との相互作用がもつ非線形性

(b) 振動する封水の一部が Weir を越える都度生じる流出過程の開始と停止の間欠的機構に起因する非線形性

(c) 曲り管と直管との組合せよりなるトラップ形状に起因する非線形性

このような封水の非線形振動現象に影響を及ぼす個々の因子に関して、それらの影響を定量的に把握するためには、現象を最も強く支配する部分を抽出しなければならない。そして、解析的手法が適用できる形の物理的構造をもつ系としてこれを表現し直す必要がある。

しかしながら、その過程で行われる線形化の手段と

* 昭和60年8月29日 第933回講演会において講演、原稿受付 昭和60年3月4日。

** 正員、沼津工業高等専門学校(〒410 沼津市大岡 3600)。

して、通常用いられる手法(たとえば、変位の二次以上を無視して線形化する方法)を直接用いることは適切でない。なぜならば、それによってこの現象の基本的性格〔上記(a)～(c)の非線形性〕が完全に損なわれるために、導き出された結果に実用上の難点が生じるからである。

したがって本報では、この基本的性格を失わない範囲で〔具体的には、上記(a)および(b)の非線形性を残す〕、合理的な線形化を行う。そして、解析的手法が適用可能な物理的構造をもつ系に再構築する。その具体的な内容は以下のとおりである。

(1) まず、非線形方程式系の内容を十分に検討し、仮想平衡水面の位置による煩雑な場合分け(図2)を回避し得る条件を明示して、この方程式系を取扱いやすい形に変形する(2・1節)。

(2) 無次元時間、すなわち封水の流出過程によってその測度が変化する時間(現象に沿った時間)を導入することにより、現象の基本的性格を損なうことなく上記の方程式系を線形化する(2・2節)。

(3) 現象に沿った時間上で封水挙動を観測するとき、上述の相互作用が見かけ上消え、線形系として現象を取扱い得ることをシステムブロック図によって示し、系の物理的構造の内容を明確にする(3章)。

(4) さらに、この線形方程式系による計算結果の一例を示し、既報で導出した非線形方程式系による結果と比較して、本報で採用する線形化手法の妥当性を確認する(4・1節)。同時に、この線形化において導入した「現象に沿った時間」の物理的意味を考察する(4・2節)。

記 号

- A : 断面積(図1) cm^2
- g : 重力の加速度 m/s^2
- h : 観測水位(図1の $\widehat{OC}$) cm
- l : 封水長(図1の $\widehat{CD}$) cm
- p : 空気圧 kPa
- R : 速度に比例する流体摩擦抵抗係数 kg/s
- s : 流出に關与する量(図1の $\widehat{BD}$) cm
- t : 時間 s
- x : 封水重心の変位(図1の $\widehat{G_0G}$) cm
- y : 封水流出量 $= l_e - l$ cm
- α : 流出係数 s^{-1}
- θ_e : Crown部の角度(図2の $\angle A'C'B'$)
- λ : 非線形方程式系における抵抗係数
- ρ : 水の密度 kg/m^3

添 字

e : トラップ固有の量

$\sim$: 無次元量

2. 封水振動系の線形化

2・1 封水挙動を支配する非線形方程式系 既報⁽¹⁾において、図1に示す排水トラップ中の封水に管内空気圧変動(図の水平管内に発生する)が印加されたとときの封水挙動を、封水重心の変位 x (水平管側への運動方向を正とする)と封水の流出量 y (断面積 A で除し、長さの次元をもつ)によって記述した。これらの物理量は直接観測できない。そこで、トラップ中心線に沿って測定した右側水面までの長さ $h(=\widehat{OC})$ を観測量として採用した。これを観測水位と呼ぶ。

管内空気圧による封水挙動を支配する方程式系は、 x に関する運動方程式、 y に関する流出方程式および x と y により h を与える出力方程式によって構成される。本方程式系をまとめると以下のとおりである(詳細は既報⁽¹⁾を参照)。

(1) 封水重心の運動方程式:

$$\rho A \frac{d}{dt} \left[l \frac{dx}{dt} \right] + D \left(\frac{dx}{dt}, l \right) + f(x, l) = A p(t)$$

(慣性力) (抵抗) (復元力) (外力)

.....(1)

(2) 流出方程式:

$$\frac{dy}{dt} = \begin{cases} \alpha s(x, l) & s \geq 0 \\ 0 & s < 0 \end{cases} \quad \text{.....(2)}$$

ただし、 $y = l_e - l$ (3)

l_e : トラップ固有の封水長

(固有封水長, 図1の $\widehat{AB}$)

(3) 出力方程式:

$$h = h(x, l) \quad \text{.....(4)}$$

以上のような内容の方程式系において、式(1)の復元力 f 、式(2)の流出に關与する量 s および式(4)の観測水位 h はいずれも x および l の関数であり、それらの具体的な形は、図2に示すように、仮想平衡水面の位置(運動中の封水を仮に止めたときの静止水面の位置)によって三つのケースに分けて与えられた⁽¹⁾。

図1 排水トラップ

図の二点鎖線が各ケースの代表的な仮想平衡水面の位置を表す。

一方, Crown 部での角度 η_e (図2の $\angle A'C'B'$) が小さい形状のトラップ中で, 封水が小振幅の振動をするならば, 上述の仮想平衡水面の位置による場合分けをすることなく, 上記の諸量は次式で近似される。

$$f = 2\rho Agx \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$s = x - y/2 \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$h = h_e - (x + y/2) \quad \dots\dots\dots (7)$$

さらに, 式(1)の抵抗 D については, 封水の速度 dx/dt が小さく, かつ屈曲抵抗を無視できるならば, 速度に比例する流体摩擦抵抗を考慮して次式で近似される。

$$D = R \frac{dx}{dt} \quad \dots\dots\dots (8)$$

ただし, R : 抵抗係数

式(5)~(8)を上記の方程式系に代入し, 以下のような比較的取扱いやすい方程式系が得られる。

(1) 封水重心の運動方程式:

$$\rho A \frac{d}{dt} \left[l \frac{dx}{dt} \right] + R \frac{dx}{dt} + 2\rho Agx = A\hat{p}(t) \quad \dots\dots\dots (9)$$

(2) 流出方程式:

$$\frac{dy}{dt} = \begin{cases} a \left(x - \frac{y}{2} \right) & x \geq \frac{y}{2} \\ 0 & x < (y/2) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (10)$$

(3) 出力方程式:

$$h_e - h = x + y/2 \quad \dots\dots\dots (11)$$

2.2 方程式系の線形化 ここで, 基本無次元量として以下の諸量を定義する。

$$\text{無次元変位: } \hat{x} \equiv 2x/l_e \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\text{無次元流出量: } \hat{y} \equiv y/l_e \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\text{無次元時間: } \hat{t} \equiv \frac{\alpha}{2} \int \frac{l_e}{l(t)} dt \quad \dots\dots\dots (14)$$

以上の無次元量を運動方程式(9)に代入して整理すると次式が得られる。

$$\frac{d^2 \hat{x}}{d\hat{t}^2} + 2\gamma \frac{d\hat{x}}{d\hat{t}} + \omega_n^2 (1 - \hat{y}) \hat{x} = (1 - \hat{y}) \hat{p}(\hat{t}) \quad \dots\dots\dots (15)$$

図2 仮想平衡水面の位置による場合分け

$$\text{ここで, } \hat{p} \equiv \frac{8p}{\rho \alpha^2 l_e^2} \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$\gamma \equiv \frac{R}{\rho A \alpha l_e} \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$\omega_n \equiv \frac{2}{\alpha} \sqrt{\frac{2g}{l_e}} \quad \dots\dots\dots (18)$$

同様に, 上記の無次元量を流出方程式(10)に代入して整理すると次式が得られる。

$$\frac{d\hat{y}}{d\hat{t}} = \begin{cases} (1 - \hat{y})(\hat{x} - \hat{y}) & \hat{x} \geq \hat{y} \\ 0 & \hat{x} < \hat{y} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (19)$$

いま, 外力 $\hat{p}$ が小さく, $\hat{x} \ll 1$, $\hat{y} \ll 1$ であれば, 式(15)および式(19)はそれぞれ次のようになる。

$$\frac{d^2 \hat{x}}{d\hat{t}^2} + 2\gamma \frac{d\hat{x}}{d\hat{t}} + \omega_n^2 \hat{x} = \hat{p}(\hat{t}) \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$\frac{d\hat{y}}{d\hat{t}} = \begin{cases} \hat{x} - \hat{y} & \hat{x} \geq \hat{y} \\ 0 & \hat{x} < \hat{y} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (21)$$

さらに, 無次元観測水位 $\hat{h}$ を次式で定義する。

$$\hat{h} \equiv \frac{2(h_e - h)}{l_e} \quad \dots\dots\dots (22)$$

$\hat{h}$ についても, 式(12)および式(13)を式(11)に代入して, 次式が得られる。

$$\hat{h} = \hat{x} + \hat{y} \quad \dots\dots\dots (23)$$

3. 系の物理的構造

以上の結果から, 入力を外力 $\hat{p}$, 出力を観測水位 $\hat{h}$ とする排水トラップシステムは, 図3に示すブロック図によって表される。

すなわち, 封水重心の変位 $\hat{x}$ は, 外力 $\hat{p}$ を入力とする二次振動系の応答として与えられる〔式(20)〕。そして, 封水重心の変位 $\hat{x}$ と封水流出量 $\hat{y}$ との大小関係によって間欠的な封水の流出過程が生じる。つまり, $\hat{x} \geq \hat{y}$ のとき $\hat{y}$ は増加し, 逆に $\hat{x} < \hat{y}$ のとき $\hat{y}$ は変化しない〔式(21)〕。

ここで, 図3中に破線で囲った部分が, 流出の開始と停止を切換える機構を表す。図3は, 偏差信号 $\hat{z} (= \hat{x} - \hat{y})$ が接点制御部に入り, 制御信号 C によって接

図3 システムブロック図

点 S が切換わることを示している。すなわち、接点 S は、 $\bar{z}$ が負から正に変化した瞬間 0 側から 1 側に切換わり、逆に正から負に変化した瞬間 1 側から 0 側に切換わる。接点 S が 0→1 に変化するときに流出の開始を表し、1→0 に変化するときに流出の停止を表す。接点 S を流れる信号を $\bar{w}$ とすると、このような接点切替機構の特性は次式で与えられる。

$$\bar{w} = \begin{cases} \bar{x} & \bar{z} > 0 \\ \bar{y} & \bar{z} < 0 \end{cases} \quad (24)$$

ただし、 $\bar{z} = \bar{x} - \bar{y}$ であり、 $\bar{z} = 0$ のとき S はその直前の状態 (0 または 1 側) にあるとする。

したがって、流出量 $\bar{y}$ は接点 S を流れる信号 $\bar{w}$ を入力とする一次遅れ要素の応答として次式で与えられることを図示している。

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} + \bar{y} = \bar{w} \quad (25)$$

さらに、図 3 において、系全体の出力 $\bar{h}$ は式 (23) のとおり、 $\bar{x} + \bar{y}$ で与えられることを示している。

結局、管内空気圧変動によって生じる封水挙動を、無次元時間 $\bar{t}$ のスケールで観測するとき、封水重心の運動と流出過程の相互作用が見かけ上消え、各々が線形要素で記述される。

すなわち、外力 $\bar{p}$ を入力とする二次振動系の応答として封水重心の変位 $\bar{x}$ が与えられて、封水流出量 $\bar{y}$ の挙動は、流出・非流出を含め切替機構の出力信号 $\bar{w}$ を入力とする一次遅れ要素の応答として与えられる。そして、間欠的に発生する封水流出過程の開始・停止は系自身が決定し、 $\bar{x}$ と $\bar{y}$ の大小関係によって自動的に切換わる。

以上のように系の内部に、流出・非流出の切替機構が含まれるため、全体として完全な線形系とはならないが、流出時・非流出時それぞれにおいては、各部が線形結合された系で表されるため、線形系として取扱うことができる。

図 4 P 形 3 インチトラップのインパルス応答

4. 結果と考察

4.1 計算結果 以上の結果の妥当性を確認するために、一例として P 形 3 インチトラップ⁽¹⁾のインパルス応答について、2.2 節で導出した線形方程式系を用いて計算した結果を図 4 に示す。

なお、本計算で採用した系のパラメータの具体値は、既報⁽¹⁾のとおり、流出係数 $\alpha = 1.2 \text{ s}^{-1}$ および非線形方程式系の抵抗係数 $\lambda = 0.093$ である。線形方程式系の抵抗係数 R の値は、式 (8) で与えた線形抵抗が、非線形抵抗⁽¹⁾の性質を、問題にしている速度の範囲内で最も適切に代表できるように、最小二乗法を用いて決定された。その値は $R = 0.49 \text{ kg/s}$ である (付録)。

図 4 の横軸は実時間 t を表し、上部の図は空気圧パルスの実測値⁽¹⁾、下部の図の縦軸は観測水位 h を表す。図 4 の実線は線形方程式系による計算結果であり、破線は非線形方程式系⁽¹⁾による計算結果である。

両者を比較すれば、振幅の大きさは等しいが、実線の波形の平均値が 5 mm 程度破線の波形よりも高いため、全体として上にあがって見える。しかしながら、波形の周期はほぼ一致しており、上述の平均値の差も実用上支障のない程度であるため、前述の線形化の手続きは妥当であったといえる。また、図に示した -0.5 kPa 程度の空気圧パルスに対して、この線形方程式系は実用上十分な精度で使用可能である。

なお、この線形方程式系は、式 (14) で定義した無次元時間 $\bar{t}$ のスケールで記述されている。一方、系の入力である空気圧パルス (実測値) は実時間 t で与えられる。そこで、実時間 t を式 (14)、(3) および式 (13) を用いて式 (26) で与える。そして、無次元時間 $\bar{t}$ 上でこれを計算し、実時間 t における空気圧パルスの値をこの線形方程式系に入力して、無次元時間 $\bar{t}$ 上でこれを解く方法を採用した。

$$t = \frac{2}{\alpha} \int (1 - \bar{y}) d\bar{t} \quad (26)$$

4.2 現象に沿った時間 1 章で述べたような非線形性をもつ封水挙動が、無次元時間 $\bar{t}$ 上では簡単な線形現象として表されることを示した。無次元時間 $\bar{t}$ は、式 (14) が示すように、刻々と減少する封水長 l によってその測度に変化する見かけ上の時間であり、いわば「現象に沿った時間」ということができる。

いま、無次元時間 $\bar{t}$ のスケールで実時間 t を観測すれば、実時間 t は式 (26) にしたがって流出量 $\bar{y}$ とともに変化する。ここで、2.2 節で行った線形化の手続きにおいて、 $\bar{y} \ll 1$ として式 (26) 中の $\bar{y}$ を無視すれば、実時間 t は式 (27) で与えることもできるが、このよ

うな線形変換が妥当であるか否かを以下に検討する。

$$t = \frac{2}{\alpha} \bar{t} \quad \dots\dots\dots (27)$$

図5において、図4に実線で示した観測水位 h の波形〔式(26)による計算結果〕を同じく実線で示し、式(27)による計算結果を破線で示す。

式(27)による結果(破線の波形)は、実線の波形を横軸(実時間 t)上で引伸した格好となり、時間の経過とともに位相のずれが増大している。この破線の波形は、図4に破線で示した非線形方程式系による波形に対しても、時間の経過とともに位相のずれが増大する。

式(27)の時間変換は、図3に示した線形系が、実時間上においてもそのままの形で成立するとしたことにはかならず、このような簡単な線形変換を行うと、もはや現象を十分とらえきれないことを示している。したがって、実時間上で与えられる任意波形の空気圧変動に対する封水挙動を線形方程式系によって数値的に解析する場合、4・1節で述べたように式(26)を用いて計算する必要がある〔線形方程式系を式(14)を用いて実時間上の方程式系に変形した後、数値的にこれを解く方法もある〕。

以上のことから、封水流出過程の進行にともなってその測度が変化する時間(現象に沿った時間)のスケールで封水挙動を観測することによってのみ、現象の基本的性格を損なうことなく、線形現象としてこれを取扱い得るといえる。

5. 結 論

排水管内空気圧変動によって生じる排水トラップ中の封水挙動を、現象に沿った時間〔式(14)〕のスケールで観測するとき、以下のような内容を基本とする線形系としてこれをとらえ得る(図3)。

(1) 封水重心の変位 $\bar{x}$ は、外力 $\bar{p}$ を入力とする二次振動系の応答として与えられる〔式(20)〕。

(2) 刻々の封水流出量 $\bar{g}$ の挙動は、流出・非流出の切替機械の出力信号 $\bar{w}$ を入力とする一次遅れ系の応答として与えられる〔式(25)〕。

(3) 流出・非流出の切り換えは系自身が決定し、偏差信号 $\bar{z} (= \bar{x} - \bar{g})$ によって自動的に行われる(図3中に破線で囲った部分)。

(4) 系の出力である観測水位 $\bar{h}$ は、 $\bar{x}$ と $\bar{g}$ の和として与えられる〔式(23)〕。

以上の結果によって、解析的手法すなわち線形応答理論を封水挙動に対して適用することが可能となり、

図5 現象に沿った時間に関する考察

排水トラップ設計に対する基本的指針を検討する基礎ができた。その検討の具体的な手順としては、本報で導出した線形方程式系〔式(20)、(21)および式(23)〕において、典型的な入力波形(例えばインパルス)に対する系の過渡応答を解析した後、トラップの性能に関する考察を行う必要があり、その詳細は続報で述べる。

本研究について、きわめて有益な御示唆を頂いた九州大学生産科学研究所 藤井 哲教授および九州大学工学部 田村英之教授、深田 悟助教授に深く感謝の意を表す。また、本研究は昭和59年度文部省科学研究費によって行われたものであることを付記する。

付録. 抵抗係数 R の算出

既報⁽¹⁾において非線形抵抗 D_N を次式で与えた。

$$D_N = 2\rho A \frac{l}{d} \lambda |v|v \quad \dots\dots\dots (28)$$

ただし、 $v = dx/dt$ 、 d はトラップの口径。本報では、この抵抗を式(8)に示した線形抵抗

$$D = Rv \quad \dots\dots\dots (29)$$

によって近似した。

そこで、近似誤差 $e \equiv D - D_N$ に関して評価関数 J を次式で定義する。

$$J \equiv \int_0^\infty e^2 dt \quad \dots\dots\dots (30)$$

そして、 J を最小化するように係数 R を決定する。したがって、係数 R は次式で与えられる。

$$R = 2\rho A \frac{\lambda}{d} \frac{\int_0^\infty l |v| v^2 dt}{\int_0^\infty v^2 dt} \quad \dots\dots\dots (31)$$

本報では、既報⁽¹⁾の非線形方程式系を数値的に解き、封水長 l および封水速度 v を得た後、上式によって抵抗係数 R の具体値を得た。

文 献

- (1) 澤・森井・松平, 機論, 50-458, B (昭59), 2602.