非ニュートン流体の曲り管内流れ*

(第 1 報, べき乗則流体の数値解析)

高見 敏 弘**, 須 藤 浩 三**, 富 田 幸 雄***

Flow of Non-Newtonian Fluids in Curved Pipes (1st Report, Numerical Analysis for Laminar Flow of Power-Law Fluids)

by Toshihiro TAKAMI, Kouzou SUDOU, and Yukio TOMITA

A steady fully-developed laminar flow of power-law fluids in curved pipes has been solved numerically for Dean numbers $D \leq 1000$, power indices $0.5 \leq n \leq 1.0$ and curvature radius ratios $10 \leq R_c \leq 100$. Velocity profiles of primary flow, stream lines of secondary flow, distributions of wall shear stress and friction factors are obtained. Effects of D , n and R_c upon flow characteristics are made clear.

Key Words: Fluid Mechanics, Non-Newtonian Fluid, Curved Pipe, Numerical Analysis, Secondary Flow, Power-Law Fluid

1. 緒 言

曲り管は熱交換器あるいは化学反応装置などの配管系に広く使用されており, その管内流れについては古くから理論的・実験的研究が数多く行われてきた。また, 研究の範囲も層流から乱流までの広い領域にわたっており, 圧力損失や内部の流動状態などについて多くの成果が報告されている。しかし, これらの研究は水や空気のようなニュートン流体に関するものが多く, 化学プラントで扱う高分子溶液や血液のような非ニュートン流体の流れにその成果をそのまま適用することはできない。

非ニュートン流体の曲り管内流れに関する研究の歴史は浅く, 研究成果は少ない。今日までに行われた主要な研究のうち, 解析的研究の多く⁽¹⁾⁻⁽⁴⁾は粘性弾性流体を対象として摂動法による近似解析を行ったものであるが, 得られた結果の適用範囲はかなり限定され, 実際の流れに適用するまでには今後さらに多くの検討が必要と考えられる。一方, 実験の多く⁽⁵⁾⁻⁽⁸⁾はべき乗

則モデルに従う擬塑性流体を用いて管摩擦係数を測定したものであるが, 実験範囲(べき指数 n , レイノルズ数 Re あるいはディーン数 D , および曲率半径比 R_c)が狭いため支配パラメータの影響が不明確で, その流動特性の特徴を十分に把握するまでには至っていない。

このような研究の現状をふまえて, 本研究ではべき乗則流体の十分発達した曲り管内定常層流について数値解析を行い, 速度分布や二次流れの流動パターンなどを明らかにするとともに, 壁面せん断応力分布および管摩擦係数を求め, その流動特性について検討を行った。なお, べき乗則モデルは多種の非ニュートン流体の流動特性をよい精度で表す工業的に有用なモデルとして知られているが, 普通に使用される実在流体の多くはべき指数 n が 1 より小さい擬塑性挙動を示すので, 本解析ではその対象を $n=1.0 \sim 0.5$ の流体とし, ディーン数 $D \leq 1000$, 曲率半径比 $R_c=10 \sim 100$ の流れを扱うこととした。

2. 主 な 記 号

a : 管半径

D : ディーン数 $= Re/\sqrt{R_c}$

$e_{\alpha\beta}$: 無次元変形速度成分

* 昭和 60 年 7 月 11 日 北陸信越支部北陸地方講演会において講演, 論文受付 昭和 59 年 12 月 3 日。

** 正員, 広島大学工学部 (〒724 広島市西条町下見)。

*** 正員, 東京理科大学工学部 (〒278 野田市山崎東亀山 2641)。

$$= E_{as} / (\rho a^2 / K)^{1/(n-2)}$$

n, K : べき乗則流体の指数および粘度

$$p$$
: 無次元圧力 $= P / (\rho^n a^{2n} / K^2)^{1/(n-2)}$

(r, θ, φ) : トーラス座標 $= (R/a, \theta, \varphi)$ (図1参照)

$$R_c$$
: 曲率半径比 $= r_c / a$

$$Re$$
: レイノルズ数 $= \rho W_a^2 a^{-n} (2a)^n / K$

$$t$$
: 無次元時間 $= T / (K / \rho a^2)^{1/(n-2)}$

$$T_{as}$$
: セン断応力成分 $= K \Phi E_{as}$

(u, v, w) : (r, θ, φ) 方向の無次元速度

$$= (U, V, W) / (\rho a^n / K)^{1/(n-2)}$$

$$w_a$$
: 無次元断面平均流速 $= W_a / (\rho a^n / K)^{1/(n-2)}$

W_a : 断面平均流速

$$\lambda_c$$
: 管摩擦係数 $= \left(-\frac{1}{r_c} \frac{\partial P}{\partial \varphi} \right) \cdot (2a) / \frac{1}{2} \rho W_a^2$

ρ : 密度

$$\tau_{as}$$
: 無次元剪断応力成分 $= T_{as} / (\rho^n a^{2n} / K^2)^{1/(n-2)}$

$$\phi$$
: $= \Phi / (\rho a^2 / K)^{(n-1)/(n-2)}$ (式(4)参照)

$$\psi$$
: 無次元流れ関数 $= \Psi / (\rho a^{3n-4} / K)^{1/(n-2)}$

$$\omega$$
: 無次元渦度 $= \Omega / (\rho a^2 / K)^{1/(n-2)}$

3. 解 析

図1に示す座標系を用い、非圧縮性・べき乗則流体 ($\tau_{as} = \phi e_{as}$) の十分発達した曲り円管内層流の軸方向速度 w 、二次流れの渦度 ω および流れ関数 ψ に関する方程式を導くと、

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\phi \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\phi \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \\ &+ \left\{ \left(A + \frac{1}{r} \right) \phi + \frac{1}{hr} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right\} \frac{\partial w}{\partial r} + \left(B \phi - \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \\ &\times \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \left\{ \frac{\phi}{h^2} + \frac{1}{h} \left(B \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{A}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + A \frac{\partial \phi}{\partial r} \right. \\ &\left. + B \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right\} w - \frac{1}{h} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\phi \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\phi \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right)$$

図1 トーラス座標系

$$\begin{aligned} &+ \left\{ \left(A + \frac{1}{r} \right) \phi + \frac{1}{hr} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right\} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \left(B \phi - \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \\ &\times \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - \left\{ \frac{\phi}{h^2} + \frac{1}{h} \left(B \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{A}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \right\} \omega \\ &+ 2w \left(B \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{A}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + f_\omega \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

$$h\omega = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \left(\frac{1}{r} - A \right) \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{B}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \dots \dots \dots (3)$$

ここで、式(1)、(2)中の $\phi^{(9)}$ は

$$\phi = \left\{ \frac{1}{2} (e_{rr}^2 + e_{\theta\theta}^2 + e_{\varphi\varphi}^2) + (e_{r\theta}^2 + e_{\theta\varphi}^2 + e_{r\varphi}^2) \right\}^{(n-1)/2} \dots \dots \dots (4)$$

および式(2)の f_ω は

$$\begin{aligned} f_\omega &= \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) e_{r\theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial r} \\ &\times (e_{\theta\theta} - e_{rr}) + \frac{\partial \phi}{\partial r} \left\{ \frac{\partial e_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial e_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \left(A + \frac{1}{r} \right) \right. \\ &\times e_{r\theta} + B(e_{\theta\theta} - e_{\varphi\varphi}) \left. \right\} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \left\{ \frac{\partial e_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial e_{r\theta}}{\partial \theta} \right. \\ &\left. + A(e_{rr} - e_{\varphi\varphi}) + B e_{r\theta} \right\} \dots \dots \dots (5) \end{aligned}$$

である。また式(4)、(5)中の e_{as} はそれぞれ、

$$\begin{aligned} e_{rr} &= \frac{2}{h} \left\{ \left(A + \frac{1}{r} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial r} \right\} \\ e_{\theta\theta} &= \frac{2}{h} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial r} - B \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right\} \\ e_{\varphi\varphi} &= \frac{2}{h} \left\{ B \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{A}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right\} \\ e_{r\theta} &= \frac{1}{h} \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \left(A + \frac{1}{r} \right) \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{B}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right\} \\ e_{\theta\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - Bw \\ e_{r\varphi} &= \frac{\partial w}{\partial r} - Aw \dots \dots \dots (6) \end{aligned}$$

と表される。なお、式(1)~(3)および式(5)、(6)中の h, A, B は

$$h = R_c + r \sin \theta, \quad A = \frac{\sin \theta}{h}, \quad B = \frac{\cos \theta}{h} \dots \dots \dots (7)$$

である。

境界条件は、流れが $\theta = \pm 90^\circ$ 面に関して対称であることを考慮して、次のように与えられる。

$$r=1: w=0, \quad \omega = \frac{1}{h} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}, \quad \psi=0$$

$$\theta = \pm 90^\circ: \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0, \quad \omega = 0, \quad \psi = 0$$

$$r=0: \theta: \frac{\partial w}{\partial r} = 0$$

.....(8)

半径方向には等比間隔, 周方向には等間隔の格子点を用いて, 式(1)~(3)を管上半断面で差分化し, 非定常解法⁽¹⁰⁾により定常解を得る数値解析を行った。反復計算は w , ω , ψ の断面平均残差がそれぞれ 10^{-3} 以下になった時収束したと判断して打切った。本解析における反復回数は 300~1800 回程度であった。

このようにして得られた数値解をもとに, レイノルズ数 Re および管摩擦係数 λ_c はそれぞれ次式から求めることができる。

$$Re = 2^n \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (rw) dr d\theta \right\}^{2-n} \dots\dots\dots (9)$$

$$\lambda_c = 2^{4/(2-n)} Re^{2/(n-2)} \left(-\frac{1}{R_c} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right) \dots\dots\dots (10)$$

4. 結果および考察

4.1 流動パターンと速度分布 例として曲率半径比 $R_c=30$ の場合の管断面内の流動パターン (w の等速度線図および二次流れの流線) を図2~4に, $\theta=0^\circ (\pm 180^\circ)$, $\theta=\pm 90^\circ$ における管軸方向速度 w の分布を図5に示す。軸方向速度 w については断面平均値

w_a で除した値で表してある。また二次流れの流動パターンを示す図中の数値は流れ関数 ψ の値である。

低ディーン数 (図2: $D=60$), 中ディーン数 (図3: $D=300$) および高ディーン数 (図4: $D=1000$) の解析結果を概観すると, ディーン数の増加に伴う擬塑性流体 ($n<1$) の流動パターンの変化はニュートン流体 ($n=1$) のそれと同様の傾向を示すことが分る。すなわち, ディーン数の増加とともに最大軸方向速度

(a) $n=1.0$

(a) $n=1.0$

(b) $n=0.7$

(b) $n=0.5$

(c) $n=0.5$

図2 流動パターン ($D=60$, $R_c=30$)

図3 流動パターン ($D=300$, $R_c=30$)

の位置が流れの対称面 ($\theta = \pm 90^\circ$) 上の外壁側に片寄るようになり、管中央部には粘性作用の小さい領域が発達し、 $\theta = \pm 90^\circ$ 面に垂直な等速度線の領域が明りようになってくる。また、粘性作用の大きい壁近傍では舌状の増速領域が管壁に沿って内壁側へくい込むようになる。断面内に一對の循環渦を形成する二次流れは、管中央部において低ディーン数時には対称面に沿って内壁側から外壁側へ向かって平行に流れているが、ディーン数の増加とともに流線の湾曲が顕著となる。これと同時に、前述の内壁側へくい込む増速領域に渦中心位置も移動する。

次に、各ディーン数における指数 n の影響について述べる。擬塑性が強くなると、すなわち n が 1 より小さくなるにつれて粘性作用の大きい領域(粘性境界層)は外壁側ではますます管壁の近傍に限られるようになり、その厚さは薄くなる。そして図 5 に見られるように軸方向速度の最大位置は管壁側へ移動する。これに伴い、舌状の増速領域の内壁側へのくい込みが激しくなり、一部 ($\theta = -90^\circ$ 付近) を除いて境界層内の速度こう配は大きくなる。なお、図 5 中には参考例として

ダイラタント流体 ($n=1.5$) について求めた結果も示してある。 n が 1 より大きくなると、粘性領域が厚くなり、最大速度が大きくなると同時に、その位置も管中心へ向かって移動することがわかる。一方、二次流れに及ぼす n の影響についてみれば、 n が小さくなるにつれて流れ関数の絶対値も小さくなり、 n の減少とともに二次流れの弱まることがわかる。そこで、二次流れの強さを表す目安として次式で定義する二次流れの断面平均運動エネルギー

$$e = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \int_0^1 r(u^2 + v^2) dr d\theta \quad \dots\dots\dots (11)$$

を求め、その結果を図 6 に示す。べき指数 n が小さく

(a) $n=1.0$

(b) $n=0.7$

図 4 流動パターン ($D=1000$, $R_c=30$)

(a) $D=60$

(b) $D=300$

(c) $D=1000$

図 5 軸方向速度分布 ($R_c=30$)

なると二次流れのエネルギーも小さくなり、二次流れが弱くなることがわかる。二次流れは主流に起因する遠心力によって誘起されるものであるが、同じディーン数では n が小さくなると主流の流量が減少し遠心力が小さくなる。このため二次流れが弱くなるものと考えられる。しかし、二次流れ強さのディーン数 D に対する変化率はあまり n にはよらず、 D の増減にほぼ比例して変化する。なお、図6中の $n=1.5, 1.2$ は参考例として求めたダイラタント流体の結果で、ディーン数に対する依存性は n によって大きく異なることがわかる。また図7に示すように、二次流れの渦中心位置も n によって大きく変化し、 n が小さくなるにつれて前述の軸方向速度の増速領域に対応して内壁側へと移動する。そして内壁側へうずが移動すると、その近傍の軸方向速度が減速し、ゆがんだ特異な分布形を示すようになる(図5(b); $n=0.5$ および図5(c); $n=0.7$ 参照)。この傾向は n が小さくなるにつれて、またディーン数が大きくなるほど顕著となる。

4.2 壁面せん断応力分布 曲り円管内流れの壁面せん断応力には、主流(軸方向流れ)に関する軸方向せん断応力 $(\tau_{rz})_w$ と二次流れに関する周方向せん断応力 $(\tau_{\theta r})_w$ の二つがある。

$$(\tau_{rz})_w = \left(\phi \left| \frac{\partial w}{\partial r} \right| \right)_{r=1} \dots\dots\dots (12 \cdot a)$$

図6 二次流れの運動エネルギー ($R_c=30$)

図7 二次流れのうず中心位置 ($R_c=30$)

$$(\tau_{\theta r})_w = \left(\phi \left| \frac{1}{h} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right| \right)_{r=1} \dots\dots\dots (12 \cdot b)$$

前節と同じく曲率半径比 $R_c=30$ の場合を例にとり、無次元壁面せん断応力の周方向分布を図8に示す。両せん断応力とも無次元圧力こう配の半分 $[-\{(1/R_c)(\partial p / \partial \varphi)\} / 2]$ で除した値で表示してある。

低ディーン数(図8(a); $D=60$)では周方向の変化は滑らかで、後述する高ディーン数の場合と比較すれば、両せん断応力に対するべき指数 n の影響は小さい。

高ディーン数(図8(b); $D=1000$)になると、軸方向せん断応力 $(\tau_{rz})_w$ は低ディーン数の場合と比較して内壁側でより小さく外壁側でより大きくなり、 $\theta = -90^\circ \sim -60^\circ$ 付近で急激な変化を示すようになる。擬塑性が強くなると、外壁側の最大値は減少し、内壁側では $\theta = -90^\circ$ 付近を除いて増加するが、前節で述べたように、これはべき指数 n が小さくなるにつれて軸方向速度の増速領域が管壁に沿って内壁側へくいつむ

(a) $D=60$

(b) $D=1000$

図8 壁面せん断応力分布 ($R_c=30$)

図9 管摩擦係数

ようになることと符号している。全体的にみると、擬塑性が強くなるにつれてせん断応力 $(\tau_{rp})_w$ は壁面上で均された分布を示すようになる。一方、二次流れに伴って生ずる周方向の壁面せん断応力 $(\tau_{\theta\theta})_w$ の値はディーン数の増加とともに二次流れが強くなるため増加するが、べき指数 n によって分布形状が変化し、 n が小さくなるにつれて内壁側で増加、外壁側で減少する。しかし、その最大値はあまり変化せず、 $(\tau_{rp})_w$ の最大値が n によって大きく影響を受けることは対照的である。なお、計算結果によれば $R_c=10\sim100$ の範囲では速度分布および壁面せん断応力分布に及ぼす R_c の影響は極めて小さい。

4.3 管摩擦係数 べき乗則流体の曲り円管内層流はべき指数 n 、曲率半径比 R_c およびディーン数 D の三つの無次元パラメータにより記述されると考えられることから、4.1節、4.2節で示した $R_c=30$ のほかに $R_c=10, 100$ についても数値計算を行い、管摩擦係数 λ_c [式(10)] を求めた。得られた λ_c に $\sqrt{R_c}$ を掛けたものを縦軸にとり、横軸にディーン数をとって整理すると図9のようになる。図中の実線が数値解析の結果であり、破線で示す直線は直円管内層流の管摩擦係数 λ_s より得られる

$$\lambda_s \sqrt{R_c} = \frac{8 \left\{ \frac{2(3n+1)}{n} \right\}^n}{D} \dots\dots\dots (13)$$

なる関係を示したものである。解析結果は曲率半径比 R_c には関係なく、べき指数 n ごとに1本の曲線で表示できる。 λ_c はディーン数の増加につれて遠心力の影響が強くなり直管内流れを示す破線よりも大きくなる。また、同じディーン数で比較すると、べき指数 n が小さいほど λ_c の値は小さい。図中の $n=1.2, 1.5$ は参考例として求めたダイラタント流体の結果である。

ダイラタント流体でも R_c によらず1本の曲線にまとめられるが、曲りの影響が現れ $\lambda_c \sqrt{R_c}$ の値が直管内流れの値より大きくなり始めるディーン数は擬塑性流体ではあまり変わらないのに対して、ダイラタント流体では n によって異なってくる。

5. 結 論

べき指数 n が $1.0 > n \geq 0.5$ の擬塑性流体について曲率半径比 $R_c=10\sim100$ の曲り円管内を流れる定常層流をディーン数 $D=1000$ までの範囲で数値解析した結果、次のような結論を得た。

(1) 擬塑性流体の流動パターンに及ぼす管の曲りの効果はニュートン流体の場合と同様で、管中心部には粘性作用の小さい領域が形成され、管断面内に一對のうずが誘起される。

(2) 同じディーン数において擬塑性が強くなるほど、最大軸方向速度の位置は外壁側へ移動し、管壁にそって増速領域が内壁側へくいつくようになる。これと同時に、二次流れのうず中心も内壁側へ移動する。

(3) 二次流れの強さは n が小さくなると弱くなるが、ディーン数に対する変化率はあまり n によらない。

(4) 軸方向および周方向の壁面せん断応力はともに擬塑性が強くなると外壁側で減少、内壁側で増加する。また、軸方向の壁面せん断応力は n の減少とともに均された分布形を示すようになる。

(5) 管摩擦係数 λ_c はべき指数 n が小さいほど小さい。また、 $\lambda_c \sqrt{R_c}$ と D の関係は n のみに依存する曲線で表示できる。

文 献

- (1) Kamel, M. T. and Kaloni, P. N., *Z. Angew. Math. Phys.*, 28(1977), 551.
- (2) Thomas, R. H. and Walters, K., *J. Fluid Mech.*, 16(1963), 228; 21(1965), 173.
- (3) Jones, J. R., *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 13(1960), 428.
- (4) Srivastava, R. S. and Sarin, V. B., *Indian J. Pure Appl. Math.*, 4(1973), 437; 4(1973), 509.
- (5) Mishra, P. and Gupta, S. N., *Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev.*, 16(1979), 137.
- (6) Singh, R. P. and Mishra, P., *J. Chem. Eng. Jpn.*, 13(1980), 275.
- (7) Oliver, D. R. and Asghar, S. M., *Trans. Inst. Chem. Eng.*, 53(1975), 181.
- (8) Mashelkar, R. A. and Devarajan, G. V., *Trans. Inst. Chem. Eng.*, 54(1976), 108.
- (9) 富田, 機論, 25-149 (昭34), 17.
- (10) Joseph, B. ほか2名, *AIChE J.*, 21(1975), 965.

討 論

〔質問〕 加藤 宏〔東京都立大学工学部〕

緒言において、非ニュートン流体に対する従来からの研究結果と直接比較し難い由が述べられているが、

(1) 粘弾性流体に対する解析研究成果より、その特別な場合としてべき乗則流体に帰着させるか、または非ニュートン粘性効果のみ抽出し、貴論文の結果と比較検討できないか。

(2) べき乗則流体に対する実験的研究報告と同一か、または、きわめて近い条件で管摩擦係数を求め貴論文の成果を検討されるとよいと考える。

〔回答〕 (1) 粘弾性流体に対する解析的研究(文献(1)~(4))に関するかぎり、ご指摘のような本論文の結果との比較検討はできない。

(2) 「第2報：近似解析と実験」を参照願いたい。

〔質問〕 長谷川 富市〔新潟大学工学部〕

未知の問題を解析されたことに敬意を表す。以下の点について御教示願いたい。

(1) 式(1)~(3)の方程式は本論文ではじめて導いたのか。もしそうならばその導出の過程をもう少し詳しく書いた方がよいと思う。そうでないなら参考文献を示されるべきと思う。

(2) 図2(b)、等速度線が右上方密になっているところで乱れているが、これは計算誤差によるものか。

(3) 図4(b)について、

A ここでは速度こう配が大きいのか

それとも計算の誤差か

B 2次流線と関連してここに変化はないのか

C ここには渦があるのか。

(2), (3)に関連して数値計算の精度にも言及された方がよいと思われる。

図4 流動パターン ($D=1000$, $R_e=30$)

〔回答〕 (1) 変形速度成分 $e_{\alpha\beta}$ はニュートン流体の曲り管内流れに関する多数の解析的研究に示されている。また、 ϕ (式(4)) は文献(9)あるいは(付1)に示されている。

(2) 計算誤差ではなく、作図上の問題である。

(3) 上半断面の上部では速度こう配が極めて大きくなっている。上半断面の中央平面付近では等速度線は中央平面に垂直となるだけで、2次流れと関係するような変化は見られない。下半断面の2次流れの凹部には渦は発生しない。

(4) 計算精度は本文中にも述べているように、断面平均残差 10^{-3} 以下になった時計算を打切った。 $n=1$ のニュートン流体に対して得られた結果は従来の結果(付2)と大差ない。

(付1) 富田幸雄, レオロジー, (昭50), コロナ社。

(付2) 例えば, Collins, W. M. and Dennis, S. C. R., *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 28-2(1975), 133.