垂直加熱・冷却壁および水平フィンに囲まれた く形容器内における自然対流熱伝達*

岡田 昌志**, 岡野 浩***

Natural Convection Heat Transfer in a Rectangular Cell Enclosed with Vertical Walls and Plate-Fins

by Masashi OKADA and Hiroshi OKANO

Two-dimensional natural convection heat transfer in a rectangular cell enclosed with horizontal plate-fins and hot and cold surfaces, which were vertical and isothermal, was analyzed numerically by the finite difference method. The analytical results of the isotherms in the cell were in good agreement with the experimental results obtained by the interferometric technique. The calculations were carried out for the Rayleigh number of $10^5 \sim 10^7$, varying the aspect ratio, Prandtl number, and the fin parameter, which was determined from the thickness and thermal conductivity of the fins. The effects of these four parameters on both the average Nusselt numbers on the hot surface and the fin surface and on the non-dimensional heat quantity transferred from the hot surface to the fins were clarified.

Key Words: Convective Heat Transfer, Numerical Analysis, Natural Convection, Rectangular Enclosure, Fin

1. 緒 言

垂直加熱・冷却壁を持つ矩形容器内における自然対流の研究は、容器内自然対流伝熱問題の最も基本的な系としてさまざまな研究がなされ、レーレー数・アスペクト比・プラントル数による、流速分布・温度分布・壁面ヌセルト数に与える影響が明らかにされている⁽¹⁾。近年、ハニカムパネルのような、加熱壁と冷却壁の間をフィンで仕切られた容器内の自然対流は、太陽熱集熱器やフィンの効果を利用した潜熱蓄熱器など種々の工学的応用で見られる。従来、この種の研究は水平面と加熱・冷却壁面のなす角が45~90度、アスペクト比が0.25~4.0の時に、フィンの厚さや熱伝導率に基づくフィンの特性値が一定であるとして $10^4 \sim 10^7$ の範囲におけるレーレー数に対して平均ヌセルト数との関係を、もしくは局所ヌセルト数分布を実験的に求めている⁽²⁾⁽³⁾。また、解析的には、レーレー数 10^4 付近における加熱壁上の温度分布、局所ヌセルト数分布、フィンの特性値と平均ヌセルト数との関係などが、中間

および風上差分の手法を用いて求められている⁽⁴⁾。又、類似した系として熱移動制御を目的とした、内部に仕切板を持つ長方形・平行四辺形層内の自然対流熱伝達の研究が報告されている⁽⁵⁾⁽⁶⁾。しかし、レーレー数が $10^5 \sim 10^7$ の範囲において、アスペクト比・フィンの特性値等が平均・局所ヌセルト数、および加熱壁からフィン、流体への伝熱量に与える影響についての十分な検討が不足している。

本研究では、垂直加熱・冷却壁および水平フィンに囲まれた矩形容器内の自然対流伝熱問題を取り上げる。流体が純水および空気であると仮定し、 $10^5 \sim 10^7$ の範囲のレーレー数に対し、アスペクト比・フィンの特性値と加熱壁上およびフィン上ヌセルト数の関係を解析的に明らかにする。さらに、加熱壁からのフィンおよび流体に対する伝熱量を定義し、これらと上記のパラメータとの関係を明らかにする。

2. 解 析

図1に座標系を示す。対流槽の高さ、長さをそれぞれ H, L とする。また、加熱・冷却壁温度を T_h, T_c とする。解析は以下の仮定のもとで行う。

(1) 自然対流は定常、二次元層流であり、ブジネスク近似が成立する。粘性散逸項が無視できる。

* 昭和61年4月3日 第63期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和60年5月27日。

** 正員、青山学院大学理工学部 (〒157 世田谷区千歳台5-4-14)。

*** 学生員、青山学院大学理工学部。

(2) フィン内の厚さ方向の温度は一様である。

(3) フィンは上下に無限枚続いている。

(2) の仮定はフィンの熱伝導率が小さく、厚さが厚い場合には成り立たなくなるが、後述の実験で用いた様な通常のフィンでは成り立つものとする。自然対流に対する基礎方程式は、連続の式、 x 方向と y 方向の運動量の式、エネルギーの式であるが、二つの運動量の式から圧力項を消去すれば

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad \dots\dots\dots (1)$$

なるうず度を用い、うず度輸送方程式が得られる。また、連続の式を満たすように流れ関数 ψ を次式で定義する。

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (2)$$

代表長さに H 、温度差に $T_h - T_c$ を取った無次元数を用いて基礎方程式を無次元化すれば以下の式が得られる。

うず度輸送方程式：

$$\frac{\partial \Omega}{\partial F_0} + Pr \left(U \frac{\partial \Omega}{\partial X} + V \frac{\partial \Omega}{\partial Y} \right) = Ra \frac{\partial \theta}{\partial X} + Pr \nabla^2 \Omega \quad \dots\dots\dots (3)$$

エネルギー方程式：

$$\frac{\partial \theta}{\partial F_0} + Pr \left(U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) = \nabla^2 \theta \quad \dots\dots\dots (4)$$

うず度と流れ関数の関係式：

$$\nabla^2 \psi = -\Omega \quad \dots\dots\dots (5)$$

流れ関数の定義式：

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial Y}, V = -\frac{\partial \psi}{\partial X} \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで以下の無次元数を用いた。

$$X = \frac{x}{H}, Y = \frac{y}{H}, F_0 = \frac{at}{H^2}, \\ \theta = \frac{T - T_c}{T_h - T_c}, \Omega = \frac{H^2 \omega}{\nu}, \psi = \frac{\Psi}{\nu},$$

図 1 解析モデルの座標系

$$U = \frac{Hu}{\nu}, V = \frac{Hv}{\nu}, Pr = \frac{\nu}{\alpha},$$

$$Ra = \frac{g\beta(T_h - T_c)H^3}{\nu^2} Pr$$

u は x 方向の流速、 v は y 方向の流速、 g は重力加速度、また、流体の物性値として、 α は温度伝導率、 β は体積膨張係数、 ν は動粘性係数を表している。

式(3)～(6)において、加熱・冷却壁近傍で急激な温度変化が予測されるので、 X 方向についてのみかのような座標変換を行う。

$$\xi = 56 \left(\frac{H}{L} X - \frac{1}{2} \right)^7 + \frac{1}{8} \left(\frac{H}{L} X - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \quad \dots\dots\dots (7)$$

式(7)を用いて式(3)～(6)は次のように変換される。

$$\frac{\partial \Omega}{\partial F_0} + Pr \left\{ U \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dX} \right) + V \frac{\partial \Omega}{\partial Y} \right\} \\ = Ra \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dX} + Pr \left\{ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi^2} \left(\frac{d\xi}{dX} \right)^2 \right. \\ \left. + \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{d^2 \xi}{dX^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$Pr \left\{ U \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dX} \right) + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right\} \\ = \left\{ \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \left(\frac{d\xi}{dX} \right)^2 + \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{d^2 \xi}{dX^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\Omega = - \left\{ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} \left(\frac{d\xi}{dX} \right)^2 + \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \frac{d^2 \xi}{dX^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} \right\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$V = -\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dX}, U = \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \quad \dots\dots\dots (11)$$

式(9)において、少ない計算回数で定常解が求められるように $\partial \theta / \partial F_0$ の項が落としてある。式(11)における非定常項 $\partial \Omega / \partial F_0$ は解を収束させるために残されている。式(3)～(6)に対する境界条件は、壁面で流速零、加熱壁上で T_h 、冷却壁上で T_c 。また、式(10)の、上下フィン上における無次元化された境界条件は、フィンのエネルギーバランスより次式のように表される。

$$F \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \left(\frac{\partial \theta}{\partial Y} \Big|_{Y=0} - \frac{\partial \theta}{\partial Y} \Big|_{Y=H} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここで F は、フィンの特性値であり、高さ H とフィン厚さ S の比と、流体とフィンの熱伝導率 λ, λ_f の比の積の形で表され、

$$F = \lambda_f S / (\lambda H)$$

となる。これらの条件を変換後の座標系で表したものが表 1 である。以上より無次元パラメータは、レイレー数 Ra 、プラントル数 Pr 、フィン特性値 F 、アスペクト比 L/H の 4 種となる。式(8)～(11)に対して、差分を用いて数値解析を行った。式(8)の時間微分には

後退差分を用い、一次微分の項には風上差分を用いた。連立方程式はガウス・ザイデルの繰返し法により解いた。計算は、 $Pr=5.68$ の時に対し $Ra=10^5 \sim 10^7$, $F=0.5 \sim 50$, $L/H=0.5 \sim 10.0$ で、また、 $Pr=0.71$ の時に対し $Ra=10^5 \sim 10^7$, $F=0.5, 50$, $L/H=0.5, 10.0$ の範囲で行った。ヌセルト数の計算には、高さ H を代表長さを選び、温度差を $T_h - T_c$ とした。加熱壁上の局所ヌセルト数 N_u および平均ヌセルト数 $\overline{N_u}$ は次式によって計算する。

$$N_u = \frac{hH}{\lambda} = -\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \bigg|_{\xi=0} \frac{d\xi}{dX} \bigg|_{x=0} \dots\dots\dots (13)$$

$$\overline{N_u} = \frac{\overline{h}H}{\lambda} = -\int_0^1 \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \bigg|_{\xi=0} \frac{d\xi}{dX} \bigg|_{x=0} dY \dots\dots\dots (14)$$

同様にフィン上の局所ヌセルト数 N_{uf} および、平均ヌセルト数 $\overline{N_{uf}}$ を次式によって定義し、計算する。

$$N_{uf} = -\frac{\partial \theta}{\partial Y} \bigg|_{Y=0} \dots\dots\dots (15)$$

$$\overline{N_{uf}} = -\frac{H}{L} \int_0^1 \frac{\partial \theta}{\partial Y} \bigg|_{Y=0} \frac{dX}{d\xi} d\xi \dots\dots\dots (16)$$

式(15)、(16)はフィンから上部の流体への熱伝達率を表しており、フィンから下部の流体への局所熱伝達率は式(15)の N_{uf} を $X=L/(2H)$ の点で点対称にした値となる。

加熱壁から流体、フィンへの熱移動量を表すために Q , Q_f , Q_i , Q_c の以下の4種の熱移動量を定義する。これらの熱量を $\lambda(T_h - T_c)$ で割って無次元化した。 Q は加熱壁から流体への熱移動量で、平均ヌセルト数より計算され、

$$\frac{Q}{\lambda(T_h - T_c)} = \overline{N_u} \dots\dots\dots (17)$$

で表される。 Q_f は加熱壁からフィンへの移動熱量で、フィン根元の温度勾配より計算され、

$$\frac{Q_f}{\lambda(T_h - T_c)} = FN_u \bigg|_{Y=0} \dots\dots\dots (18)$$

で表される。 Q_i は加熱壁から流体およびフィンに対する総熱移動量で

$$Q_i = Q + Q_f \dots\dots\dots (19)$$

で表される。また、 Q_c は熱移動が伝導によってのみ起

ると仮定した時の加熱壁から流体およびフィンへの総熱移動量で

$$\frac{Q_c}{\lambda(T_h - T_c)} = \frac{H}{L}(1+F) \dots\dots\dots (20)$$

で表す。比 Q_f/Q_i , Q_i/Q_c はそれぞれ総伝熱量に対するフィンへの伝熱量、伝導による伝熱量に対する総伝熱量の割合を表す。

3. 実験

図2が実験装置である。対流槽は連続性を持たせるために3室設け、中央の室において測定した。1室当たりの寸法は、高さ $H=15$ mm, 幅 $L=45$ mm, 奥行 $D=62$ mm とした。フィンには厚さ 0.2 mm の真鍮板[熱伝導率 $\lambda_f=116$ W/(m°C)]を、加熱・冷却壁には銅板を用い、加熱壁裏面には電気ヒータを、冷却壁裏面には冷水を流す構造とした。温度測定は、加熱・冷却壁面の $H/2$ の高さに接着した $\phi 0.2$ mm の C-C 熱電対により行った。対流槽に純水を入れ、常温付近で $T_h - T_c$ を 1°C 前後に保ちマッハツェンダ干渉計を用いて等温線を写真撮影することにより温度分布を求めた。伝熱量は、等温線から求めた壁面上の温度こう配と水の熱伝導率から局所ヌセルト数分布を求めた。

4. 実験および解析結果の検討

差分を用いた数値解析において、計算時間と計算精度の点から分割数の選定が重要である。図3に例として $Ra=10^6$, $L/H=2.0$, $F=5.0$ の時の平均ヌセルト数 $\overline{N_u}$ と分割数の関係を示す。ここでは ξ 方向と Y 方向を同じ分割数とした。41×41 分割の結果は 31×31 分割の結果に比べて差が約 0.8% と小さいので、以下本研究においては 41×41 分割を用いた。

図4は、干渉計により撮影した等温線である。また、図5は実験と等しい条件で行った数値解析による等温線と流線の結果である。図6にこの時の加熱壁上の局所ヌセルト数分布の解析結果と実験結果を示す。図4～6において実験結果と解析結果はよく一致している。

表1 境界条件

Boundary	θ	Ψ, U, V	Q
$X=0$	1	0	$-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2}$
$X=L/H$	0		
$Y=0, 1$	$F \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2}$ $+ \left(\frac{\partial \theta}{\partial Y} \bigg _{Y=0} - \frac{\partial \theta}{\partial Y} \bigg _{Y=1} \right) = 0$		$-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2}$

図7は、 $F=5.0$, $L/H=2.0$, $Pr=5.68$ の時の $Ra=10^6, 10^7, 10^8$ に対する下部フィン上局所ヌセルト数分布の解析結果である。図7が示すようにレーレー数が大きくなるとフィン上の冷却壁近くで伝熱量が負になる領域がある。すなわち、この領域では上下の流体からフィンに熱が流れ込むことを示している。また、この時加熱壁近傍ではフィンより上下の流体に熱が流れ、その他のフィン中央部では下側の流体から上側の流体に熱が流れていることを表す。

図8は、加熱壁上平均ヌセルト数のレーレー数による変化を、アスペクト比・フィンの特性値・プラントル数をパラメータとして表したものである。また、図中には文献(5)による実験値・解析値が加えてある。実験値は、レーレー数が 10^6 以下において本研究の解析値とほぼ一致しているが、解析結果には相違がある。

1: 加熱壁銅板 2: 絶縁板 3: 熱電対
4: 電気ヒータ 5: 断熱材 6: 真鍮製フィン
7: 冷却壁銅板

図2 実験装置

図3 分割数による平均ヌセルト数の変化

これは、文献(5)の解析では分割数が 10×10 と少ないためにレーレー数が大きい範囲において誤差が生じたためと考えられる。フィン特性値 F を $0.5 \sim 50$ の範囲で変えて計算を行ったが、ヌセルト数はすべて1本の線上にのり、アスペクト比2.0の時フィン特性値の影響はほとんどないことがわかる。また、プラントル数0.71の時のヌセルト数がアスペクト比0.5, 10.0

図4 マッハツェンダ干渉計による等温線

図5 解析による等温線および流線

図6 加熱壁上局所ヌセルト数分布

に対して示してあるが、プラントル数の変化によるヌセルト数の変化は小さく、特に L/H が小さい時は差がほとんどない。

図9は、加熱壁からフィンへの無次元伝熱量 $Q_f/\{\lambda(T_h - T_c)\}$ のアスペクト比、フィンの特性値による変化を表したものである。 $Q_f/\{\lambda(T_h - T_c)\}$ はフィン特性値にほぼ比例して増加し、アスペクト比に逆比例して減少しているが、一方レーレー数による変化は小さい。また、図8、9よりアスペクト比の変化は、平均ヌセルト数 Nu よりもフィンへの伝熱量に大きな影響を与えることがわかる。

図10はフィン上平均ヌセルト数のアスペクト比による変化をレーレー数、フィン特性値をパラメータとして表したものである。フィン上ヌセルト数は、レーレー数が増加すると増加し、アスペクト比が増加すると減少するが、アスペクト比の大きい所ではレーレー数によるフィン上ヌセルト数の差は少なくなる。レーレー数 10^6 で、フィン特性値を0.5~50の範囲で変えた時のフィン上平均ヌセルト数変化が示してあるが、加熱壁上ヌセルト数と同様にフィン上平均ヌセルト数に対してもフィン特性値の影響はほとんどない。これは、 $Ra=10^7$, $L/H=2.0$ で F が0.5と50の時のフィン上の温度分布の差が $T_h - T_c$ に対し最大10%しか

生じなかったことによる。

図11は、移動熱量割合 Q_f/Q_t , Q_c/Q_c のレーレー数による変化をアスペクト比をパラメータとして示したものである。レーレー数の増加に伴い Q_f/Q_t が減少、 Q_c/Q_c が増加しているが、この結果はレーレー数が増加するとヌセルト数が増加する一方、フィンへの伝熱量があまり変化しないことによるものである。レーレー数、アスペクト比のともに大きい範囲 ($Ra > 10^6$, $L/H > 0.5$) においては、フィンへの伝熱量は全体の約1割以下になる。また、 $L/H < 1.0$ の時 Q_f/Q_t , Q_c/Q_c はあまりレーレー数の影響を受けない。

図12は、熱移動割合 Q_f/Q_t , Q_c/Q_c のフィン特性値による変化をレーレー数と L/H をパラメータとして示したものである。フィン特性値が大きくなると Q_f/Q_t , Q_c/Q_c はともに漸近的に1.0に近づき、伝熱の大部分がフィンに基づくようになることがわかる。この結果は、図8で示したように加熱壁上平均ヌセルト数のフィン特性値による変化が小さいこと、図9で示したように F の増加により $Q_f/\{\lambda(T_h - T_c)\}$ が増

図7 下部フィン上面局所ヌセルト数分布

図8 レーレー数による加熱壁上平均ヌセルト数変化 (文献(5)は、 $L/H=1$, $Pr=0.72$, 上下面温度は線形)

図9 加熱壁からフィンへの無次元伝熱量変化

図10 フィン上平均ヌセルト数のアスペクト比による変化

図 11 伝熱量比のレイレー数による変化

加すること、一方、式(20)より Q_c は F とともに増加することなどから生じている。

5. 結 論

垂直加熱・冷却壁および水平フィンによって囲まれた矩形容器内における自然対流熱伝達問題について、実験および解析により以下の結論を得た。

- (1) 加熱壁上ヌセルト数、フィン上ヌセルト数に対しフィン特性値、プラントル数はほとんど影響がなくアスペクト比、レイレー数によって支配される。
- (2) フィンに対する加熱壁からの伝熱量は、およそアスペクト比に反比例し、フィンの特性値に比例するがレイレー数により大きな影響をうけない。

図 12 伝熱量比のフィン特性値による変化

- (3) 加熱壁面上およびフィン上の平均ヌセルト数がレイレー数に大きく支配されるのに対し、加熱壁から流体およびフィンへの伝熱の割合はアスペクト比とフィン特性値によって支配され、レイレー数により受ける影響は小さい。

文 献

- (1) G. de. Valh. Davis, *Int. J. Heat Mass Transf.* 11 (1968), 1675.
- (2) Meyer, B. A., ほか 2 名, *Trans. ASME, J. Heat Transfer*, 101 (1979), 655.
- (3) Smart, D. R., ほか 2 名, *Trans. ASME, J. Heat Transfer*, 102 (1980), 75.
- (4) Meyer, B. A., ほか 2 名, *Trans. ASME, J. Heat Transfer*, 104 (1982), 111.
- (5) 中村, 浅古, 機論, 46-403 (昭 55), 471.
- (6) 関, 他 2 名, 機論, 48-426 (昭 57), 300.