内部回転を考慮した導電性磁性流体の基礎方程式*
(熱力学的手法による誘導)

志 澤 一 之**, 棚 橋 隆 彦***

A New Complete Set of Basic Equations for Conducting
Magnetic Fluids with Internal Rotation
(Thermodynamical Discussions)

by Kazuyuki SHIZAWA and Takahiko TANAHASHI

A new complete set of basic equations for magnetic fluids having good conductivity of heat and electricity with internal rotation has not been derived before. In this paper, governing equations for such conducting magnetic fluids are formulated by the thermodynamical method, in which free energy and the dissipation function are used on the basis of kinematical balance equations in the polar theory. A simple method for determining a constitutive equation of magnetization is proposed, so that the relaxation equation of magnetization becomes unnecessary. It is shown that the equations obtained in this paper involve almost all equations concerned with magnetic fluids. The new system of equations for nonconducting magnetic fluids derived here is more general and strict in comparison with those previously presented. Hence, it will be possible to treat rapid changes of magnetic fields by the present theory.

Key Words: Fluid Mechanics, Conducting Magnetic Fluid, Polar Theory, Internal Rotation, Constitutive Equation, Thermodynamical Method

1. 結 言

導電性磁性流体とは、電気伝導性や熱伝導性の高い液体金属に飽和磁化の大きい金属微粒子を安定にけん濁したような流体をいう。その母液として、強磁性微粒子のキュリー点以上の高温下においても十分安定であるような液体金属(ナトリウム-カリウムなどの金属混合体)の使用が検討され、現在イギリスのノースウェルズ大学などで導電性磁性流体の試作品が製造されている⁽⁴⁾。このように導電性磁性流体を用いた工業用の大規模なエネルギー変換システムが現実には始動するのも近い将来のこととなった。こうして導電性磁性流体の挙動を支配するより厳密な基礎方程式の定式化が必要となってきた。

従来、導電性磁性流体の支配方程式系を非極性理論の範囲で扱ったものには、Tarapovの理論⁽¹⁾や電磁流体力学(MHD)関係の種々の文献⁽²⁾⁽¹⁰⁾がある。これらにおける不備な点⁽¹²⁾を改良すべく著者らは導電性磁性流体の基礎方程式に対して前報⁽¹²⁾で熱力学的考

察を加えた。しかし、そうして得られた方程式系は、あくまでも磁性流体が巨視的にNewton流体とみなせるものと仮定した場合のものである。ところが実際の導電性磁性流体は前述のように極性流体であるから、その内部回転を考慮しなければならない。したがって前報で提示した方程式系では磁性流体の正確な挙動を十分に表現しているとは言えない。

そこで、この論文では著者らが提出した二つの理論、すなわち内部回転を考慮した非導電性磁性流体の基礎方程式に対する理論⁽¹¹⁾と非極性理論の範囲で扱った導電性磁性流体の基礎方程式に対する理論⁽¹²⁾とを融合し、両者において用いた熱力学的手法によって、極性理論の範囲に拡張された導電性磁性流体の支配方程式系の定式化を試みる。その手法とは、自由エネルギーを用いた熱力学的議論を展開し、力学的つり合い方程式を基礎として散逸関数から熱力学の第2法則を満足するように応力テンソルや偶応力テンソルなどの構成方程式を決定するというものである。

ところで内部回転を考慮する場合、磁化は単に熱力学的状態量のみで決定することはできず、流れの状態にも依存するようになる。したがって磁化ベクトルと磁場ベクトルの平行性を仮定することはできない。そこで磁化の運動を支配する方程式として、Shliomis⁽¹³⁾

* 昭和60年10月2日 第63期全国大会講演会において講演、原稿受付 昭和60年2月28日。

** 正員、慶應義塾大学大学院(〒223 横浜市港北区日吉3-14-1)。

*** 正員、慶應義塾大学理工学部。

が現象論的に得た磁化の緩和方程式が必要とされてきた。しかし流体が導電性、分極性および磁化性をもつ場合、電磁場を支配する方程式として Maxwell の 4 個の方程式全部が必要となる。すると、これらの方程式と磁化の緩和方程式との間には矛盾が生じる。また散逸関数の一部に Clausius-Duhem の不等式を常に満足することが証明できないような部分が現れる。これらの障害を克服するために、ここでは磁化の緩和方程式を完全に排除し、その代わりに磁化の構成方程式を散逸関数から決定する方法を提案する。このとき磁化の構成方程式は磁化率テンソルを用いて表現される。

こうして得られた導電性磁性流体の基礎方程式系に非導電性の仮定を設ければ、前々報⁽¹⁾で提出した方程式系に比較して、より一般的で厳密な非導電性磁性流体の基礎方程式系が得られる。前々報の理論においては時間的に速やかに変動する磁場を扱うことができなかったのに対し、本報の理論ではそのような制約はいっさい受けない。また質量、運動量、角運動量およびエネルギーに対する方程式は全てそれぞれのつり合い方程式を満足し、保存形表示が可能となる。さらに磁化の緩和方程式を導入する必要がないため、緩和方程式に起因するところの従来のような、解析上の障害も解消されることが考えられる。

主 な 記 号

a : けん濁粒子の半径
 B : 磁束密度ベクトル
 b : 単位質量あたりの体積力
 c : 光速
 D : 電束密度ベクトル
 $D^{(v)}$: 変形速度テンソル
 E : 電場ベクトル
 E : 電場の大きさ $=|E|$
 g : 電磁運動量ベクトル $=D \times B$
 H : 磁場ベクトル
 H : 磁場の大きさ $=|H|$
 I : 恒等テンソル
 I : 単位体積あたりの粒子の慣性モーメントの合計 $=\rho i^2$
 i : 体積平均慣性半径
 j : 電流密度ベクトル
 k : Boltzmann 定数 $=1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$
 $L(\xi)$: Langevin 関数 $=\coth \xi - \xi^{-1}$
 l : 単位質量あたりの体積偶力
 M : 磁化ベクトル

M : 磁化の強さ $=|M|$
 M_0 : 平衡磁化の強さ
 M_s : 飽和磁化の強さ
 m : 粒子の磁気モーメント
 N : 単位体積あたりの粒子数
 n : 検査面の外向き単位法線ベクトル
 P : 分極ベクトル
 P : 分極の大きさ $=|P|$
 p : 圧力
 q : 熱流束密度ベクトル
 r : 流体粒子の位置ベクトル
 r : 単位質量あたりの熱源の強さ
 S : エントロピ
 $S^{(r)}$: 供給エントロピ
 S_m : 実質検査面
 s : 単位質量あたりのエントロピ
 $s^{(i)}$: 単位質量あたりの内部エントロピの生成
 s : 単位質量あたりの内部角運動量ベクトル (スピン角運動量ベクトル) $=i^2 \Omega$
 T : 応力テンソル
 $\bar{T}$: 電磁運動量流束を含む応力テンソル
 $T^{(M)}$: Maxwell の応力テンソル
 $T^{(v)}$: 応力テンソルの粘性部分
 T : 絶対温度
 $t^{(n)}$: 検査面に働く応力ベクトル
 t : 時間座標
 u : 単位質量あたりの内部エネルギー
 V_m : 実質体積
 v : 流速ベクトル
 v : 比体積 $=1/\rho$
 α, β, γ : スピン粘性係数 $\gamma=i^2 \eta$
 δ_{ij} : Kronecker のデルタ
 ϵ : 3 階の交代テンソル (Levi-Civita の記号)
 ϵ_0 : 真空の誘電率
 η : セン断粘性係数
 η_0 : 母液のセン断粘性係数
 η_1 : うず粘性係数 $=1/4\tau_s$
 η_2 : 第二粘性係数
 κ : 熱伝導率
 Λ : 偶応力テンソル
 $\lambda^{(n)}$: 検査面に働く偶応力ベクトル
 μ_0 : 真空の透磁率 $=4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$
 $\xi = mH/kT$
 ρ : 流体の密度
 ρ_a : けん濁粒子の密度
 ρ_e : 電荷密度

σ : 電気伝導率
 ϕ : 単位体積あたりの散逸関数
 χ_e : 電気感受率
 χ_m : 磁化率
 χ_m : 磁化率テンソル
 ψ : 単位質量あたりの自由エネルギー $= u - Ts$
 $\tilde{\psi}$: 単位質量あたりの熱力学的ポテンシャル
 $= \psi^{(e)} - (D \cdot E + B \cdot H)/\rho$
 Ω : 粒子の平均回転角速度ベクトル
 ω : 流体の回転角速度ベクトル $\equiv (\nabla \times \mathbf{v})/2$
 添字
 e : 電磁場が存在する場合の熱力学的量
 0 : 電磁場が存在しない場合の熱力学的量

2. 熱力学的関係式

Tarapov によると圧縮性のある分極性・磁化性媒質に対する熱力学の第1法則の式は、印加された電磁場のもとで、

$$du^{(e)} = Tds^{(e)} + p^{(e)}d\rho/\rho^2 + E \cdot d(D/\rho) + H \cdot d(B/\rho) \quad (1)$$

と書ける⁽¹⁹⁾。このとき、前報⁽¹²⁾で述べたように熱力学的ポテンシャル $\tilde{\psi}$ の全微分は

$$d\tilde{\psi} = -s^{(e)}dT + p^{(e)}d\rho/\rho^2 - D \cdot dE/\rho - B \cdot dH/\rho \quad (2)$$

となる。よって $p^{(e)}$, $s^{(e)}$, D および B は $\tilde{\psi}$ の偏微分により次のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} p^{(e)} &= \rho^2 (\partial \tilde{\psi} / \partial \rho)_{T, E, H} \\ s^{(e)} &= -(\partial \tilde{\psi} / \partial T)_{\rho, E, H} \\ D &= -\rho (\partial \tilde{\psi} / \partial E)_{\rho, T, H} \\ B &= -\rho (\partial \tilde{\psi} / \partial H)_{\rho, T, E} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

母液を構成する液体金属は Newton 流体とみなせるから、前々報で述べたような極性効果による異方性はないと考えられる。したがって母液に依存する分極 P は E と平行であると仮定できる。すなわち、

$$P = \chi_e E \quad (4)$$

と書ける。ただし χ_e は場所の関数である。よって分極の大きさは次のような状態方程式によって与えられる。

$$P = P(\rho, T, E) \quad (5)$$

これに対して強磁性微粒子の存在に起因する磁化は、式(5)のような状態方程式によってのみ決定することはできず流れの状態、特に粒子の回転の状態にも依存する。したがって式(4)のような関係は磁化と磁場の間には成立しない。よって式(2)の積分によって $\tilde{\psi}$ を完全に具体化することはできない。そこで、その具体化できない磁化の部分を前々報と同様に $\psi_{(M)}^*$ と表せ

ばその他の部分は積分によって具体化できるから、式(3)~(5)を考慮して $\tilde{\psi}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} &= \psi_0(\rho, T) - \left(\epsilon_0 E^2 / 2 + \int_0^E P dE \right) / \rho \\ &\quad - \mu_0 H^2 / 2\rho - \psi_{(M)}^* \\ &\equiv \psi - (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) / 2\rho \quad (6) \end{aligned}$$

ただし電束密度および磁束密度の構成方程式は、

$$D = \epsilon_0 E + P, \quad B = \mu_0 H + M \quad (7)$$

である。また(6)の ψ_0 は電磁場が存在しない場合の自由エネルギーである。今後、下添字 0 付きの熱力学的諸量は同様のことを意味する。

つぎに $p^{(e)}$, $s^{(e)}$ は式(3)と式(6)より得られるが、 $\psi_{(M)}^*$ が存在するために具体化できない部分を $p_{(M)}^*$, $s_{(M)}^*$ と表せば次のようになる。

$$\begin{aligned} p^{(e)} &= p_0 + (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) / 2 \\ &\quad + \int_0^E (\partial v P / \partial v)_{T, E, H} dE + p_{(M)}^* \\ &\equiv p + (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) / 2 \quad (8) \\ s^{(e)} &= s_0 + (1/\rho) \int_0^E (\partial P / \partial T)_{\rho, E, H} dE + s_{(M)}^* \equiv s \quad (9) \end{aligned}$$

ここで ϕ , p および s は、それぞれ式(6), (8), (9)における添字 0 付きの項と積分で表示された項および磁化の存在によって具体化できなかった項をまとめたものである。式(8), (9)を式(1)に代入して、熱力学的関係式を p , s で表せば次式を得る。

$$\begin{aligned} \rho du^{(e)} &= \rho T ds + (p - \epsilon_0 E^2 / 2 \\ &\quad - \mu_0 H^2 / 2 - P \cdot E - M \cdot H)(d\rho/\rho) \\ &\quad + E \cdot dD + H \cdot dB \quad (10) \end{aligned}$$

3. 電磁場の方程式

電磁場を支配する方程式系は、よく知られているように次のような四つの Maxwell の方程式である。

$$\partial B / \partial t = -\nabla \times E \quad (11)$$

$$\partial D / \partial t + j = \nabla \times H \quad (12)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (13)$$

$$\nabla \cdot D = \rho_e \quad (14)$$

つぎに2章で得た熱力学的関係式(10)を後で変形する際、便利のように式(11), (12)の左辺を実質時間微分形式になおすと、

$$\begin{aligned} dB/dt &= -\nabla \times E + (B \cdot \nabla)v - B(\nabla \cdot v) \\ &\quad - \nabla \times (v \times B) \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dD/dt &= -j + \nabla \times H + \rho_e v + (D \cdot \nabla)v \\ &\quad - D(\nabla \cdot v) - \nabla \times (v \times D) \quad (16) \end{aligned}$$

となる⁽¹²⁾。これらの方程式は後の変形において重要な役割をなす。

4. つり合い方程式

4.1 質量保存則 変形する連続体の中に実質検査面を考えると、この検査面内において質量保存則が成立する。これより、よく知られた連続の方程式：

$$\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (17)$$

が得られる。

4.2 運動量のつり合い方程式 系の運動量の時間的変化が面積力と体積力の総和に等しいという Newton の力学の基本法則に従って、運動量のつり合い方程式を書き、Cauchy の基本定理： $\mathbf{t}^{(n)} = \mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{T}}$ を考慮することにより、つぎのような運動方程式を得る⁽¹²⁾。

$$\rho d\mathbf{v}/dt + \partial \mathbf{g}/\partial t = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} \quad (18)$$

ただし

$$\mathbf{T} \equiv \tilde{\mathbf{T}} - \rho \mathbf{g} \quad (19)$$

$$\mathbf{g} \equiv \mathbf{D} \times \mathbf{B} \quad (20)$$

式(18)は Cauchy の運動方程式に相当するものである。

4.3 角運動量のつり合い方程式 角運動量に対する力学の基本法則は、系の角運動量の時間的変化が、面積力のモーメントと体積力のモーメントの総和に等しいと述べられる。したがって、内部回転を考慮した場合の角運動量のつり合い方程式は次のように表現できる。

$$\begin{aligned} (d/dt) \int_{V_m} \{ \mathbf{r} \times (\rho \mathbf{v} + \mathbf{g}) + \rho \mathbf{s} \} dV \\ = \int_{S_m} (\mathbf{r} \times \mathbf{t}^{(n)} + \lambda^{(n)}) dS \\ + \int_{V_m} (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{b} + \rho \mathbf{l}) dV \quad (21) \end{aligned}$$

そこで式(21)の左辺に Reynolds の輸送定理を適用し、式(17)と $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$ および

$$\nabla \cdot \{ \mathbf{v} (\mathbf{r} \times \mathbf{g}) \} = \varepsilon : (\mathbf{v} \mathbf{g}) + \mathbf{r} \times \{ \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{g}) \}$$

を考慮する。一方、式(21)右辺第1項を Cauchy の基本定理と偶応力ベクトルの定義式： $\lambda^{(n)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{\Lambda}$ で書き改め、Gauss の定理を用いて体積分に変換し、

$$-\nabla \cdot (\tilde{\mathbf{T}} \times \mathbf{r}) = \mathbf{r} \times (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{T}}) + \varepsilon : \tilde{\mathbf{T}}$$

を考慮して⁽¹⁸⁾両辺を整理すれば次式を得る。

$$\begin{aligned} \rho d\mathbf{s}/dt + \mathbf{r} \times \{ \rho d\mathbf{v}/dt + \partial \mathbf{g}/\partial t \\ + \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{g} - \tilde{\mathbf{T}}) - \rho \mathbf{b} \} \\ = \varepsilon : (\tilde{\mathbf{T}} - \mathbf{v} \mathbf{g}) + \nabla \cdot \mathbf{\Lambda} + \rho \mathbf{l} \end{aligned}$$

上式に式(19)を適用して式(18)を考慮すれば左辺第2項は0となる。さらにスピン角運動量 $\mathbf{s}$ を粒子の平均回転角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ で $\mathbf{s} = i^2 \boldsymbol{\Omega}$ と表示すれば⁽⁵⁾⁽⁶⁾、微粒子は剛体回転していると仮定できるから、体積平均慣性半径 i は定数とみなされ微分の外に出せる。こうして次

のような内部角運動量方程式が得られる。

$$Id\boldsymbol{\Omega}/dt = \nabla \cdot \mathbf{\Lambda} + \varepsilon : \mathbf{T} + \rho \mathbf{l} \quad (22)$$

4.4 エネルギーのつり合い方程式 エネルギーのつり合い方程式は次の基本法則より導かれる。すなわち、系の全エネルギーの時間的変化は、力のなした仕事と系に供給されるエネルギーの総和に等しい。内部回転を考慮するとき、このことは、次式にて表現できる。

$$\begin{aligned} (d/dt) \int_{V_m} \rho (u^{(e)} + v^2/2 + i^2 \Omega^2/2) dV \\ = \int_{S_m} \mathbf{t}^{(n)} \cdot \mathbf{v} dS + \int_{V_m} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV \\ + \int_{S_m} \lambda^{(n)} \cdot \boldsymbol{\Omega} dS + \int_{V_m} \rho \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\Omega} dV - \int_{S_m} \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} dS \\ - \int_{S_m} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}^*) dS + \int_{V_m} \rho r dV \quad (23) \end{aligned}$$

ここで右辺第6項の被積分関数は閉曲面を通して系内に流れ込むポインティングベクトルすなわち電磁エネルギー流束である。いま閉曲面は実質検査面であるから、この検査面内の電場および磁場は、静止座標系に対して速度 $\mathbf{v}$ で並進運動する系内におけるものでなければならない。このような電場 $\mathbf{E}^*$ および磁場 $\mathbf{H}^*$ は静止座標系における電場 $\mathbf{E}$ および磁場 $\mathbf{H}$ と次のような関係にある⁽³⁾。

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \mathbf{H}^* = \mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{D} \quad (24)$$

式(24)における $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ および $\mathbf{v} \times \mathbf{D}$ はそれぞれ導体が磁束密度 $\mathbf{B}$ や電束密度 $\mathbf{D}$ の中を速度 $\mathbf{v}$ で横ぎる時に生じる見かけの電場および磁場である。いま流体の速度 $\mathbf{v}$ は光速 c に比べて十分小さいと仮定できるから式(24)における Lorentz 変換の係数は1としてある。すなわち、ここでは非相対性理論の範囲で議論を行う。そこで式(23)の左辺に Reynolds の輸送定理を適用し、また右辺第1項を Cauchy の基本定理で、また右辺第3項を偶応力ベクトルの定義式で書き改め、その他の面積分の項とともに体積分に変換すれば積分記号をとり除くことができる。すなわち

$$\begin{aligned} \rho d u^{(e)} / dt + \{ \rho d \mathbf{v} / dt - \nabla \cdot \tilde{\mathbf{T}} - \rho \mathbf{b} \} \cdot \mathbf{v} \\ + \{ I d \boldsymbol{\Omega} / dt - \nabla \cdot \mathbf{\Lambda} - \rho \mathbf{l} \} \cdot \boldsymbol{\Omega} \\ = \tilde{\mathbf{T}} : \nabla \mathbf{v} + \mathbf{\Lambda} : \nabla \boldsymbol{\Omega} - \nabla \cdot (\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}^*) \\ - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r \quad (25) \end{aligned}$$

を得る。上式の右辺第3項を静止座標系の量へ変換するとつぎのようになる⁽¹²⁾。

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}^*) &= -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \\ &- [\mathbf{E} \cdot \{ \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{D}) \} + \mathbf{H} \cdot \{ \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \}] \\ &- (\partial \mathbf{g} / \partial t) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{j}^* \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ &- \{ \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{g}) \} \cdot \mathbf{v} - (\mathbf{v} \mathbf{g}) : \nabla \mathbf{v} \quad (26) \end{aligned}$$

ここで $\mathbf{j}^* = \mathbf{j} - \rho_e \mathbf{v}$ である。式(26)を得る過程において式(11)、(12)および式(20)が用いられている。式

(26)を式(25)に代入し、式(18), (19)と式(22)を考慮すれば、内部エネルギー $u^{(e)}$ で表されたエネルギー方程式が次式のように得られる。

$$\begin{aligned} \rho du^{(e)}/dt = & T : \nabla v + A : \nabla \Omega - T : \varepsilon \cdot \Omega \\ & - \nabla \cdot (E \times H) - [E \cdot \{\nabla \times (v \times D)\}] \\ & + H \cdot \{\nabla \times (v \times B)\} \\ & + j^* \cdot (v \times B) - \nabla \cdot q + \rho r \end{aligned} \quad (27)$$

以上式(18), (22)および式(27)における未知項は、応力テンソル T , 偶応力テンソル A , 磁化ベクトル M , 電流密度ベクトル j^* および熱流束密度ベクトル q である。

5. 未知項の決定

5.1 散逸関数の決定 エネルギー方程式(27)をエントロピーで書き改めるために熱力学的関係式(10)の両辺を dt で割ると、

$$\begin{aligned} \rho du^{(e)}/dt = & \rho T ds/dt + (p - \varepsilon_0 E^2/2 \\ & - \mu_0 H^2/2 - P \cdot E - M \cdot H)(d\rho/\rho dt) \\ & + E \cdot dD/dt + H \cdot dB/dt \end{aligned} \quad (28)$$

となる。上式右辺第2項の ρ に関する時間微分は連続の方程式(17)を用いて空間微分になおせる。さらに式(15), (16)の両辺にそれぞれ H および E を内積して右辺最後の二つの項を空間微分になおせば次式を得る⁽¹²⁾。

$$\begin{aligned} \rho du^{(e)}/dt = & \rho T ds/dt - j^* \cdot E \\ & + (-pI + T^{(M)}) : \nabla v - \nabla \cdot (E \times H) \\ & - [E \cdot \{\nabla \times (v \times D)\}] + H \cdot \{\nabla \times (v \times B)\} \end{aligned} \quad (29)$$

ただし

$$T^{(M)} \equiv DE + BH - (\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2)I/2 \quad (30)$$

式(29)を式(27)に代入してエネルギー方程式をエントロピーで書き表せば次式のようになる。

$$\begin{aligned} \rho T ds/dt = & (T + pI - T^{(M)}) : \nabla v \\ & + A : \nabla \Omega - T : \varepsilon \cdot \Omega + j^* \cdot E^* - \nabla \cdot q + \rho r \end{aligned} \quad (31)$$

ここで ∇v の係数をまとめて $T^{(v)}$ とおき、 P と E が平行であることを考慮すれば、

$$\begin{aligned} \rho T ds/dt = & T^{(v)} : \{D^{(v)} + \varepsilon \cdot (\omega - \Omega)\} + A : \nabla \Omega \\ & + HM : \varepsilon \cdot \Omega + j^* \cdot E^* - \nabla \cdot q + \rho r \end{aligned} \quad (32)$$

ただし

$$T^{(v)} \equiv T + pI - T^{(M)} \quad (33)$$

となる。ここで $\nabla v \equiv D^{(v)} + \varepsilon \cdot \omega$ を用いた。したがって、単位体積あたりの散逸関数 Φ は式(32)より

$$\begin{aligned} \Phi = & T^{(v)} : \{D^{(v)} + \varepsilon \cdot (\omega - \Omega)\} + A : \nabla \Omega \\ & + HM : \varepsilon \cdot \Omega + j^* \cdot E^* \end{aligned} \quad (34)$$

であることがわかる。

5.2 Clausius-Duhem の不等式 熱力学の第2法則は、系内のエントロピー増加 dS が系への供給エントロピー $dS^{(r)}$ よりも大きく、その差は内部エントロピーの生成 $dS^{(i)}$ によって補われると述べられる。このことは、 $dS^{(i)} = dS - dS^{(r)} \geq 0$ と書かれる。これを連続体の場に適用すれば、 q/T を局所的なエントロピー流束として

$$\begin{aligned} (d/dt) \int_{V_m} \rho s^{(i)} dV = & (d/dt) \int_{V_m} \rho s dV \\ & - \left(- \int_{S_m} n \cdot q/T dS + \int_{V_m} \rho r/T dV \right) \geq 0 \end{aligned}$$

のように記述できる。上式において時間微分の項に Reynolds の輸送定理、面積分の項に Gauss の定理を適用すれば両辺の積分記号をはずすことができる。さらにそれをエネルギー方程式(32)を用いて書き改めればつぎのようになる⁽¹²⁾。

$$\rho T ds^{(i)}/dt = q \cdot \nabla (\ln T^{-1}) + \Phi \geq 0 \quad (35)$$

これは Clausius-Duhem の不等式と呼ばれる。任意の現象に対して熱力学的な項とその他の項に分解できることが知られている⁽¹⁷⁾から、式(35)は、

$$q \cdot \nabla (\ln T^{-1}) \geq 0 \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \Phi = & T^{(v)} : \{D^{(v)} + \varepsilon \cdot (\omega - \Omega)\} + A : \nabla \Omega \\ & + HM : \varepsilon \cdot \Omega + j^* \cdot E^* \geq 0 \end{aligned} \quad (37)$$

と書き改められる。

5.3 構成方程式の決定 $q, j, T^{(v)}, A$ および M の構成方程式は条件式(36), (37)を満足するように決定されねばならない。

5.3.1 q と j の構成方程式 q と j の構成方程式は、線形理論の範囲で、最も一般的な2階の等方テンソル κI および σI にそれぞれ $-\nabla T$ および E^* を作用させることにより、

$$q = -\kappa \nabla T \quad (38)$$

$$j^* = \sigma E^* \quad (39)$$

と決定される。ここで式(38)は Fourier の第1法則、式(39)は Ohm の法則としてよく知られている関係式である。したがって、係数 κ および σ はそれぞれ熱伝導率および電気伝導率であることがわかる。そこで式(39)に $j^* = j - \rho_e v$ と式(24)を代入し静止座標系における量で表示すると、

$$j = \sigma(E + v \times B) + \rho_e v \quad (40)$$

となる。これは磁束密度 B の中を速度 v で並進運動する導体中の電流密度と電場の関係式である⁽⁷⁾。

5.3.2 T と A の構成方程式 $T^{(v)}$ と A の構成方程式は、その線形部分のみを取り出すならば、それぞれ $\{D^{(v)} + \varepsilon \cdot (\omega - \Omega)\}$ と $\nabla \Omega$ を次のような最も一

般的な4階の等方テンソル:

$$C_{ijkl} = a\delta_{ij}\delta_{kl} + b(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \\ + c(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk})$$

あるいは

$$C_{ijkl} = \alpha\delta_{ij}\delta_{kl} + \beta\delta_{il}\delta_{jk} + \gamma\delta_{ik}\delta_{jl}$$

に作用させることによって決定できる。すなわち、

$$T^{(v)} = a(\text{tr } D^{(v)})I + 2bD^{(v)} + 2c\epsilon \cdot (\omega - \Omega) \quad \dots\dots\dots (41)$$

$$A = \alpha(I : \nabla \Omega)I + \beta(\nabla \Omega)^t + \gamma \nabla \Omega \quad \dots\dots\dots (42)$$

となる。これらはそれぞれ Eringen⁽¹⁾が提出した極性流体に対する応力テンソルの粘性部分および偶応力テンソルに一致している。したがって、係数 a, b, c はそれぞれ第2粘性係数、せん断粘性係数、うず粘性係数であり、また α, β, γ はスピン粘性係数であると言える。そこで式(41)を式(33)に代入すれば応力テンソルの完全な形が次のように決定できる。

$$T = -pI + \eta_2(\text{tr } D^{(v)})I + 2\eta D^{(v)} \\ + 2\eta_1\epsilon \cdot (\omega - \Omega) + DE + BH \\ - (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2)I/2 \quad \dots\dots\dots (43)$$

これを見ると Maxwell の応力テンソルは、飯田⁽³⁾や宮副⁽⁴⁾が指摘しているように全く一般的に厳密に導出された物質中の正しい Maxwell の応力テンソルの形として導入されている。このように圧力 p を式(8)で定義し、式(30)のような Maxwell の応力テンソルを採用する方法は最近多くみられる傾向であり、電磁場が存在する場合の圧力の定義は p_0 に比べ p のほうがより常識的な圧力の概念に従うものであると考えられている。従来のように、Maxwell の応力テンソルにおける電磁圧力部分を $(D \cdot E + B \cdot H)/2$ として導入できるのは D と E および B と H が平行で、かつ電気感受率や磁化率が定数とみなせるときに限られる。

5.3.3 M の構成方程式 最後に本報における最大の問題点であるところの磁化の構成方程式について考えることにしよう。仮にいま、磁化を決定するための方程式として従来どおり磁化の緩和方程式:

$$dM/dt = \Omega \times M - (M - M_0 H/H)/\tau_B$$

を採用するとすれば、上式と Maxwell の方程式(11)との間に矛盾が生じる。また上式によって決定された磁化は必ずしも Clausius-Duhem の不等式(37)を満足するとは限らない。したがって、ここでは緩和方程式を完全に排除し、その代わりに磁化を決定する方程式として、磁化の構成方程式を条件式(37)を常に満足するように決めることにする。では M も q や j^* のように単に2階の等方テンソルに $\epsilon : \Omega H$ を作用させるだけでよいかというとそうではない。なぜならば、こうして得られた構成方程式では、磁場が存在する場合

でも、粒子の回転角速度 Ω が0であれば M は0となり、流体は磁化されないことになる。これでは実際の物理現象に適さない。そこで、いま磁化ベクトルは、その極性ベクトル部分と軸性ベクトル部分の合ベクトルとして与えられるとし、各部分を構成する磁場をそれぞれ H および h とおく。このとき磁化の構成方程式は、 χ_m を磁化率として、

$$M = \chi_m(H + h) \quad \dots\dots\dots (44)$$

と書ける。 h は軸性ベクトルであるから、必ずこれに双対な2階の反対称テンソル Ξ が存在する。すなわち、

$$h = \epsilon : \Xi/2 \quad \dots\dots\dots (45)$$

なる関係が成立する。式(45)を式(44)に代入し、これを用いて式(37)における磁化を含む散逸部分 $\Phi_{(m)}$ を表せば次のようになる。

$$\Phi_{(m)} = M \cdot \epsilon : \Omega H = \chi_m \Xi : \epsilon \cdot \epsilon : \Omega H/2$$

そこで $\epsilon \cdot \epsilon : \Omega H$ を応力テンソルの決定に用いた C_{ijkl} (ただし係数を a', b', c' に置き換える) に作用させれば、 Ξ の線形部分がつぎのように取り出される。

$$\Xi = 2c' \epsilon \cdot \epsilon : \Omega H \quad \dots\dots\dots (46)$$

式(46)を式(45)に代入すれば、

$$h = -2c' \Omega \cdot \epsilon \cdot H \quad \dots\dots\dots (47)$$

となる。さらに、これを式(44)に代入して整理すると、磁化の構成方程式はつぎのようになる。

$$M = \chi_m \cdot H \quad \dots\dots\dots (48)$$

ただし

$$\chi_m = \chi_m(I - \tau \Omega \cdot \epsilon) \quad \dots\dots\dots (49)$$

ここで c' は時間の次元をもっているので、 $2c'$ を新たな係数 τ で置き換えてある。式(49)のように決定された磁化率テンソルは、Shliomis⁽¹⁴⁾が角運動量方程式と緩和方程式における慣性項を無視し、粒子の濃度 ϕ が希薄であるものとして得た結果に類似している。Shliomis の理論によると、式(49)における係数 τ に相当する $\tau_{\perp}$ は、 τ_B を回転 Brown 運動の緩和時間として、 $\tau_{\perp} = \tau_B / (1 + \xi L(\xi)/2)$ で与えられる。ところが、これは前述の仮定のもとで導かれた結果であるから、正確な表現であるとは言えない。 τ の厳密な理論式を得ることは非常に困難であり、その値を知るためには今後、詳細な実験的調査が必要である。しかしながら、仮に τ の理論式が得られるならば、 $\tau = \tau_B(1 + \epsilon)$ のように表されるであろう。ここで ϵ は、磁場の強さ、粒子の濃度、温度などの未知関数である。ただし ϵ は微小量であると考えられるので、 τ は τ_B とほぼ同じオーダー (10^{-6} s) の量であるといえる。

つぎに式(49)における磁化率について考える。磁性流体は、たとえ導電性がある場合にも常磁性流体であ

るとみなすことができる。したがって平衡状態における磁化現象は Langevin の法則に従うと考えられる。よって磁化率 χ_m は、

$$\chi_m = M_0/H \quad (50)$$

ただし $M_0 = NmL(\xi) = \phi M_s L(\xi)$ にて与えられる⁽¹⁴⁾⁽¹⁵⁾。

以上より磁化の構成方程式は結局次式のように決定される。

$$M = M_0(I - \tau \Omega \cdot \epsilon) \cdot H/H \quad (51)$$

6. 基礎方程式の決定

6.1 基礎方程式系の決定 以上で得られた q, j, T, A および M の構成方程式(38), (40), (43), (42), (51)を式(18), (22), (32)に代入すれば、運動方程式、角運動量方程式およびエネルギー方程式の具体的な表式が得られる。基礎方程式系としては、これらに連続の方程式(17)および電磁場の方程式(4), (7), (11)~(14), (51)を加えて次のようになる。

$$\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \rho d\mathbf{v}/dt = & -\nabla p + (\eta_1 + \eta_2) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \\ & + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \nabla \times \{2\eta_1(\Omega - \omega)\} + \rho_e \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \\ & + (\mathbf{P} \cdot \nabla) \mathbf{E} + (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{H} + \mathbf{P} \times (\nabla \times \mathbf{E}) \\ & + \mathbf{M} \times (\nabla \times \mathbf{H}) + \rho \mathbf{b} \quad (52) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I d\Omega/dt = & (\alpha + \beta) \nabla (\nabla \cdot \Omega) + \gamma \nabla^2 \Omega \\ & - 4\eta_1(\Omega - \omega) + \mathbf{M} \times \mathbf{H} + \rho \mathbf{l} \quad (53) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho T ds/dt = & \kappa \nabla^2 T + \eta_2 (\text{tr } D^{(v)})^2 \\ & + 2\eta D^{(v)} : D^{(v)} + 4\eta_1(\Omega - \omega)^2 + \mathbf{j}^2/\sigma \\ & + \alpha \{ \text{tr}(\nabla \Omega) \}^2 + \beta (\nabla \Omega)^4 : \nabla \Omega \\ & + \gamma \nabla \Omega : \nabla \Omega + \tau (M_0/H)(\Omega \times \mathbf{H})^2 + \rho r \quad (54) \end{aligned}$$

$$\partial \mathbf{B} / \partial t = -\nabla \times \mathbf{E} \quad (11)$$

$$\partial \mathbf{D} / \partial t + \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{H} \quad (12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e \quad (14)$$

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \rho_e \mathbf{v} \quad (40)$$

$$(\mathbf{j}^* = \mathbf{j} - \rho_e \mathbf{v}) \quad (55)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M} \quad (7)$$

$$\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E} \quad (4)$$

$$\mathbf{M} = M_0(I - \tau \Omega \cdot \epsilon) \cdot \mathbf{H}/H \quad (51)$$

$$D^{(v)} = \{ \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^t \} / 2 \quad (56)$$

6.2 従来の理論と本理論との関係

ここで得られた方程式系に種々の条件を付加することによって従来提唱されている方程式系が得られる。その条件は、微粒子の存在の有無すなわち流体の極性の有無に関する条件と流体全体および母液の性質に関する条件に大別できる。

流体に非極性の条件を付加することは、粒子の半径 a を零とすることにほかならない。このとき、流体は単に母液のみで構成されることになり、つぎの3個の量は零になる。

$$i = [(8/5)\pi a^5 N \rho_a / \rho]^{1/2}$$

$$\phi = (4/3)\pi a^3 N$$

$$\tau_B = 4\pi a^3 \eta_0 / kT$$

さらに物質定数間の諸関係式⁽¹⁶⁾によって、以下の量もともに0となる。

$$I = \rho i^2, \eta_1 = I / 4\tau_B, \gamma = i^2 \eta,$$

$$\tau = \tau_B(1 + \epsilon)$$

ここで Eringen⁽¹⁾によって示された不等式：

$$-\gamma \leq \beta \leq \gamma$$

より β も零となることがわかる。また通常 α も零とみなせるようである⁽¹⁵⁾。以上より、非極性条件により、物質定数 $i, \phi, \tau_B, I, \eta_1, \tau, \alpha, \beta, \gamma$ はすべて零となる。

つぎに流体および母液の性質に関する条件としてはつぎのようなものが挙げられる。

- (1) 流体は電氣的に中性である ($\rho_e = 0$)
- (2) 母液は非導電性である ($\sigma = 0$)
- (3) 母液は非誘導電体である ($\chi_e = 0$)
- (4) 粒子は非磁性体である ($\chi_m = 0$)

表 1 従来の理論と本理論との関係

	Non-polar theory ($a = 0$)	Polar theory ($a \neq 0$)
$\rho_e = 0, \sigma = 0$ $\chi_e = 0, \chi_m = 0$	① Eqs. for Newtonian fluids	② Eringen's equations ⁽¹⁾
$\rho_e = 0, \sigma = 0$ $\chi_e = 0, \chi_m \neq 0$ Quasi-stationary magnetic fields	③ Neuringer-Rosensweig's equations ⁽⁹⁾	④ Shizawa-Tanahashi's equations ⁽¹¹⁾
$\rho_e \neq 0, \sigma \neq 0$ $\chi_e \neq 0, \chi_m \neq 0$	⑤ Shizawa-Tanahashi's equations ⁽¹²⁾	⑥ Present theory

これらの条件をさまざまに組合せて、本報で導出された基礎方程式系に適用すると、表1に示すような従来の方程式系が得られる。ここで注意を要するのは、まず表1中の③と⑤である。流体が非極性の場合には、前述のように $\phi=0$ であるから、 $M_0=\phi M_s L(\xi)=0$ すなわち $\chi_m=0$ となる。このように本来、非極性の磁性流体は存在し得ない。しかし、いま流体全体が磁性体であるような一様等方性流体を想定すれば $\chi_m \neq 0$ とできる。この考えのもとで③と⑤は誘導されている。なお⑤で χ_e と χ_m を一定とおけばMHDの方程式系が得られる。また④では、本報で誘導した磁化の構成方程式の代わりに緩和方程式が用いられている。以上より本理論は従来の磁性流体関係のあらゆる理論をほとんど包含していると言える。

6.3 非導電性磁性流体の基礎方程式系 従来提唱されている内部回転を考慮した非導電性磁性流体の基礎方程式系(Shliomis⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾、棚橋ら⁽¹⁶⁾、志澤・棚橋⁽¹¹⁾など)では、適用可能な印加磁場として、いずれも定常磁場という制限が課せられている。そこで、この制約条件を除き、 $\rho_e=0$, $\sigma=0$, $\chi_e=0$ なる条件のみを本理論に適用すると、より一般的かつ厳密な非導電性磁性流体の基礎方程式系がつぎのように得られる。

$$\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \rho d\mathbf{v} / dt = & -\nabla p + (\eta + \eta_2) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \\ & + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \nabla \times \{2\eta_1 (\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega})\} + (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{H} \\ & + \boxed{\mathbf{M} \times (\nabla \times \mathbf{H})} + \rho \mathbf{b} \quad (57) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I d\boldsymbol{\Omega} / dt = & (\alpha + \beta) \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{\Omega}) + \gamma \nabla^2 \boldsymbol{\Omega} \\ & - 4\eta_1 (\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M} \times \mathbf{H} + \rho \mathbf{l} \quad (53) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho T ds / dt = & \kappa \nabla^2 T + \eta_2 (\text{tr } \mathbf{D}^{(v)}) \\ & + 2\eta \mathbf{D}^{(v)} : \mathbf{D}^{(v)} + 4\eta_1 (\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega})^2 \\ & + \alpha (\text{tr} (\nabla \boldsymbol{\Omega}))^2 + \beta (\nabla \boldsymbol{\Omega})^4 : \nabla \boldsymbol{\Omega} \\ & + \gamma \nabla \boldsymbol{\Omega} : \nabla \boldsymbol{\Omega} + \boxed{\tau (M_0 / H) (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H})^2} + \rho r \quad (58) \end{aligned}$$

$$\boxed{\partial \mathbf{B} / \partial t = -\nabla \times \mathbf{E}} \quad (59)$$

$$\boxed{\epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t = \nabla \times \mathbf{H}} \quad (60)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (13)$$

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{E} = 0} \quad (61)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M} \quad (7)$$

$$\boxed{\mathbf{M} = M_0 (\mathbf{I} - \tau \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\epsilon}) \cdot \mathbf{H} / H} \quad (51)$$

$$(\mathbf{D}^{(v)}) = \{\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^t\} / 2 \quad (56)$$

この方程式系と前々報⁽¹¹⁾で得た方程式系との相違は $\boxed{}$ で示した部分である。ここでは4個のMaxwellの方程式全部を用いることにより、非定常磁場を取扱うことが可能になる。また時間的に速やかに変動する

磁場あるいは電場を印加することにより、運動方程式には従来存在しなかった $\mathbf{M} \times (\nabla \times \mathbf{H})$ なる力の項が加えられる。さらにエネルギー方程式には $\mathbf{H} \mathbf{M} : \boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\Omega}$ の代わりにClausius-Duhemの不等式を常に満足する項 $\tau (M_0 / H) (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H})^2$ が導入されている。この項は、粒子の回転が誘起磁化を生じさせる不可逆過程におけるエネルギー散逸を表している。また磁化の緩和方程式を排除し、磁化の構成方程式を用いることによって、すべての方程式は保存形表示が可能となる。これによって、従来障害となっていた有限体積法(数値解析の一手法)の適用が容易になる。

7. 結 言

内部回転を考慮した導電性磁性流体の基礎方程式を熱力学的手法を用いて誘導した結果、つぎの結論を得た。

(1) 力学的つり合い方程式を基礎として、自由エネルギーと散逸関数を用いた熱力学的手法による導電性磁性流体の基礎方程式の簡潔な誘導方法を提示した。

(2) 磁化の緩和方程式を方程式系から完全に排除し、その代わりに磁化の構成方程式を散逸関数から決定する方法を提案した。

(3) 緩和方程式を用いないため、質量、運動量、角運動量、エネルギーに対する方程式はすべてそれぞれのつり合い方程式を満足し、保存形表示が可能となる。これによって、有限体積法の適用が容易になるなど、緩和方程式に起因するところの従来のような解析上の障害が解消される。

(4) 得られた基礎方程式系は非常に一般性に富み、従来提唱されている磁性流体関係のあらゆる方程式系をほとんど含有している。

(5) 本論文で導かれた基礎方程式系に非導電性の仮定を設けて得られる非導電性磁性流体の方程式系は、従来の理論に比べより一般的かつ厳密である。したがって、この基礎方程式系は非定常磁場の問題に適用でき、従来のものより取扱い可能な現象の範囲が拡大された。

最後に、本研究費の一部に対して、文部省科学研究費の補助および日本住宅総合センターより研究助成を受けたことをここに記し謝意を表する。

文 献

- (1) Eringen, A. C., *J. Math. Mech.*, 16-1 (1966), 1.
- (2) 藤本, 第二次改善流体力学, (昭55), 280, 養賢堂.
- (3) 飯田, 新電磁気学(下), (昭50), 458, 670, 丸善.
- (4) 伊藤, 工業材料, 29-9 (昭56), 100.
- (5) Kline, K. A. and Allen, S. T., *Biorheology*, 6 (1969), 99.

- (6) Kline, K. A., ほか 2 名, *Biorheology*, 9 (1972), 1.
- (7) Landau, L. D. and Lifshitz, E. M. (井上・ほか 2 名訳), 電磁気学, 1 (昭 55), 256, 東京図書.
- (8) 宮副, 電磁気学, 2 (昭 58), 182, 朝倉書店.
- (9) Neuringer, J. L. and Rosensweig, R. E., *Phys. Fluids*, 7-12 (1964), 1927.
- (10) 丹生, 流体物理学, (昭 46), 197, 朝倉書店.
- (11) 志澤・棚橋, 機論, 51-461, B (昭 60), 95.
- (12) 志澤・棚橋, 機論, 51-468, B (昭 60), 2737.
- (13) Shliomis, M. I., *Sov. Phys. JETP*, 34-6 (1972), 1291.
- (14) Shliomis, M. I., *Sov. Phys. Usp.*, 17-2 (1974), 153.
- (15) 棚橋, 流体工学, 18-2 (昭 57), 41.
- (16) 棚橋・ほか 4 名, 機論, 49-437, B (昭 58), 53.
- (17) 棚橋, 機械の研究, 35-8 (昭 58), 930.
- (18) 棚橋, 基礎流体工学入門, (昭 58), 71, コロナ社.
- (19) Tarapov, I. E., *Magnit. Gidrodin.*, No. 1 (1972), 3.

討 論

〔質問〕 神 山 新 一 (東北大学高速力学研究所)

(1) 通常の電磁流体工学の取扱いにおいては, マックスウェルの式およびオームの法則における $\rho_e E$, $\partial D / \partial t$, および $\rho_e v$ の各項は $(v_0/c)^2$ のオーダーの微小項(ここに, v_0 : 代表速度, c : 光速)であり, 省略しても差しつかえない。したがって, 例えば非導電性磁性流体の運動方程式に新たに加えられた項 $M \times (\nabla \times H)$ は非定常磁場を扱う場合でも従来は $\nabla \times H = 0$ として扱われている。

貴解析で新たに加えられた項が無視しえなくなるのは具体的にはどのような流れの場合を想定しておられるのかご教示願いたい。

〔回答〕 非導電性磁性流体に対する基礎方程式中

に示した運動方程式(57)および Maxwell の方程式(60)は, 本報で得られた導電性磁性流体に対する基礎方程式系に $\rho_e = 0$, $\sigma = 0$, $\kappa_e = 0$ なる 3 個の条件のみを適用した場合の結果である。

さらに, いま時間, 長さ, 速度, 電場の大きさおよび磁場の大きさの代表量をそれぞれ t_0 , l_0 , v_0 , E_0 および H_0 とおきオーダー評価すれば, $l_0/t_0 \propto v_0$ であるから, 式(59), (60)より式(60)の左辺は $\epsilon_0 \partial E / \partial t \propto (v_0/c)^2 (H_0/l_0)$ となる。一方右辺は $\nabla \times H \propto H_0/l_0$ であるから左辺は右辺に比べて $(v_0/c)^2$ の微小量となり無視できる。したがって実際の解析にあたってはご指摘のとおり式(60)を $\nabla \times H = 0$ としてよい。このとき式(57)における $M \times (\nabla \times H)$ の項も 0 となる。