角柱群をすぎる粘性流中での粒子の運動*

長谷川 英 治**, 寺 田 浩 敏***

Motion of Small Particles in a Viscous Flow Past Many Square Cylinders

by Eiji HASEGAWA and Hirotoshi TERADA

Motion of small particles in a viscous flow past many square cylinders spaced regularly is investigated theoretically. In a steady flow past regularly spaced cylinders found by numerically solving the Navier-Stokes equations, trajectories of small particles are numerically found under the assumption that particles are subjected to Stokes' drag force and the viscous flow is unchanged by the presence of small particles. As a result, a critical condition that particles always collide with the square cylinders spaced regularly is found as a function of the mass ratio, the Reynolds number and the situation of cylinders. When the particles do not collide with the cylinders, trajectories of particles which are started with arbitrary positions and arbitrary velocities are found to tend to only one particular trajectory in the course of a sufficiently long time. These theoretical results are confirmed qualitatively by an experiment undertaken in a slow flow of water.

Key Words: Fluid Mechanics, Multiphase Flow, Crowds of Square Cylinder, Collision, Trajectory

1. は じ め に

流体、とくに、気体中に混入しているこまかい粒子をとり除く一つの方法は、油など粘着性の高い物質で表面を覆われた迷路状の多数の流路からなる層を用いてろ過することである。この場合、ろ過装置の効率を高めるには、ろ過層の流動抵抗をできる限り小さくすることと、浮遊する微粒子を流路壁に衝突させ、壁に付着させることである。しかし、流体力学的立場からすれば、この二つの要求は互いに相反する事柄であると予想されるから、流路形状の複雑さとそこを流れとともに運動する粒子の流路壁との衝突の関係をよく調べてみる必要がある。このような目的の基礎研究として、たくさんの物体の群の間を流れる流体の中での小さな粒子の運動について調べる。とくに、物体群をすぎる流れの中で、粒子がどんな条件のもとで物体群と衝突せずに通過してしまうかについて調べる。

ここでは、ろ過層のモデルとして、等間隔に並んだ柱状群を考える。そして、それら柱状群をすぎる定常

流中での粒子の通過の問題を調べる。ところで、流れの中での物体と粒子との衝突の問題は、流れへの粒子の混入の影響はないものとし、流れはポテンシャル流としてまえもって与えられ、円柱、球、翼、壁面などある一つの物体のまわりの流れについて研究されるのが普通であった^{(1)~(5)}。ここでは、ろ過層を想定しているから、流路幅は狭く、しかも、速度は比較的遅い場合が主要となる。したがって、流れは粘性流とせざるを得ない。多体物体のまわりの粘性流れは、ストークス近似を用いたとしても、球の群のまわりの流れの解から想像されるように⁽⁶⁾⁽⁷⁾、かなり面倒な解析を要する。そこで、まず、数値的に角柱群のまわりの流れをN-S方程式をもとに求め、その流れの中で粒子が流体よりストークスの抵抗法則に従う力をうけて運動するものと仮定して、粒子の運動の様子を解析する。なお、粒子が流体よりうける力としては、ストークス抵抗の他に、流れのせん断力による粒子に働く揚力⁽⁸⁾⁽⁹⁾、速度の二乗に比例した抵抗⁽⁴⁾⁽⁹⁾など、流れが定常の場合に限っても、種々の相互作用力の効果が調べられているが、先に述べたように、比較的低レイノルズ数の場合を重視しているため、流体と粒子との相互作用としてストークス抵抗則を採用した。

* 昭和60年11月20日 関西支部第245回講演会において講演、原稿受付 昭和60年1月31日。

** 正員、慶応義塾大学理工学部(〒223 横浜市港北区日吉3-14-1)。

*** 慶応義塾大学理工学部。

2. 角柱群をすぎる流れ

柱状群の間の定常流れでの粒子の通過の可能性の問題を扱うのであるから、柱の空間的配置としては、当然、流れの中に直線状の流れが存在しない場合を考えるべきである。したがって、流れは二次元的とし、柱は空間的に周期 $2L$ をもって全平面にわたって並んでいるとするが、柱の配置は、図 1 に示されているように、上下の列が互いに b だけずれている場合を考える。柱の形は一辺が c の正方形とする。図のように、 xy 座標をとったとき、 x 軸に沿って外部より加えられた圧力こう配によって、密度 ρ 、動粘度 ν をもつ非圧縮の粘性流体が定常的に平均速度 U_m で流れているものとする。この場合の流れを支配する方程式を、長さは角柱の間隔を示す L で、速度は平均流速 U_m で無次元化し、さらに、無次元の流れ関数 ψ とうず度 ω を導入して書き下せば、

$$\frac{\partial(\psi, \omega)}{\partial(x, y)} + \frac{1}{R} \nabla^2 \omega = 0 \quad (1)$$

$$\omega = -\nabla^2 \psi \quad (2)$$

となる。ここで、

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

である。さらに、 R はレイノルズ数 $U_m L / \nu$ である。これらの方程式を角柱の表面上での粘着の条件と流れの対称軸上でうず度が零となる条件のもとに解くことによって流れの場は決定される。この流れは、三つのパラメータ、すなわち、レイノルズ数 R 、上下の柱列のずれを示す比 $B (\equiv b/L)$ 、柱の太さを示す比 $C (\equiv c/L)$ に支配されて変わる。この問題は、 $B=1, C=0.6$ の場合について、 $R=0 \sim 16$ の範囲で川口によって数値的に解かれている⁽¹⁰⁾。ここでも、その方法に従い方程式 (1)、(2) を差分化し、数値的に解いた。なお、格子点の数は、川口の場合と同じく、流れの場の最小基本領域を縦横 20 分割し、400 点とした。 $R=16$ の場合に、

図 1 系の概略と座標系

流線と等うず度線の結果が川口のそれらと一致することを確認のうえ、いろいろの場合の流れを求めた。その一例を図 2 (a)～(c) に柱のずれの影響を示すために描いておいた。

3. 粒子の運動方程式

前章で調べた粘性流れの中にある小さい粒子の運動を調べるために、まず、粒子の混入によって流れは影響を受けないものとする。さらに、粒子は密度 ρ_p 、半径 a の球形であり、流体よりストークスの抵抗法則に従う力を受けるものとする。いま、粒子の速度成分を u_p, v_p 、流体のそれらを u_f, v_f とし、時間を t で表すことにすれば、粒子間の相互作用を無視した粒子の運動方程式は、ラグランジ的表示で、

$$\frac{4}{3} \pi a^3 \rho_p \frac{du_p}{dt} = 6 \pi \mu a (u_f - u_p) \quad (3)$$

$$\frac{4}{3} \pi a^3 \rho_p \frac{dv_p}{dt} = 6 \pi \mu a (v_f - v_p) \quad (4)$$

(a) $R=10, B=1, C=0.6$

(b) $R=10, B=0.5, C=0.6$

(c) $R=10, B=0, C=0.6$

図 2 流線 (角柱列のずれの影響)

となる。ここで、粒子の位置座標を x, y とすれば、

$$u_p = \frac{dx}{dt} \dots\dots\dots (5)$$

$$v_p = \frac{dy}{dt} \dots\dots\dots (6)$$

と表示される。いま、長さや速度については、流れの場合と同じ無次元化を行い、時間については L/U_m で無次元化すれば、粒子の位置を支配する方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{N}{R} \left(u_f - \frac{dx}{dt} \right) \dots\dots\dots (7)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{N}{R} \left(v_f - \frac{dy}{dt} \right) \dots\dots\dots (8)$$

となる。ここで、 N は場の最小基本領域内の流体と粒子の xy 平面への各投影面積をそれらがしめるとしたときの質量比に比例した $(9/2)\rho L^2/\rho_p a^2$ なる無次元量である。普通ならば、これまでの文献にあるように、 N/R をストークス数でひとまとめに表示するところであるが、ここで考えている流れは、前章で述べたごとく、レイノルズ数 R に依存するため、新しい無次元量 N を用いることにした。したがって、粒子の軌跡は、粒子の初期の位置と速度を与えれば、式(7)、(8)によって決定される。流体の速度 u_f, v_f はパラメータ R, B, C に依存するから、粒子の軌跡は、初期条件を示すパラメータのほかに、四つのパラメータ N, R, B, C に依存することになる。以下では、式(7)、(8)が適当な条件の下にルンゲ・クッタ法により数値的に解かれる。

4. 粒子の軌跡

ここでは、等間隔に並ぶ角柱群をすぎる流れの中で、粒子がそれら角柱群を通過できるか否かを主に調べようとしている。角柱は無限に並んでいるものとしているから、もし、粒子が通過できる場合があったとすれば、その状態の粒子の運動は粒子の初期状態には無関係となっているはずである。そこで、ここでは、時刻 $t=0$ に $x=0$ にある粒子が、その流体の速度と同じ速度で運動しはじめたものとし、粒子の軌跡を式(7)、(8)に従い計算し、長い時間にわたっての経過状況を調べることにした。

さて、粒子が衝突することなしに角柱群を通過できるか否かが問題となるのは、当然のことながら、直線状の流線が流れ場の中にある場合であるから、角柱の列が交互にちょうど角柱の間隔の半分だけずれている $B=1$ の場合で、しかも、柱と柱がかなり接近している $C=0.6$ の場合について、先に述べた初期条件のもとで、粒子の軌跡を求めた。その際、粒子が、もし、柱

に衝突したものとすれば、その粒子は柱に付着してしまうものとした。いま、 $t=0$ に $x=0$ 上にある一定間隔で並んでいた粒子の運動を調べてみると、粒子は柱の間を流れていくうちに衝突してすべて柱に付着してしまう場合と、はじめのうちはいくつかの粒子が柱と衝突するが、残りは柱と衝突することなしに下流へと流れ去る場合との2とおりの軌跡があることがわかった。これらの二つの場合の代表例が図3(a)~(c)と図4(a)~(c)に描かれている。ここで、図中 K とあるのは、 $2L$ を一周期としたとき、各図の軌跡が時刻 $t=0$ に原点 $x=0$ を出発して何周期めのものであるかを示す数である。図3に代表される前者の場合の粒子の軌跡は空間的に周期的とはならず、時間の経過とともにどの粒子の軌跡も柱に近づきついには衝突するが、図4に代表される後者の場合の粒子の軌跡は時間の経過とともにある特定の軌跡へと集まり、ついには空間的に周期的な1本の軌跡を描いて粒子は通過する

(a) $K=2$

(b) $K=5$

(c) $K=11$

図3 粒子が角柱に衝突する場合の軌跡
($R=30, N=10, B=1, C=0.6$)

ことになるのが特徴である。したがって、もし、いくつもの粒子が同時に流体とともに流されたものとする、適当な時間の経過の後に後者の場合には、角柱の近くに粒子をみいだすことはできないことになる。

5. 衝突限界曲線

前章で示したように、粒子の軌跡には2とおおりあり、すべての粒子が角柱に衝突してしまう場合と、一部の粒子は衝突することなく柱の間を通り抜けていく場合とがある。その限界を流体と粒子との質量比を示す N とレイノルズ数 R の平面上に、角柱列のずれ B と角柱の大きさ C をパラメータとして、示せば図5のようになる。図中の曲線の上側では、少なくともある一つの粒子が角柱と衝突しないで通過し、一方、曲線の下側では、すべての粒子は、必ず、流されていくうちに角柱と衝突する。レイノルズ数が増加すれば、柱と衝突しやすくなり、質量比を示す N が増加する、

(a) $K=1$

(b) $K=3$

(c) $K=10$

図4 角柱群を通過する場合の軌跡
($R=30, N=28, B=1, C=0.6$)

例えば、粒子が細くなれば、衝突しにくくなることを図5は示している。ポテンシャル流れのよどみ点での衝突限界では N と R とが比例し、ある一定のストークス数を境として決定された⁽²⁾⁽³⁾⁽⁹⁾。今の場合の衝突の限界を示す曲線は、流路の形状を示す B, C を指定しても、レイノルズ数の関数となり、レイノルズ数が増すとより衝突領域が増えることになっている。

次に、角柱の太さ C を変えた場合に、粒子が角柱群を通り抜けられるか否かの限界を示す曲線を、レイノルズ数 R が50として、 N - C 平面上に描いたのが図6である。この図中で、曲線の上側は粒子が角柱群と衝突せずに通過する領域を示し、下側は粒子が角柱群と衝突してしまう領域を示す。この図より、角柱の太さの増大は粒子の通過を阻止する効果を大いにもっていることがわかる。流れの向きに沿った方向から眺めたとき、十分柱と柱とのすきまがあっても、流れが蛇行しているため、粒子は通過できなくなる場合が十分ありうることを示している。

最後に、レイノルズ数 R が10であるとして、角柱列のずれ B の影響を調べてみる。 $B=0$ の場合は、図2(c)にあるように、直線状の流線があるから、この流線上にある粒子は、必ず、角柱群と衝突することなく通過することができる。 $B=\pm 0.5$ の場合は、計算の結果、通過可能か否かの限界の N の値は2.65となつて、 $B=1$ の場合の限界値 $N=4.38$ よりかなり小さく

図5 衝突限界曲線 (N - R 面)

図6 衝突限界曲線 (N - C 面)

なる。このように、粒子の通過を阻止するには、各列の角柱を互いに半周期ずつずらすのが最も効果的であることがわかる。そのことは、図2の(a)~(c)の流線を比較すると、 $B=1$ の場合が最も流線の蛇行が激しいことから、容易に予想される結果である。

6. 通過粒子の軌跡

衝突することなく通過する粒子は、十分時間を経た後には、図4(c)のような空間的に一定周期をもった1本の軌跡を描くことを知った。いま、この軌跡のうねりの振幅 e と原点から測った初めて最大振幅となる位置 f が流体と粒子の質量の比を示す N にどのように依存するかをレイノルズ数をパラメータとして描いたのが図7, 8である。 N の増加とともに、軌跡の振幅は増大する。そして、レイノルズ数が増大すると、振幅は減少する。細い粒子ほど軌跡のうねりの振幅は大きくなる。一方、振幅が最大となる位置 f は N が小さいほど大きく、レイノルズ数が大きいほど小さくなる。粗い粒子ほど原点にある柱からより下流側に最大振幅となる位置がずれることになる。

次に、今述べた一定周期の1本の軌跡により集まってくる速さを調べるために、初期に $x=0$ から出発したたくさんの粒子が、初めて角柱と衝突しなくなった

時の隣り合う柱に挟まれた粒子群の最大幅がそのときから計って何周期めに最大幅の1/4となるかを k で示し、それと N との関係を示したのが図9である。この図から、 N が大きくなると粒子は流体とほとんど同じように運動するのでなかなか1本の軌跡へと集まりにくいであろうし、一方、 N が小さくなって粒子が柱と衝突しはじめる限界に近くなれば、やはり、1本の軌跡とはなりにくいので、図9のように、 N のある値の時に最も1本の軌跡になりやすい結果となる。

さらに、角柱の太さ C が1本の一定周期の軌跡へと集まる速さに及ぼす影響を示したのが図10である。角柱を細くすると粒子が柱から受ける影響が減り、粒子が集まりにくくなることが知られる。角柱列のずれの影響を調べるために、 $R=10$, $N=20$, $C=0.6$ として、通過粒子の最大幅が1/4までに減る周期の数 k を計算してみると B が1, 0.5, 0と小さくなるにつれて k は8.5, 4.2, 3.6と減少した。このように、角柱列のずれが少ないほど粒子は通過しやすく、集まりやすくなっている。

7. 実験との比較

角柱群をすぎる流れの中での粒子の運動、とくに、多数の粒子の軌跡を調べるために、幅30 cm, 直線部の長さ約3 mの回流水槽を用いてモデル実験を行っ

図7 通過する粒子の軌跡の振幅

図9 通過粒子の過渡期への質量比の影響

図8 通過する粒子の軌跡の最大振幅の位置

図10 通過粒子の過渡期への角柱の太さの影響

図 11 角柱群をすぎる流れの粒子の軌跡
(平均流速=0.06 cm/s)

た。太さ $c=1.4$ cm, 間隔 $2L=5$ cm の角柱群を流路を横切る方向に 8 列, 流れの方向に 17 列用意した。粒子の運動の観察は, 流速測定法の一つである浮遊法でうまく流速が測定できるとされている毎秒数 cm 以下の流速範囲で流速を変えながら行った。通常の浮遊法では, やや大きめの径が 0.1~0.2 mm 程度の木の葉の破砕を粒子として用い, 水深 4 cm の水の流れて, 主に, 水面に浮いている粒子の運動を調べた。その結果, 平均流速が約 3 mm/s, すなわち, レイノルズ数 $R=25$ を境として, それ以下の流速では図 11 に例示したようにほぼ 1 本の軌跡となり, 一方, それ以上では水面全体に粒子は拡がり, 角柱の近くにも多くの粒子がいきつくようになった。粒形の違い, 流路の有限性, 表面張力など状況の複雑さに基づく不確かさを含むけれども, 4 章で述べたように, あるレイノルズ数

を境として, 2 とおりの軌跡がありうる事が確かめられた。

8. む す び

物体群をすぎる流れの中での粒子の運動を解析した。角柱群をすぎる流れを数値的に N-S 方程式を解いて求め, それをもとに, ストークス抵抗をうける粒子の運動の軌跡を求めて, (1) 粒子の軌跡には, 角柱に衝突するものと, 衝突せずに通過するものがあった, (2) それらを境する限界条件が質量比, レイノルズ数, 角柱列のずれ, 角柱の太さの関数として求められ, (3) 衝突することなしに通過する粒子の軌跡の性質を調べた。最後に, (4) 角柱群をすぎる小さい粒子の運動を観察し, 定性的に似た軌跡を描くことを確かめた。

文 献

- (1) Michael, D. H., *J. Fluid Mech.*, 31-1 (1968), 175.
- (2) Michael, D. H. and Norey, P. W., *J. Fluid Mech.*, 37-3 (1969), 565.
- (3) Healy, J. V., *Phys. Fluids*, 13-3 (1970), 551.
- (4) Morsi, S. A. and Alexander, A. J., *J. Fluid Mech.*, 55-2 (1972), 193.
- (5) Ishii, R., *Phys. Fluids*, 27-1 (1984), 33.
- (6) Hashimoto, H., *J. Fluid Mech.*, 5-2 (1959), 317.
- (7) Happel, J. and Brenner H., *Low Reynolds Number Hydrodynamics*, (1963), 387, Martinus Nijhoff Pub.
- (8) Saffman, J., *J. Fluid Mech.*, 22-2 (1965), 385.
- (9) 松藤・長谷川, 機論, 46-409, B (昭 55), 1647.
- (10) Kawaguti, M., *J. Phys. Soc. Japan*, 38-4 (1975), 1195.

討 論

〔質問〕 峯 村 吉 泰 (名古屋大学教養部)

クリーンルームの設計などに重要な資料を提供できるものとして興味深く拝見した。

(1) 流れのレイノルズ数 R が増すと, 粒子と周囲流体との相対速度による粒子レイノルズ数も大になり, ストークス式の適用範囲のレイノルズ数を超すことも考えられる。どの程度のレイノルズ数まで図 5~10 の結果は適用可能か。

(2) 図 5 あるいは図 6 のような衝突限界曲線を判断するには, 初期位置における粒子をどの程度細かく配置すればよろしいものか。

(3) NS 式を解く際に条件にしたうず度が零となる流れの対称流線と, 図 4 (c) で示された粒子軌道の関係について興味もたれる。対称流線の振幅 e と最

大振幅の位置 f はいかほどか。

〔回答〕 ストークス抵抗則が成立するのはレイノルズ数が 1 程度までであるが, それが 10 程度までなら, かなりよく, 現実の抵抗値を表すことも事実である。いま粒子の大きさが柱の粒子間隔の 1/10 程度の比較的大きなものであっても, ここでの計算例の 100 程度のレイノルズ数の範囲ならば, 粒子のレイノルズ数は 10 以内であるから, 十分適用範囲内にあると考えている。

(2) ここでの粒子の運動は, 粒子が独立に運動しているものと考えているから, 粒子数が少ない場合は十分正しい結果を与えていると考えている。しかし, 粒子の大きさの 7~8 倍の間隔以下のごみ具合となってくると粒子間の相互作用が次第に影響をもつように

なるものと予想されるから(付1)この程度の粒子数を一つの目安と考えている。

(3) 渦度が零となるのは、図2(c)のように直線

(付1) Happel, J. and Brenner, H., *Low-Reynolds number hydrodynamics.*, (1973), 235, Martinus Nijhoff Pub.

的流線のある場合を除けば、一般的には、柱と柱とを主流の方向に結んだ直線上のみであるから、ご指摘のような比較はできないが、流線と粒子の軌跡とはR, N, 柱の配置により、実際にはかなり複雑な関係にある。