タービン段落内の二次元圧縮性乱流解析*

鹿野芳雄**, 池川昌弘***

Numerical Analysis of Two-Dimensional Compressible Turbulent Flows
in a Turbine Stage

by Yoshio SHIKANO and Masahiro IKEGAWA

A numerical technique for the analysis of two-dimensional compressible turbulent flows in a turbine stage is presented. A steady interaction between nozzle and bucket flows is assumed. To calculate the flows in arbitrarily shaped geometries, a control volume method combined with a body-fitted curvilinear coordinate system is used to obtain spatially discretized governing equations. For time integration, a damping surface technique is employed to ensure the stability of computation and to reduce computing time. In the present analysis, a two-equation turbulence model is introduced to estimate the turbulence effect. In order to assure the effectiveness of the present method, a computation is carried out for the two-dimensional section in a turbine stage, and the numerical results are compared with the experimental data. It is shown that the present method gives encouraging results for two-dimensional flow prediction in a turbine stage.

Key Words: Numerical Analysis, Compressible Flow, Two-Dimensional Flow, Turbulence, Blade Rows, Turbine Stage

1. 緒 言

タービンの性能向上を図るためには、内部流れを詳細に把握し、それを設計に反映させる必要がある。数値解析は流体機械の内部流れを知るうえで有効な手段であり、これまでも多くの翼間流れ解析プログラムが開発され、タービンの設計あるいは研究開発の際のツールとして活用されてきた。

一方、タービン段落内の流れは、静翼と動翼の翼間距離が比較的短いため、互いの翼間流れが強く干渉する流れとなり、数値解析で段落内部流れを求める場合、予測精度の向上を図るためには、静翼と動翼の翼間流れを同時に計算することが望ましい。このような解析例としては、時間位相遅れの周期境界を導入し、非定常干渉流れとして計算する Erdos ら⁽¹⁾の二次元非粘性流れ解析、および Arts⁽²⁾や田沼ら⁽³⁾のように、静翼と動翼の翼間解析領域の間で一種の平均化操作を導入し、定常干渉流れとして扱う三次元非粘性流れ解析

などが報告されている。しかし、これまでの報告例では、いずれも非粘性流れを扱っており、乱流が段落内部流れに及ぼす影響を予測することは困難である。

本論文では、タービン段落内の静翼と動翼の翼間流れを、定常干渉流れとして同時に計算する二次元圧縮性乱流解析手法を提案する。解析手法としては、非定常解の漸近解を定常解とするタイムマーチング法を採用している。空間の離散化には、先に著者らが提案した任意流路形状に適用可能な body-fit 形曲線座標系を導入したコントロールボリューム法⁽⁴⁾⁽⁵⁾を用い、時間積分法には、単段階で安定に時間ステップを進めることのできる damping surface technique⁽⁵⁾⁽⁶⁾を採用して、計算時間の短縮を図っている。乱流モデルとしては、比較的普遍性が高く、はく離流れにも適用可能な 2 方程式モデル⁽⁷⁾を採用した。

2. 主 な 記 号

本論文で使用した主な記号は次のとおりである。ただし、静翼翼間の流れでは静止座標系での値を、動翼翼間の流れでは相対座標系での値を意味する。

c_p, c_v : 定圧比熱, 定積比熱

E : 全エネルギー $= c_v T + (u^2 + v^2)/2$

p : 静圧

* 昭和 60 年 10 月 2 日 第 63 期全国大会講演会において講演、原稿受付 昭和 60 年 3 月 27 日。

** 正員, (株)日立製作所機械研究所 (〒317 日立市幸町 3-1-1)。

*** 正員, (株)日立製作所機械研究所 (〒300 土浦市神立町 502 番地)。

Pr, Pr_t : プラントル数, 乱流プラントル数

q, ϵ : 乱流エネルギー, 乱流散逸率

T : 静温

t : 時間

u, v : x, y 方向の速度成分

V_0 : 動翼移動速度

x, y : 物理空間の直交座標系

κ : 比熱比

ξ, η : 写像空間の座標系

μ, μ_t : 粘性係数, 乱流粘性係数

ρ : 密度

σ, τ : 法線応力, せん断応力

添字

n, b : 静翼, 動翼

3. 支配方程式

図1に示すような静翼と動翼で構成される二次元のタービン段落を考え、座標系を静翼では静止座標系、動翼では y 方向に V_0 で移動する相対座標系に選べば、流れの支配方程式は、次のように表される。

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial y} = \vec{H} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで、式(1)のベクトル $\vec{U}, \vec{F}, \vec{G}, \vec{H}$ は以下に示す式で与えられる。

図1 解析領域と要素分割例

図2 接続境界の説明図

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \\ \rho q \\ \rho \epsilon \end{bmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u u + \sigma_{xx} \\ \rho v u - \tau_{yx} \\ u(\rho E + \sigma_{xx}) - v \tau_{yx} + Q_x \\ \rho q u + A_x \\ \rho \epsilon u + B_x \end{bmatrix}$$

$$\vec{G} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho u v - \tau_{xy} \\ \rho v v + \sigma_{yy} \\ v(\rho E + \sigma_{yy}) - u \tau_{xy} + Q_y \\ \rho q v + A_y \\ \rho \epsilon v + B_y \end{bmatrix}, \quad \vec{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ H_q \\ H_\epsilon \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (2)$$

式(2)の下添字 x, y などは、それぞれ x, y 方向に関することを意味する。ここで、式(2)のベクトル中に含まれる各項は、次式で書き表される。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= p_T - \tau_{xx} \\ \sigma_{yy} &= p_T - \tau_{yy} \\ Q_x &= -k_T \frac{\partial T}{\partial x}, \quad Q_y = -k_T \frac{\partial T}{\partial y} \\ A_x &= -\mu_q \frac{\partial q}{\partial x}, \quad A_y = -\mu_q \frac{\partial q}{\partial y} \\ B_x &= -\mu_\epsilon \frac{\partial \epsilon}{\partial x}, \quad B_y = -\mu_\epsilon \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \\ \tau_{xx} &= \frac{4}{3} \mu_T \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu_T \frac{\partial v}{\partial y} \\ \tau_{yy} &= \frac{4}{3} \mu_T \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu_T \frac{\partial u}{\partial x} \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu_T \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 p_T, μ_T, k_T は乱流の影響を考慮した圧力、粘性係数、熱伝導率、 μ_q, μ_ϵ は乱流エネルギー、乱流散逸率の拡散係数で、次式で求められる。

$$\left. \begin{aligned} p_T &= p + 2\rho q/3, \quad \mu_T = \mu + \mu_t \\ k_T &= c_p(\mu/Pr + \mu_t/Pr_t) \\ \mu_q &= \mu + \lambda_q \mu_t, \quad \mu_\epsilon = \mu + \lambda_\epsilon \mu_t \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

上式の μ_t は、乱流粘性係数で、

$$\mu_t = C_\mu \rho q^2 / \epsilon \quad \dots\dots\dots (5)$$

と表される。次に、式(1)の H_q, H_ϵ などのソース項は、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} H_q &= P_K - \rho \epsilon \\ H_\epsilon &= C_1 \epsilon P_K / q - C_2 \rho \epsilon^2 / q \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 P_K は乱流エネルギーの生成項で、

$$\begin{aligned} P_K &= \frac{\mu_t}{\mu_T} \left\{ \tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{xy} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} \\ &\quad - \frac{2}{3} \rho q \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

と表される。なお、式(4)～(6)に含まれる $\lambda_q, \lambda_e, C_\mu, C_1, C_2$ は、乱流モデル定数で、以下に示すような値⁽⁷⁾を用いている。

$$\lambda_q = 1.0, \lambda_e = 0.77, C_\mu = 0.09$$

$$C_1 = 1.44, C_2 = 1.92$$

以上が本解析に用いた支配方程式であるが、これらのほかに、補足関係式として完全気体の状態方程式、粘性係数の計算に Sutherland の式⁽⁸⁾を用いている。

4. 境界条件

図1に示した解析領域の各境界における境界条件を、次に述べるような方法で設定する。

段落流入境界 C1: ここでは、流体の全圧、全温および流入角が与えられる。その他の未知量である運動エネルギー、乱流エネルギーおよび乱流散逸率に関しては、それらの値が流れ方向に変化しないとして求める。

段落流出境界 C2: 流体の静圧を与える。速度成分、密度、乱流エネルギーおよび乱流散逸率に関しては、それらの値が流れ方向に変化しないとして計算する。

周期境界 C3: 対応する境界は周期性を有するとし、各境界の対応する位置での物理量および物理量の境界法線方向の微分値は等しいとする。

翼面境界 C4: 速度は零、圧力と温度は翼面境界の法線方向に変化しないという条件を与える。また、乱流エネルギーと乱流散逸率の境界条件設定には、壁法則を導入した wall function method⁽⁷⁾を採用した。

接続境界 C5: 段落内部流れを定常流れとして扱うために、静翼流出部の要素と動翼流入部の要素を接続要素として選び、静翼解析領域と動翼解析領域の接続を行う。その手法を図2を用いて説明する。今、静翼流出部と動翼流入部の各要素の物理量を $(\phi_n)_j (j=1 \sim N_n), (\phi_b)_j (j=1 \sim N_b)$ とする。各領域を計算する際の境界条件としては、静翼流出部では流体の静圧を、動翼流入部では流体の全圧、全温および流入角をピッチ方向に一様として与える。静翼流出部の静圧 p_n は、動翼流入部静圧のピッチ方向平均値に等しいとして、

$$p_n = \sum_{j=1}^{N_b} (p_b)_j \cdot \Delta S_j / \sum_{j=1}^{N_b} \Delta S_j \quad \dots\dots\dots (8)$$

と与える。ここで ΔS_j は要素面積を意味する。その他の物理量 $(\phi_n)_j$ は、段落流出境界と同様の方法で計算する。次に、動翼流入部の全圧 p_t 、全温 T_t および流入角 β は、静翼流出部の物理量から次式で求める。

$$\left. \begin{aligned} T_t &= \bar{T}_n + \{ \bar{u}_n^2 + (\bar{v}_n - V_\theta)^2 \} / 2C_p \\ p_t &= \bar{p}_n (T_t / \bar{T}_n)^{(\kappa/\kappa-1)} \\ \beta &= \tan^{-1} \{ (\bar{v}_n - V_\theta) / \bar{u}_n \} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

上式で $\bar{\quad}$ のついた量は、ピッチ方向の平均値である。その他の物理量 $(\phi_b)_j$ は、段落流入境界と同様の方法で求める。また、乱流エネルギーと乱流散逸率については、各接続要素のピッチ方向の平均値を求め、静翼流出部では動翼流入部の平均値を、動翼流入部では静翼流出部の平均値を各々境界条件として設定する。

5. 離散化解析手法

支配方程式の空間離散化はコントロールボリューム法に基づいて行う。今、解析領域内に図3に示すような微小領域 S を考え、式(1)を S に関して積分すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \bar{U} dx dy &= - \int_C (n_x \cdot \bar{F} + n_y \cdot \bar{G}) ds \\ &+ \iint_S \bar{H} dx dy \quad \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

ここで、 n_x, n_y は図3の外向き単位法線ベクトル n の x, y 方向の方向余弦である。式(10)に基づき右辺の離散化を行うが、主流の支配方程式と乱流エネルギー、乱流散逸率の輸送方程式に対する離散化法は、対流項の扱いが異なる。ここで図4に示すような四角形要素を考え、 x 方向の運動量方程式と乱流エネルギーの輸送方程式の離散化の具体例を以下に示す。式(10)の右辺を RHS とすれば、 x 方向の運動量方程式は、

$$\begin{aligned} RHS &= - \sum_{i=1}^4 \{ (n_x \bar{u} + n_y \bar{v}) (\rho \bar{u}) + n_x \bar{\sigma}_{xx} \\ &- n_y \bar{\tau}_{xy} \}_i \cdot \Delta l_i \quad \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

と離散化される。一方、乱流エネルギーの輸送方程式は

図3 微小領域

図4 四角形要素とその記号

$$\begin{aligned}
 RHS = & - \sum_{i=1}^4 (n_x \bar{u} + n_y \bar{v})_i \{(\rho q)_K, (\rho q)_{Ki}\} \cdot \Delta l_i \\
 & - \sum_{i=1}^4 (n_x \bar{A}_x + n_y \bar{A}_y)_i \cdot \Delta l_i + (H_q)_K \cdot \Delta S_K \\
 & \dots\dots\dots (12)
 \end{aligned}$$

と書き表される。ここで、 $\{(\rho q)_K, (\rho q)_{Ki}\}$ は

$$\left. \begin{aligned}
 (n_x \bar{u} + n_y \bar{v})_i \geq 0 \text{ の時:} \\
 \{(\rho q)_K, (\rho q)_{Ki}\} = (\rho q)_K \\
 (n_x \bar{u} + n_y \bar{v})_i < 0 \text{ の時:} \\
 \{(\rho q)_K, (\rho q)_{Ki}\} = (\rho q)_{Ki}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

を意味する。これらの式で添字 i は辺番号、 Δl_i は辺 l_i の長さ、 ΔS_K は要素 K の面積、また、 $\sim$ のついた量は、隣り合う要素との平均値を表す。式(11)では中心差分法に準じた方法で対流項を離散化し、計算の安定化は後述する時間積分法で行うが、式(12)では風上差分法に準じた方法を導入し、計算の安定化を図っている。なお、式(11)、(12)に含まれる各種の微分項は、body-fit 形曲線座標系の写像空間領域で差分法を適用し、次式によって物理空間の微分値を計算する。

$$\begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial\xi/\partial x & \partial\eta/\partial x \\ \partial\xi/\partial y & \partial\eta/\partial y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial/\partial\xi \\ \partial/\partial\eta \end{bmatrix} \dots\dots\dots (14)$$

次に時間積分法について述べる。主流の支配方程式は、damping surface technique を適用して時間積分を行い、計算の安定化を図る。その方法を図4を用いて説明する。今、要素 K の未知量を Φ_K とし、時間ステップ数を m 、時間刻み幅を δt とすれば、時間積分は周りの要素 Φ_{Ki} を用いて次式で表される。

$$\Phi_K^{m+1} = \frac{\delta t}{\Delta S_K} (RHS) + \frac{\sum_{i=1}^4 \Phi_{Ki}^m}{4} - D_K \dots\dots\dots (15)$$

ここで、 RHS は式(10)の右辺の値である。 D_K は時間ステップ J 回ごと ($J=20\sim30$) に新たに計算される値で、

$$D_K = \alpha \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^4 \Phi_{Ki}^m - 4\Phi_K^m}{4} \right) \dots\dots\dots (16)$$

と与えられる。上式の α は、人工粘性の導入割合を決める値で、通常 $0.95\sim1.0$ の値を用いる。

一方、乱流エネルギーと乱流散逸率の輸送方程式の時間積分は、特に計算の安定化は行わず、前進差分法に準じた手法で次式により計算する。

表 1 計算の主要諸元

Reynolds Number	: $(1.3 \times 10^6)_n, (3.6 \times 10^5)_b$
Pitch Ratio (P_n/P_b)	: 2.05
Bucket Speed (V_a)	: 137 m/s
Stage Pressure Ratio	: 0.713
α (Eq. (16))	: 0.99
Number of Elements	: $(60 \times 30)_n, (55 \times 22)_b$

$$\Phi_K^{m+1} = \Phi_K^m + \delta t \cdot (RHS) / \Delta S_K \dots\dots\dots (17)$$

6. 計算例とその検討

計算対象としたタービン段落は、図1に示した静翼と動翼で構成されており、その主要諸元を表1に示す。なお、以下に示す図では、見やすくするために、動翼を拡大表示する。

図5は計算で得られた速度の等速度線図である。この等速度線図に示されているように、静翼、動翼の翼面近傍の速度は粘性の影響を受けて減速され、特に負圧面近傍で大きく減速されている。また、翼後縁からは後流(wake)が発生し、下流に流れていく様子も計算されている。このような流動の状況は、非粘性流れの解析からは得ることができず、粘性流れ解析の特徴といえる。本解析で得られた静翼の後流速度分布を、計算に用いたタービン段落の実験値⁹⁾と比較して図6に示す。縦軸の速度は、実験、計算の各ピッチ方向最大値(実験は後流域を除く平均値)で無次元化している。横軸は、1ピッチを意味する。図6には、また、静翼のピッチ方向要素分割数を20と粗くした時の結果も示されている。計算で得られた後流は、実験値と比べると、後流幅がやや広く、後流深さも多少深い形状を示しているが、後流域の速度こう配はほぼ一致しており、定性的には実験値に近い解が得られている。一

図 5 翼間流れの等速度線図

図 6 静翼の後流速度分布

表 2 静翼・動翼流出部での実験値との比較

	Inviscid Flow	Turbulent Flow
$(V/V_{exp})_n$	1.137	1.056
$(M/M_{exp})_n$	1.140	1.055
$(T/T_{exp})_n$	0.993	1.002
$(p/p_{exp})_n$	0.950	0.961
$(\beta/\beta_{exp})_n$	1.151	1.000
$(V/V_{exp})_b$	1.183	1.095
$(M/M_{exp})_b$	1.185	1.094
$(T/T_{exp})_b$	0.997	1.008

方, 粗い要素分割の解は, 後流深さは浅くなり実験値に近づくが, 後流幅は広がり, 後流域の速度こう配も緩やかになって, 後流がほかされる傾向にある。このことから, 後流のような急激な速度こう配のある流れを計算する場合は, 要素分割をある程度密にする必要があると考えられる。最後に, 静翼と動翼の流出部における乱流解の各種のピッチ方向平均値を実験の平均値で無次元化し, 非粘性流解の平均値と比較して表 2 に示す。表 2 で V, M , および β は, 速度, マッハ数, 動翼への相対流入角である。非粘性流解と乱流解の各値を比較すると, 乱流解の実験値に対する各誤差は, 非粘性流解のそれらに比べて小さく, 速度の誤差も半減している。また, 段落内の流れで重要なパラメータの一つである動翼への流入角も, 実験値とよい一致を示しており, 本解析手法の有効性が確認できた。

7. 結 言

タービン段落内の静翼と動翼の翼間流れを, 定常干渉流れとして同時に計算する二次元圧縮性乱流解析手法を開発し, その解析手法と計算例について述べてきたが, これらを要約すると次のようになる。

(1) 静翼翼間解析領域と動翼翼間解析領域を接続境界を用いて接続することで, 静翼と動翼の翼間流れを同時に計算することが可能となった。

(2) 計算結果の妥当性を確認するために, 同じ解法で計算された非粘性流解や実験値との比較検討を行った。その結果, 乱流の影響を考慮することで, 非粘性流解に比べて実験値に近い解を得ることができた。

文 献

- (1) Erdos, J. I., Alzner, E. and McNally, W., *AIAA J.* 15-11 (1977), 1559-1568.
- (2) Arts, T., *ASME Paper*, No. 84-GT-76 (1984).
- (3) 田沼・小林, 第 10 回ガスタービン定期講演会講演論文集, (昭 57-6), 139-144.
- (4) 中野・池川・鹿野・中沢, 機論, 50-457, B (昭 59), 2032-2040.
- (5) 鹿野・池川・中野, 機論, 51-462, B (昭 60), 461-469.
- (6) Couston, M., McDonald, P. W. and Smolderen, J. J., *VKI TN*, 109 (1975).
- (7) Launder, B. E. and Spalding, D. B., *Computer Method in Appl. Mech. and Eng.*, 3 (1974), 269-289.
- (8) 例えば, 生井・井上, 粘性流体の力学, (昭 53), 5, 理工学社.
- (9) 佐藤・安ヶ平・長谷川・植西, ターボ機械, 11-3 (昭 58), 130-139.