管内流れの応答特性を表す基礎方程式の適用範囲について*

丸 山 祐 一**

The Applicable Range of the Fundamental Equations for the Response Characteristics of Tube Flows

by Yuichi MARUYAMA

The fundamental equations for one-dimensional steady isentropic flows superposed by unsteady small perturbations are shown to be identical with those for unsteady small perturbations only, if the Mach numbers are sufficiently smaller than unity. Consequently, the methods of response analyses of fluids in tubes for the latter cases are shown to be applicable to the former cases.

Key Words: Fluid Mechanics, Compressible Flow, Unsteady Flow, Small Perturbation Flow, Isentropic Flow, One-Dimensional Flow, Response Analysis

1. 緒 言

管内流体の応答特性の解析方法が、棚橋らの論文^{(1)~(6)}において示されている。解析に当たって、

- (1) 流れは一次元流れとして扱えること
- (2) 境界層は十分薄く、粘性の影響が無視できること
- (3) 初期流速は零とし、そこに微小なじょう乱が入力されること

を前提条件としている。ここでは、(3)の条件において、初期流速のマッハ数が1より十分小さければ、流速自体が零でなくとも、微小じょう乱を記述する方程式が論文⁽¹⁾で用いられたものと同一となることを示す。

2. 微小じょう乱方程式の導出

流れは一次元で、外力、流入熱量を零とする。さらに境界層は十分薄く、粘性の影響は無視できるものとする。定常状態において $\rho = \rho_s$, $u = u_s$, $p = p_s$, $a = a_s$ であったとする。ここで ρ は密度, u は流速, p は圧

力, a は音速である。定常状態からわずかにずれた状態を考え、じょう乱の二次元以上の項を無視すると、流れ場の基礎方程式は

$$A \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \{ (\rho' u_s + \rho_s u') A \} = 0 \quad \cdots \cdots (1)$$

$$\rho_s \frac{\partial u'}{\partial t} + \rho_s u_s \frac{\partial u'}{\partial x} + (\rho' u_s + \rho_s u') \frac{\partial u_s}{\partial x} = - \frac{\partial p'}{\partial x} \quad \cdots \cdots (2)$$

$$dp' = (a^2)' d\rho_s + a_s^2 d\rho' \quad \cdots \cdots (3)$$

となる。ここで A は断面積, 添字 ' は各物理量のじょう乱成分を表す。

式(3)の右辺に現れる $(a^2)'$ は、音速とマッハ数の関係式⁽⁶⁾を用いると、二次以上の項を無視して、

$$(a^2)' = a_s^2 (\gamma - 1) M_s M' \quad \cdots \cdots (4)$$

となる。ここで M_s と M' はそれぞれマッハ数の定常状態での値とじょう乱成分, γ は比熱比である。ところが $M_s M'$ は M' については一次であるが, $M_s \ll 1$ を仮定するとさらに微小な量となる。したがって式(3)は右辺第1項が無視できて、

$$dp' = a_s^2 d\rho' \quad \cdots \cdots (4)$$

となる。

次に式(1)において流路の全長を L , $t \sim T = L/a_s$,

* 原稿受付 昭和60年7月3日。

** 正員, 三菱電機(株)鎌倉製作所 (〒247 鎌倉市上町屋325)。

$u_s \sim U_s$, $\rho' \sim D'$ とし, さらに断面積変化の代表長が L と同じオーダーであるとすると,

$$\frac{\partial(\rho' u_s A)/\partial x}{A \partial \rho'/\partial t} \sim \frac{D' U_s/L}{D'/T} = M_s \quad \dots\dots\dots (5)$$

となる. また, 等エントロピ関係式⁽⁶⁾より

$$\rho_s = \rho_0 \left(1 - \frac{u_s^2}{2a_s^2} \right)$$

が得られる. 途中, $M_s \ll 1$ と, $a^2 = a_s^2$ を用いた. ゆえに $\rho_s \sim D_s$ とすると

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial x} \sim D_s \cdot \frac{U_s^2}{a_s^2} \cdot \frac{1}{L} = \frac{D_s M_s^2}{L} \quad \dots\dots\dots (6)$$

であるから, $u' A = q' \sim Q'$ として

$$\frac{q' \partial \rho_s / \partial x}{\rho_s \partial q' / \partial x} \sim \frac{Q' D_s M_s^2 / L}{D_s Q' / L} = M_s^2 \quad \dots\dots\dots (7)$$

となる. $M_s \ll 1$ より, 式(4), (5), (7)を用いると式(1)は

$$\frac{1}{\rho_s a_s^2} \frac{\partial p'}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial q'}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

となる.

次に式(2)において $u' \sim U'$ とすると

$$\frac{\rho_s u_s \partial u' / \partial x}{\rho_s \partial u' / \partial t} \sim \frac{D_s U_s U' / L}{D_s U' / T} = M_s$$

$$\frac{\rho_s u' \partial u_s / \partial x}{\rho_s \partial u' / \partial t} \sim \frac{D_s U' U_s / L}{D_s U' / T} = M_s$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho' u_s \partial u_s / \partial x}{\rho_s \partial u' / \partial t} &\sim \frac{D' U_s^2 / L}{D_s U' / T} \\ &= \frac{D'}{D_s} \cdot \frac{U_s^2}{U'} \cdot \frac{1}{a_s} \end{aligned}$$

ところが式(6)の導出と同様にして

$$D' / D_s \sim U_s U' / a_s^2$$

が言える. ゆえに

$$\frac{D'}{D_s} \cdot \frac{U_s^2}{U'} \cdot \frac{1}{a_s} \sim M_s^2$$

したがって $M_s \ll 1$ より式(2)は

$$\frac{1}{A} \frac{\partial q'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

となる.

すなわち $M_s \ll 1$ のとき基礎方程式は式(8)および式(9)となり, これは文献(1)の式(5), (6)と同じである.

3. 結 論

一次元流路の応答特性の解析に当たり, マッハ数が1より十分小さい定常流への微小じょう乱を記述する方程式が, 静止状態への微小じょう乱を記述するものと同じであることが示された. したがって後者の解析に対して提唱された棚橋らの手法⁽¹⁾⁻⁽⁵⁾が前者に対してもそのまま適用できることがわかった.

本報の結果は, 微小じょう乱の伝ばに当たってマッハ数が1より十分小さい場合は流体が流れていることの効果が無視できるという物理的意味をもっている.

文 献

- (1) 棚橋・安藤, 機論, 42-356 (昭51), 1147.
- (2) 棚橋・ほか3名, 機論, 43-372 (昭52), 3027.
- (3) 棚橋・ほか3名, 機論, 44-383 (昭53), 2363.
- (4) 棚橋・ほか2名, 機論, 46-412, B (昭55), 2286.
- (5) 棚橋・ほか3名, 機論, 48-426, B (昭57), 220.
- (6) Liepmann, H. W. and Roshko, A., *Elements of Gas dynamics*, (1957), 2-10, John Wiley & Sons.