高レイノルズ数における三次風上差分法の比較*

河 合 理 文**, 安 藤 安 則**

Comparison of Third-Order Upwind Schemes at High Reynolds Numbers

by Masafumi KAWAI and Yasunori ANDO

Comparison of three third-order upwind differencing schemes is carried out using the driven flow in a square cavity as the model flow field with the Reynolds numbers as high as 5 000. The schemes considered here are those of (a) Leonard (QUICK), (b) Agarwal and (c) Kawamura and Kuwahara. Evaluation is made with respect to accuracy, stability and the CPU time required. As the result, Leonard's scheme shows the best accuracy of the solution, while there is no significant difference in the CPU time among the schemes. Leonard's scheme also shows the best stability both with fine (61×61) and coarse (21×21) grids; stable solutions for Reynolds numbers up to 5 000 can be obtained by this scheme, while other schemes are unstable for Reynolds numbers above 1 000.

Key Words: Fluid Mechanics, Numerical Analysis, Finite Difference Method, Upwind Differencing Scheme, Cavity Flow

1. 緒 言

数値流体力学は急速な進歩をとげ、最近では三次元の乱流拡散という複雑な問題もかなりの精度で予測することが可能となってきた。著者らも最近、三次元物体まわりの乱流流れ場および拡散を予測するコードを開発し⁽¹⁾⁽²⁾、実験値との比較検討を通じて数値解析の精度向上を計ってきた。

最近の乱流解析の精度向上は、主に乱流モデルの進歩によるところが大きい。しかし同時に差分スキームの精度向上も重要であり、近年各研究者によって提案されているスキームは二次精度から三次精度の方法に中心が移っている。著者らも、今後乱流解析の精度を高めていくためには、三次精度の差分スキームを導入する必要があると考えている。

三次精度の差分スキームで最近提案されたものとしては、Leonardの方法(QUICK法)⁽³⁾、Agarwalの方法⁽⁴⁾およびKawamura-Kuwaharaの方法⁽⁵⁾があり、それぞれ成功をおさめているといわれている。しかし、各スキームはそれぞれ異なった流れ場に対して適用さ

れた結果が報告されているのみで、同じ問題に対して異なったスキームを適用してそれらの特徴・優劣を論じた例は見当たらないようである。

本論文では、上記の3種類の三次風上差分法および代表的な二次風上差分法⁽⁶⁾・一次風上差分法⁽⁷⁾を境界条件を含めて全く等しい流れ場の解析に適用し、とくに高レイノルズ数流れの場合について、各差分法の精度、安定法、計算時間について比較検討を行った。対象とした流れ場は、二次元非圧縮性定常のいわゆるキャビティ流れである。

記 号

諸量は適宜無次元化されているものとする。

A: 差分方程式の係数〔式(14)〕

B: 境界上の点(図2)

B+2, B+1, B-1: 境界近傍の点(図2)

BR1, BR2 など: 二次うず, 三次うず(図2)

H, V: 二次うず, 三次うずの大きさ(図2)

i, j: x, y 方向の格子番号(図1)

P, E, e など: 差分格子点の点(図1)

R_e : レイノルズ数

S: 差分方程式のソース項〔式(14)〕

u, v: x, y 方向の流速(図1)

* 昭和61年3月14日 東海支部第35期総会講演会において講演, 原稿受付 昭和60年5月20日。

** 正員, 石川島播磨重工業(株)技術研究所(〒235 横浜市磯子区新中原町1)。

VC: 主うずの中心 (図2)
 x, y : 座標 (図1)
 $\Delta x, \Delta y$: 格子間隔 (図1)
 ϕ : 解くべき変数
 ψ : 流れ関数
 ω : うず度
 3L, 3A, 3K, 2, 1: 差分スキームの名称

2. 解析手法

2.1 支配方程式と差分法 二次元非圧縮性定常粘性流の支配方程式を流れ関数 ψ とうず度 ω を用いて表わせば, 以下のように書ける.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega \quad (1)$$

$$u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

この支配方程式を図1に示すような差分格子上で離散化し, 差分方程式を導く. 本論文では, 差分格子は図1のような等間隔格子を用いる.

式(1)左辺および式(2)右辺の2階微分は, 通常を中心差分で近似する.

式(2)左辺の対流項は, 以下に示す3種類の三次風上差分, および二次風上差分と一次風上差分の計5種類の差分スキームを用いて離散化した.

(a) Leonardの三次風上差分(QUICK法)⁽³⁾ (以下, スキーム名「3L」と呼ぶ) このスキームでは, P点のまわりに図1の点線のようなコントロール・ボリュームを考え, 式(2)をこの中で積分することにより差分近似を導く. この時, P点における ω の1階微係数を, コントロール・ボリュームの境界面上での ω の値より求める. 例えば,

$$u \frac{\partial \omega}{\partial x} \bigg|_P = \frac{u_e \omega_e - u_w \omega_w}{\Delta x} \quad (3)$$

ここで ω_e 等を評価するには, 次のような QUICK の式を用いる. ただし本論文では, Leonard の元の式に含まれている高次項は省略した⁽⁸⁾.

$$\omega_e = \frac{1}{2}(\omega_E + \omega_P) - \frac{1}{8}(\omega_E - 2\omega_P + \omega_W) \quad \text{if } u_e > 0 \quad (4a)$$

$$\omega_e = \frac{1}{2}(\omega_E + \omega_P) - \frac{1}{8}(\omega_{EE} - 2\omega_E + \omega_P) \quad \text{if } u_e < 0 \quad (4b)$$

流速 u_e は次式より求める.

$$u_e = \frac{\psi_{ne} - \psi_{se}}{\Delta y} = \frac{\psi_{NE} + \psi_N - \psi_{SE} - \psi_S}{4\Delta y} \quad (5)$$

(b) Agarwalの三次風上差分⁽⁴⁾ (同「3A」) こ

のスキームでは, ω の1階微係数をテイラー展開より求める際に, 通常を中心差分の項の他に3階微分の項を残す. 後者は2階微係数を「風上」的に差分することにより評価する. これより,

$$u \frac{\partial \omega}{\partial x} \bigg|_P = u_P \frac{\omega_E - \omega_W}{2\Delta x} - u_P \frac{\omega_E - 3\omega_P + 3\omega_W - \omega_{WW}}{6\Delta x} \quad \text{if } u_P > 0 \quad (6a)$$

$$u \frac{\partial \omega}{\partial x} \bigg|_P = u_P \frac{\omega_E - \omega_W}{2\Delta x} - u_P \frac{\omega_{EE} - 3\omega_E + 3\omega_P - \omega_W}{6\Delta x} \quad \text{if } u_P < 0 \quad (6b)$$

流速 u_P は次式より求める.

$$u_P = \frac{\psi_N - \psi_S}{2\Delta y} \quad (7)$$

(c) Kawamura-Kuwaharaの三次風上差分⁽⁵⁾ (同「3K」) このスキームは, まず対流項を通常の二次風上差分(次項)で近似したのち, これに流速の正負に関する関係式を適用して展開し, 得られた式の中で誤差の次数の最も低い項を他の高次のテイラー展開式と置き換えることにより導かれる. 最終形は,

$$u \frac{\partial \omega}{\partial x} \bigg|_P = u_P \frac{\omega_{EE} - 2\omega_E + 9\omega_P - 10\omega_W + 2\omega_{WW}}{6\Delta x} \quad \text{if } u_P > 0 \quad (8a)$$

$$u \frac{\partial \omega}{\partial x} \bigg|_P = u_P \frac{-2\omega_{EE} + 10\omega_E - 9\omega_P + 2\omega_W - \omega_{WW}}{6\Delta x} \quad \text{if } u_P < 0 \quad (8b)$$

u_P は式(7)より求める.

(d) 二次風上差分⁽⁶⁾ (同「2」) 最終形のみ示

図1 差分格子

す。

$$u \frac{\partial \omega}{\partial x} \Big|_P = u_P \frac{3\omega_P - 4\omega_W + \omega_{WW}}{2\Delta x} \quad \text{if } u_P > 0 \quad \dots\dots\dots (9\cdot a)$$

$$u \frac{\partial \omega}{\partial x} \Big|_P = u_P \frac{-\omega_{EE} + 4\omega_E - 3\omega_P}{2\Delta x} \quad \text{if } u_P < 0 \quad \dots\dots\dots (9\cdot b)$$

u_P は式(7)より求める。

(e) 一次風上差分⁽⁷⁾ (同「1」) 最終形のみ示す。

$$u \frac{\partial \omega}{\partial x} \Big|_P = \frac{u_e \omega_e - u_w \omega_w}{\Delta x} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\omega_e = \omega_P \quad \text{if } u_e > 0 \quad \dots\dots\dots (11\cdot a)$$

$$\omega_e = \omega_E \quad \text{if } u_e < 0 \quad \dots\dots\dots (11\cdot b)$$

u_e は式(5)より求める。

2.2 境界条件 本論文ではうず度 ω に関する境界条件としては、いずれの差分スキームの場合にも

図 2 キャビティ流れ

Woods⁽⁹⁾による次の関係式を用いた。

$$\omega_B = \frac{3(\psi_B - \psi_{B+1})}{(\Delta y)^2} - \frac{1}{2} \omega_{B+1} - \frac{3}{\Delta y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_B \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここで B は境界上の点, $B+1$ は境界に隣接する点を表す (図 2 参照)。なお, 「1」を除く各スキームでは境界の一つ内側の $B+1$ 点においてうず度 ω の差分方程式を導く際に, 境界の外の $B-1$ 点での ω の値が必要となるが, 本論文では, 次式のような二次外そうによりこの値を求めている。

$$\omega_{B-1} = 3\omega_B - 3\omega_{B+1} + \omega_{B+2} \quad \dots\dots\dots (13)$$

2.3 差分方程式の解法 以上の各差分スキームにより支配方程式を離散化すれば, 次式の差分方程式が得られる。

$$A_P \phi_P = A_E \phi_E + A_W \phi_W + A_N \phi_N + A_S \phi_S + S \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここで, $A_P, A_E, \dots, A_S$ は各差分格子点における差分係数, S はソース項であり, S には $EE, \dots, SS$ 点の寄与が含まれている。 ϕ は解くべき変数 (ψ または ω) である。

この方程式の解法としては, 原則として ADI-SOR 法を用いた。今回用いた ADI 法では, 1 回の反復で 4 回のスイープを行うようになっている。ただし 3K のスキームの場合には ADI 法では安定な解が得られなかったため, ポイント SOR 法を用いた。またレイノルズ数が 1000 を超える流れに対しては, やはり安定性の問題から, $EE, \dots, SS$ 点による寄与をソース項とせずに, $A_{EE}, \dots, A_{SS}$ を導入して 9 点のポイント SOR 法により計算を行った。

なお, 本計算における収束条件は, 反復による各変数の相対修正量が全格子点において 10^{-3} 以下になっ

表 1 レイノルズ数 1000 に対する計算結果

Scheme	3L	3A	3K	1	3L	1	Ghia et al ⁽¹¹⁾
Grid	61×61	61×61	61×61	61×61	21×21	21×21	129×129
Re	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
ψ_{VC}	-0.1140	-0.1099	-0.1066	-0.0957	-0.0911	-0.0688	-0.1179
ω_{VC}	-2.0049	-1.9774	-2.0456	-1.7461	-1.9749	-1.5471	-2.0497
ψ_{BL1}	1.920×10^{-4}	1.521×10^{-4}	1.434×10^{-4}	6.155×10^{-5}	2.168×10^{-4}	8.611×10^{-6}	2.311×10^{-4}
H_{BL1}	0.2040	0.2005	0.2195	0.1714	0.2782	0.0788	0.2188
V_{BL1}	0.1594	0.1553	0.1675	0.1307	0.2011	0.0685	0.1680
ψ_{BR1}	1.692×10^{-3}	1.806×10^{-3}	2.029×10^{-3}	7.452×10^{-4}	2.565×10^{-3}	3.394×10^{-4}	1.751×10^{-3}
H_{BR1}	0.3002	0.3294	0.4013	0.2319	0.5080	0.2260	0.3034
V_{BR1}	0.3434	0.3652	0.3945	0.3095	0.4191	0.3092	0.3536
$u(x=0.5)_{min}$	-0.3680	-0.3552	-0.3473	-0.2752	-0.2928	-0.1598	-0.3829
CPU Time[s]	381	340	(295)	394	16	10	

た場合とした。

3. 解析結果と考察

解析モデルには、各種のスキームの検証のために広く用いられている⁽⁴⁾⁽⁶⁾⁽⁷⁾⁽¹⁰⁾キャビティ流れを使用した。流れ場の様子と境界条件を図2に示す。

計算は、前章で述べた5種類の差分スキームを用いて、レイノルズ数（キャビティの一辺の長さとして上壁面の速度で定義） $Re=100, 400, 1000$ および $2000, 3200, 5000$ について行った。計算格子は、 61×61 の等間隔格子を用いた。また比較的粗い格子による結果も検討するために、 21×21 の格子による計算も行っている。なお、使用した計算機は FACOM M-380 R である。

表1に $Re=1000$ に対する各差分スキーム・格子による計算結果を示す。スキームと格子の組合せが表中に示されていない場合（例えば $2-61 \times 61, 3A-21 \times 21$ ）は、その条件では収束した解が得られなかったことを示している。本論文での比較検討のためのリファレンスとしては、Ghia ら⁽¹¹⁾による非常に細かい格子を用いた二次精度の結果を使用した。表中、 H, V は二次うずの大きさ（図2）、添字 VC は主うずの中心における値、同 BL1, BR1 は二次うずに対する値を表している。また、 $u(x=0.5)$ はキャビティの幾何学的中心線上における x 方向の流速 u であり、表ではその最小値を表示している。CPU 時間は、各スキームと格子の組合せについて、 $Re=400$ に対する結果を初期値としたときに、前述の収束条件を満たす解を得るまでの計算時間である。ただし $3K-61 \times 61$ の場合は、ほぼ収束した解は得られたものの、今回の収束条件を満たすまでには修正量を減少させることができなかった。図3

図3 キャビティの中心線上における流速分布

にはこのレイノルズ数における $u(x=0.5)$ の分布の様子を示す。表1および図3を見ると、おおむね $3L > 3A > 3K > 1$ の順で解の精度が高い。一方計算時間は、どのスキームを用いても大差はない。さらに、 $3L$ を用いると 21×21 の比較的粗い格子でも安定な解が得られていることがわかる。

次に、表1に挙げた特性量のうち代表的なものとして、 ψ_{VC} および $u(x=0.5)_{\min}$ の、レイノルズ数による変化を示したのが図4である。計算は、各スキームと格子の組合せについてレイノルズ数を $100 \rightarrow 400 \rightarrow 1000 \dots$ と進めて行った。図中に記号のないところは、表1の場合と同様に収束した解が得られなかった場合である。 $Re=100$ ではどのスキームを用いても結果はほとんど変わらないが、 Re が 400 以上では計算結果はスキームによって差を生じ、 $Re=1000$ になると前

Symbol	○	△	□	▽	◇
Scheme	3L	3A	3K	2	1
Grid	61×61	61×61	61×61	61×61	61×61
Symbol	○	▽	◇	☆	(11)
Scheme	3L	2	1	Chia et al.	
Grid	21×21	21×21	21×21	129×129	

(a) 記号

(b) 主うずの中心における流れ関数の値

(c) キャビティの中心線上における流速の最小値

図4 特性量のレイノルズ数による変化

図5 中心線上における流速分布のレイノルズ数による変化

述のように安定な解が得られない場合も出てくる。解の精度は、 $Re=400, 1000$ の双方で、 $3L > 3A > 3K (> 2) > 1$ の順に高い。 $Re=1000$ を超える流れになると、安定な解が得られるのは3Lおよび1のスキームのみである。これら二つのスキームには、いずれもコントロール・ボリュームを用いた積分形式より得られているという共通点がある。粗い格子による計算では、精度は当然細かい格子の計算より低いものの、3Lと1のスキームを用いると高いレイノルズ数まで安定な解が得られていることが注目される。

以上のように、検討してきたスキームのうち、3LすなわちLeonardの三次風上差分、いわゆるQUICK法では、高いレイノルズ数まで安定で精度の高い解が得られることが明らかになった。そこでこのスキームの結果のうち、 $u(x=0.5)$ の分布を $Re=100$ から今回の計算で安定な解が得られた限界である $Re=5000$ まで、図5に同時に示す。さらに、 $Re=5000$ における流線の様子を図6に示す。レイノルズ数が1000を超えると境界層はほぼ一定の薄い層となり、中心線上での流速分布がほとんど変化しなくなる一方、各コーナの二次うずは大きく発達し、 $Re=5000$ では右下の部分に三次のうずが現れ始めている。このようにLeonardのスキームを用いることにより、 61×61 という実用的な格子を用いて高レイノルズ数の流れ場の様子を記述することができた。

4. 結 言

キャビティ流れに対して、3種類の三次風上差分法を適用して解析を行い、解の精度、安定性、計算時間について比較検討した。得られた結論は以下のとおりである。

図6 レイノルズ数5000の場合の流線

(1) レイノルズ数 Re が400以上では差分スキームにより解に差を生じ、 $Re=400, 1000$ では、Leonard > Agarwal > Kawamura-Kuwaharaの順で解の精度が高い。

(2) 上記の解を得るために必要な計算時間は、どのスキームを用いても大きな差はない。

(3) $Re=1000$ を超える流れの場合、安定な解が得られたのはLeonardのスキームのみであった。このスキームでは、 $Re=5000$ まで解を得ることができた。

(4) 粗い格子を用いた計算では、やはりLeonardのスキームが解の精度、安定性とも優れている。

今後は、本研究で得られた結果を二次元および三次元の乱流解析コードに反映させ、乱流モデルのみならず、差分スキームの面からも数値解析の精度を高めていく予定である。

文 献

- (1) 安藤・ほか5名, 石川島播磨技報, 24-3 (昭59), 171.
- (2) 安藤・ほか3名, 機論, 51-463, B (昭60), 954.
- (3) Leonard, B. P., *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 19 (1979), 59.
- (4) Agarwal, R. K., *AIAA Paper*, No. 81-0112 (1981).
- (5) Kawamura, T. and Kuwahara, K., *AIAA Paper*, No. 84-0340 (1984).
- (6) Atias, M., ほか2名, *AIAA J.*, 15-2 (1977), 263.
- (7) Runchal, A. K., ほか2名, *Phys. Fluids Supplement*, II (1969), 21.
- (8) Demuren, A. O., *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 37 (1983), 309.
- (9) Woods, L. C., *Aeronaut. Q.*, 5-3 (1954), 176.
- (10) Rubin, S. G. and Khosla, P. K., *AIAA Paper*, No. 79-0011 (1979).
- (11) Ghia, U., ほか2名, *J. Comput. Phys.*, 48-3 (1982), 387.