軌跡判定法と二重管内流体の振動特性根*

鷲尾 誠一**, 小西 忠孝**

Locus Method and Mode Calculation for Fluid Vibration in a Double Pipe

by Seiichi WASHIO and Tadataka KONISHI

A new computational technique to find zeroes and poles of complex functions has been developed. The idea is based upon the Cauchy's theorem: when the complex variable z describes an entire contour of a specified domain, the resultant locus of a complex function $F(z)$ helps reveal number of its zeroes and poles within the domain. The procedure of the 'locus' method is demonstrated with use of a spherical Bessel function of the second kind as an example. The method is also applied with success to detecting mode eigenvalues for viscous harmonic waves in a double pipe. Similarly to the Scarton's results for a single pipe, two different families of eigenvalues are evidently observed.

Key Words: Fluid Vibration, Mode Calculation, Eigenvalue, Harmonic Wave, Double Pipe, Complex Function, Zeroes and Poles

1. 緒 言

円管の中で振動する圧縮性流体の運動は、通常平面波動と考えて解析される。しかし周波数や管径が大きい場合、あるいは断面形状が変化する場所などではこの仮定が成り立たなくなり、半径方向への波動伝播をも考慮した解析が必要となる。こうした非平面波振動問題に関連して、各振動モードの減衰、位相速度、群速度といった特性を論ずるうえで、振動特性根を求めることが重要であり、これまでに剛体管⁽¹⁾⁽²⁾および弾性管⁽³⁾の場合について、流体の粘性をも考慮した計算例が報告されている。

一方振動解析において特性根を求めようとすれば、一般に特性方程式を解く作業が不可避となる。多くの場合それには数値計算手段が必要とされるが、対象が代数方程式であれば少なからず提唱されているそうした方法⁽⁴⁾⁽⁵⁾も、特殊関数を含むなど更に複雑な方程式に対しては、必ずしも有効でないのが実情である。

本論文は、まず軌跡判定法と呼ぶ、複素関数の零点および極の数値計算法を示し、球ベッセル関数の根の

計算を例にとって、その原理と用法を説明する。この方法は、著者らが油圧管内のピストン前面での振動波動を論ずる過程で、コーシーの定理にヒントを得て行った方程式の複素根計算の試み⁽⁶⁾より生れたものであり、以来テストと改良を重ねた結果、その有用性が明らかとなったので、今回その詳細を述べ大方の参考に供したい。次に、この軌跡判定法を使って、これまでに知られていない同心二重管内圧縮性流体の高モード振動特性根のいくつかを計算し、その周波数特性、物理的意味、粘性の影響などについて検討する。

2. 軌 跡 判 定 法

2.1 原理 複素変数 z の関数 $F(z)$ が、自身と交わらない z 平面上の閉曲線 l の内部で、有限個の極を除いて正則であれば、留数定理により次の関係が与えられる。

$$\frac{1}{2\pi j} \int_l \frac{F'(z)}{F(z)} dz = N_z - N_p \dots \dots \dots (1)$$

ここで N_z , N_p はそれぞれ領域 l の内部にある $F(z)$ の零点および極の個数であり、 j は虚数単位 $\sqrt{-1}$ を表す。

左辺の被積分関数の原始関数は $\log F(z)$ であるから、式(1)の左辺の値は、 z を l 上で反時計(正)方向

* 昭和61年4月1日 第63期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和60年5月17日。

** 正員、岡山大学工学部 (〒700 岡山市津島中3-1-1)。

に一周させた時の $F(z)$ の偏角の増加を 2π で割ったものに等しい。このことは、 z 平面上の任意の閉領域について、 z がその周上を正方向に一周した時の $F(z)$ の軌跡が、原点のまわりをいずれの方向に何回まわるかを見ることで、内部にある $F(z)$ の零点と極の個数の差を知ることができることを意味する。したがって、 z 平面を多くの小領域に区分し、それぞれについてこの判定を行えば、 $F(z)$ の零点および極を見つけることができるはずである。しかしそうしたやり方は無駄が多いので、実際には以下の例で述べるような方法をとる。

2.2 球ベッセル関数の根 次にこの方法を、二次の第2種球ベッセル関数

$$n_2(z) = (-1)^3 \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{-5/2}(z)$$

$$= -\frac{1}{z^3} \{(3-z^2)\cos z + 3z \sin z\} \quad \dots\dots (2)$$

図1 z 平面上の判定円領域と境界

の根の計算を例にとって、具体的に説明する。第2種球ベッセル関数は、有限個の複素数根と無限個の実数根をもつことが知られている⁽⁸⁾。いま便宜上 $n_2(z)$ を

$$F(z) = z^3 n_2(z) / \cos z$$

$$= z^2 - 3z \tan z - 3 \quad \dots\dots\dots (3)$$

のように書き換え、 $F(z)$ について軌跡判定の手順をたどってみる。

まず最初は、閉曲線 l として原点を中心とした半径 R の円 $z = Re^{j\theta}$ をとる。その時 $F(z)$ が偶関数であれば、 z が円周上を一周すると $F(z)$ の軌跡は同じ図形を二度描くことになる。したがって式(3)のように $F(z)$ が偶関数の場合は、 z を $\theta = -\pi/2$ から $\pi/2$ まで半周だけ動かして $F(z)$ の軌跡を調べる(図1)。

何種類かの R を選んで、こうして描いた $F(z)$ の軌跡の例を図2に示す。軌跡はいずれも、 $|F(z)|$ の最大長さが同じになるように描いてあり、矢印がその移動方向を示す。いま $F(z)$ の極は、 $\cos z = 0$ の根、すなわち $z = \pm(2k+1)\pi/2$ ($k=0, 1, 2, \dots$) と既知であるから、図2の軌跡が原点のまわりをいずれの方向に何回まわるかを見ることで、各半径 R の右半円内にある零点と極の個数は、次のように判定される(実際の零点と極の個数はこの2倍となる)。

$$R=1.0 \quad N_p=0 \quad N_z=0$$

$$R=1.7 \quad N_p=1 \quad N_z=0$$

$$R=3.0 \quad N_p=1 \quad N_z=2$$

$$R=6.0 \quad N_p=2 \quad N_z=3$$

$$R=9.0 \quad N_p=3 \quad N_z=5$$

図2 z が円 $Re^{j\theta}$ を半周した時の $F(z)$ の軌跡

$$R=9.0 \quad N_p=3 \quad N_z=4$$

次に、隣り合う同心円の間で、同様の判定作業を実数関数の場合の二分法のように繰返せば、零点をはさむ間隔の狭い二つの円の半径 R_1, R_2 を、例えば次のように見いだすことができる。

$$R_1=1.9, R_2=2.1 \quad N_z=2$$

$$R_1=3.8, R_2=4.1 \quad N_z=1$$

$$R_1=7.3, R_2=7.6 \quad N_z=1$$

更に、知られた数だけの零点を含むこうした狭い円環領域を、円周方向に半径で等分割して得られる図3に示すような扇形小領域のそれぞれについて、その中の零点の有無を、 z が領域の周囲を正方向に一巡した時の $F(z)$ の軌跡より判定する。参考のために、そうした軌跡の一例を図4に示しておく。図4の左側の例では、軌跡が原点のまわりを正方向に1回まわっており、扇形領域内に一つの零点が存在することを示している。それに隣り合う扇形領域の場合の右側の例では、軌跡はその内部に原点を含まず、零点をもたないことを示している。なお実際の手順では、円環領域を最初あらか分割し、零点の存在が判明した領域を再び細かく分割して、零点の小さい近傍を得ている。

以上の手続を経て、零点の近傍である扇形領域を見いだしたならば、その領域を半径方向と円周方向に格子分割し、最小の $|F(z)|$ を与える格子点の z を初期値として、ニュートン・ラフソン法

$$z_2 = z_1 - \frac{F(z_1)}{F'(z_1)} \quad \dots\dots\dots (4)$$

を使って、零点の値の精度を高める。ただ、このニュートン法は、零点近傍での関数の性質によっては収束しない場合がある。その時、もしくは微分形 $F'(z)$ の計算が難しい場合には、探索法と呼ぶ次の手順に頼る。

すなわち、まず上述のニュートン法と同じ初期値 z_0 を中心とした半径 ΔR の円周上を等分割（例えば5°おき）し、各分割点の中で最小の $|F(z)|$ を与える点 z_1 を見いだす。 ΔR は通常初期値を決めた時の格子間隔

にとる。もし $|F(z_0)| < |F(z_1)|$ であれば、 $\Delta R \rightarrow \Delta R/2$ としてこの操作を繰返す。また $|F(z_0)| > |F(z_1)|$ であれば、今度は z_1 を中心として同じ操作を行う。この過程を繰返して $z_0, z_1, z_2, \dots$ と求めていき、それに伴って半減していく ΔR が、 $\Delta R/|z_i| < \varepsilon$ （例えば $\varepsilon=10^{-6}$ ）となった所で、その z_i を求める零点とする。この探索法は、ニュートン法に比べて時間がかかるが、目指した零点の値を $F(z)$ の計算精度に応じた有効けた数の範囲で求めることができる。

以上は零点の精度を上げる場合を述べたが、極を対象とする場合には、 $1/F(z)$ の零点について同様な方法を適用すればよい。また便宜上図2や図4のように、 $F(z)$ の軌跡を描いて説明したが、実際には $F(z)$ の偏角の推移を追うだけで軌跡が原点のまわりを何回まわることが判断できるから、Scarton らの Eigenvalley 法⁽²⁾と違って、図を描く作業は必要としない。著者らは、以上の手順をすべてプログラム化し、 $F(z), F'(z)$ の関数名を引数として手渡すだけで根が求められるサブルーチンとして提出している⁽⁹⁾。

式(3)およびその微分形の関数値を、単精度複素計算で与えて軌跡判定法を適用した際の、初期値ならびに零点の最終収束値を、それらに対する関数値とともに表1に掲げておく。表1には z 平面の右半分にある零点だけを、絶対値の小さいほうから順に8個示してあるが、 $n=3$ 以上の根は明らかに実数値ばかりである。 R を大きくし、 n を増しても実数根しか現れず、 $n_2(z)$ の複素数根は共役となる $n=1$ および2の2根だけと推測される。

3. 二重管内圧縮性流体の振動特性根

粘性を無視すると、二重管内圧縮性流体の音響学的波動は、線形化したオイラーの運動方程式、連続の式、および状態方程式によって表される。

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p \quad \dots\dots\dots (5)$$

図3 二つの円と二つの半径ではさまれた扇形小領域

図4 z が扇形小領域の周上を一巡した時の $F(z)$ の軌跡

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (6)$$

$$dp = K \frac{d\rho}{\rho} \quad (7)$$

ここに $\mathbf{V}$ は流速ベクトル, p は圧力, ρ は密度, K は体積弾性係数である。これらの基礎式をラプラス変換して解き, 二重管の管壁で半径方向流速が零となる境界条件を適用すれば, 結局特性根を求めるための方程式として次のものを得る。

$$J_1(z_a)N_1(mz_a) - J_1(mz_a)N_1(z_a) = 0 \quad (8)$$

ただし

$$m = r_1/r_2 \quad (9)$$

であり, r_1, r_2 は二重管の内・外半径, また $J_1(z)$, $N_1(z)$ はそれぞれ一次の第1種および第2種ベッセル

関数である。さらに特性根 z_r は, 式(8)の z_a によ
り次の関係で与えられる。

$$z_r^2 = \frac{s^2 r_2^2}{c^2} + z_a^2 \quad (10)$$

ただし s はラプラス演算子, c は音速 $\sqrt{K/\rho}$ を表す。

軌跡判定法を式(8)に適用してみると, z_a 平面上の原点を中心といかなる半径の円をとっても, その中に在る零点は常に実軸上に乗ることが知られ, 式(8)が実根しかもたないことが推測される。実数 z_a についてニュートン法で求めた式(8)の根の若干を, 表2に掲げておく。

一方粘性を考慮すれば, 二重管内圧縮性流体の音響学的波動は, 線形化した N - S 方程式

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\nabla p + \mu \left\{ \frac{4}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) \right\} \quad (11)$$

および連続の式(6), 状態方程式(7)によって表される。ここで μ は粘性係数である。これらの式を, 軸対称性の仮定のもとにラプラス変換して解けば, 次の結果が得られる。

$$P = -\frac{\rho c^2 s}{c^2 + (4/3)\nu s} \{A_1 I_0(\beta r) + B_1 K_0(\beta r)\} (e^{-\gamma x} + H e^{\gamma x}) \quad (12)$$

$$U = [-\gamma \{A_1 I_0(\beta r) + B_1 K_0(\beta r)\} + \delta \{A_2 I_0(\delta r) - B_2 K_0(\delta r)\}] (e^{-\gamma x} - H e^{\gamma x}) \quad (13)$$

$$V = [\beta \{A_1 I_1(\beta r) - B_1 K_1(\beta r)\} + \gamma \{A_2 I_1(\delta r) + B_2 K_1(\delta r)\}] (e^{-\gamma x} + H e^{\gamma x}) \quad (14)$$

$$\beta^2 = \frac{s^2}{c^2 + (4/3)\nu s} - \gamma^2, \delta^2 = \frac{s}{\nu} - \gamma^2, \nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (15)$$

ここで P, U, V は, それぞれ圧力, 軸方向流速, 半径方向流速のラプラス変換形であり, γ は伝ばオペレータ, x, r は軸方向および半径方向座標, $I_n(z), K_n(z)$ はそれぞれ n 次の変形された第1種および第2種ベッセル関数を表す。

振動波動に対しては $s = j\omega$ (ω : 振動角周波数) と置き, 式(13), (14)に境界条件 $U = V = 0$ at $r = r_1, r_2$ を適用して得られる定数 A_1, B_1, A_2, B_2 に関する連立一次方程式の係数行列式をとれば, 結局伝ばオペレータ γ に対する振動特性方程式は次のように与えられる。

$$F(z_r) = \begin{vmatrix} z_r I_0(z_\beta) & z_r K_0(z_\beta) & -z_\beta I_0(z_\beta) & z_\beta K_0(z_\beta) \\ z_\beta I_1(z_\beta) & -z_\beta K_1(z_\beta) & z_r I_1(z_\beta) & z_r K_1(z_\beta) \\ z_r I_0(mz_\beta) & z_r K_0(mz_\beta) & -z_\beta I_0(mz_\beta) & z_\beta K_0(mz_\beta) \\ z_\beta I_1(mz_\beta) & -z_\beta K_1(mz_\beta) & z_r I_1(mz_\beta) & z_r K_1(mz_\beta) \end{vmatrix} = 0 \quad (16)$$

表1 軌跡判定法による $n_2(z)$ の根計算における初期値と収束値

No.	初 期 値				収 束 値					
	Z ₀ =	X ₀	+	jY ₀	F(Z ₀)	Z=	X	+	jY	F(Z)
1	9.373518E-1	1.702271E+0			1.21E-3	9.381952E-1	1.702803E+0			6.43E-8
2	9.376913E-1	-1.702083E+0			1.07E-3	9.381952E-1	-1.702803E+0			6.30E-8
3	3.958886E+0	-2.714816E-3			3.93E-2	3.959528E+0	-3.874565E-9			6.95E-7
4	7.452258E+0	-5.110405E-3			2.77E-1	7.451610E+0	-6.090545E-9			8.34E-7
5	1.070597E+1	-7.341647E-3			1.36E+0	1.071565E+1	6.093615E-10			3.62E-5
6	1.391848E+1	-9.544633E-3			1.92E+0	1.392169E+1	-6.936148E-9			3.10E-5
7	1.710914E+1	-1.173264E-2			3.76E+0	1.710336E+1	-4.190973E-9			2.89E-5
8	2.026977E+1	-1.390005E-2			5.71E+0	2.027237E+1	9.274572E-9			9.96E-5

表2 方程式(8)の根 ($m=0.5$)

No.	z_a
1	6.3931567E+0
2	1.2624699E+1
3	1.8888929E+1
4	2.5162405E+1
5	3.1439708E+1
6	3.7718953E+1
7	4.3999316E+1
8	5.0280380E+1

$$z_7 = \gamma r_2, z_8 = \beta r_2, z_9 = \delta r_2 \dots\dots\dots (17)$$

式(16)の行列式は多価関数 $K_n(z)$ を含むが、 $F(z_7)$ 自体は一価関数となる。そこで $F(z_7)$ の値を $e^{-z} I_n(z)$, $e^z K_n(z)$ の関数サブルーチン⁽⁷⁾ を使って計算し、無次元パラメータ

$$Q_m = (r_2 - r_1) \omega / c = 0.02$$

$$\eta_m = (r_2 - r_1) c / \nu = 100$$

$$m = 0.5$$

の場合について、式(16)の特性根のいくつかを軌跡判定法を使って求めてみたところ、表3の結果を得た。

次に特性根の周波数特性を見るために、表3の値から出発して Q_m を微増させるごとにニュートン法で z_{rn} を求めていく。横軸に無次元周波数 Q_m をとり、縦軸に特性根 z_{rn} の実部または虚部の絶対値を対数でとって、その結果を描けば、図5のようになる。図5中実線および破線がその結果を示し、特に後者は値が負であることを表す。また点線は、非粘性の場合の式(10)により与えられる特性根 z_{rn} を示し、一点鎖線は二重管内平面波の伝ばオパレータ⁽⁷⁾

$$jQ_m G_i \{ \sqrt{jQ_m \eta_m} / (1-m), m \} / (1-m)$$

を示す。

図5を見れば、単一管において Scarton ら⁽²⁾ が見だしたのと同様に、二重管の特性根においても A 群 ($n=2, 4, 6$) と B 群 ($n=3, 5, 7$) の二つの異なるグル

ープが存在する。ただ Scarton らの BO モードに相当する特性根が見られないが、これはそもそも Scarton らの BO モードが特性方程式の見掛けの根であって、境界条件を真に満たすものではないゆえ、当然の結果である。位相速度に対応する図5(b)からは、B 群モードがすべて前進的 ($\text{Im}(z_{rn}) > 0$) であるのに対し、A 群モードは低周波数では後退的 ($\text{Im}(z_{rn}) < 0$)、カットオフ周波数より上では前進的となることが知られる。

基本モード ($n=1$) と平面波モードは、その位相速度についてはほぼ一致し、いずれも非粘性基本モードに近い値をとるが〔図5(b)〕、減衰特性については、 Q_m の小さい所を除き前者は後者より大きくなる〔図

表3 二重管内圧縮性粘性流体の振動特性根 ($Q_m=0.02$, $\eta_m=100$, $m=0.5$)

No.	$Z_Y =$	X_Y	$+ jY_Y$
1	6.2451E-2		7.6304E-2
2	8.3923E+0		-4.2843E+0
3	8.5881E+0		4.6535E+0
4	1.4993E+1		-5.4041E+0
5	1.5081E+1		5.6386E+0
6	2.1430E+1		-6.1105E+0
7	2.1482E+1		6.2826E+0

(a)

(b)

図5 二重管内圧縮性粘性流体の振動特性根の周波数特性

5(a)). その理由は、平面波解析では無視された軸方向速度こう配に基づく粘性損失の影響が、 Q_m の増大とともに大きくなるためと考えられる。

管内圧縮性流体の振動は、非粘性の場合渦なし流れとなるのに対して、粘性を考慮するとその作用によって渦運動が発生する。したがって粘性を考えた場合にのみ見られるB群モードは、渦に起因して現れる特性根であると言える。

4. 結 言

コーシーの定理にヒントを得た、軌跡判定法と呼ぶ複素関数の零点および極の数値計算法を提出した。この方法は、関数値が計算できるかぎり、孤立した極を除いて正則で一価のいかなる一変数関数にも適用できるもので、これまでに困難とされていた関数の根計算にも道を開くと思われる。ここでは軌跡判定法を使っ

て、これまで求められていなかった二重管内圧縮性流体の音響学的振動特性を見いだすことに成功し、その高モード特性を知ることができた。

文 献

- (1) Gealach, C. R. and Parker, J. D., *Trans. ASME*, Ser. D, 89-4 (1967), 782.
- (2) Scarton, H. A. and Rouleau, W. T., *J. Fluid Mech.*, 58-Pt 3 (1973), 595.
- (3) DeArmond, R. P. and Rouleau, W. T., *Trans. ASME*, Ser. D, 94-4 (1972), 811.
- (4) 伊理, 数値計算法, 基礎の数学 12 (昭58), 105, 朝倉書店.
- (5) Muller, D. E., *Math. Tables Other Aides Comp.*, 10 (1956), 208.
- (6) 鷺尾・小西, 機論, 43-376 (昭52), 4574.
- (7) 鷺尾・小西, 機論, 50-459, B (昭59), 2569.
- (8) 森口・ほか2名, 数学公式集, 3 (昭40), 151, 岩波書店.
- (9) 鷺尾・小西, 岡山大学情報処理センター研究開発室報告集, 2-3 (1986-3), 1.