非圧縮粘性流体のいくつかの差分解析法*

竹 光 信 正**

Some Finite-Difference Methods to Solve Incompressible Fluid Flow

by Nobumasa TAKEMITSU

Some finite-difference methods, which use primitive variables, are proposed to solve incompressible fluid flow. Especially, two methods are developed: one is to calculate the accurate pressure field immediately after the fluid starts to flow (two-step method); the other allows a larger time-step than the corresponding explicit method (non-iterative implicit method). As a numerical example, the two-dimensional transient Womersley flow is calculated. It is shown that the two-step method can calculate the accurate flow field from the instance when the fluid starts to flow, and the non-iterative implicit method requires less amounts of computer time compared with the explicit method.

Key Words: Incompressible Flow, Numerical Analysis, Crank-Nicolson Method, Two-Step Method, Non-Iterative Implicit Method, Unsteady Flow

1. 緒 言

よく知られているように、非圧縮粘性流れの運動方程式〔ナビエ・ストークス (NS) 方程式〕を数値的に解く際の最も重要な問題は、連続の方程式をどのようにして満足させるかということである⁽¹⁾⁽²⁾。これまで、この問題を克服するために種々の方法が考案されている⁽³⁾。

いま、とくに二次元非定常流の場合に限って論じると、速度と圧力を使った方法は、一般に流れ関数とうず度を使った方法に比べると、各時間ステップで極めて多くの反復が必要である。しかも、速度と圧力を使った方法により計算された圧力の方は、一般に流れの計算開始後、数十ステップたっても正しく計算されないのが普通である⁽⁴⁾。これは、連続の方程式が厳密に満足されないためである。しかし、連続の方程式を厳密に満足する流れ関数とうず度を使った方法でも、流れの計算開始直後では、圧力は正しく計算されない⁽⁵⁾。また、時間が十分たった後でも、計算された圧力のゆらぎは、速度のゆらぎに比較して一般に大き

い。

このように、非圧縮粘性流体の非定常数値解析においては、圧力も含めて流れの場を簡単な方法で正しく計算することは容易ではない。

また、応用上、工学上の観点からは、最初の数ステップないしは数十ステップの精度を多少犠牲にしても、大きな時間刻みのとれる方法も重要であり、最近の解説⁽⁶⁾でも問題として取り上げられている。

前報⁽⁵⁾において、著者は静止から徐々に流れが生じる場合を主たる対象として、これらの問題を扱った。とくに、前報においては、連続の方程式を満足させるための著者の方法をCrank-Nicolson法に適用することに重点をおいた。これは、陰解法を使うと大きな時間刻みがとれるということのほか、流れの中の信号が無限大の伝播速度をもつという利点のためである。しかし、前報の計算の範囲内では、前進差分法に比べて大きな時間刻みをとることはできたが、圧力の計算について精度のよい結果は得られなかった。

こうした事情にかんがみ、本論文では速度と圧力を使った非圧縮粘性流れの非定常差分解析法について、流れの計算開始直後でも圧力も含めて流れの場を正確に計算できる方法、および前進差分法に比べて時間刻みの大きくとれる方法を提案する。ただし、連続の方

* 昭和61年4月2日 第63期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和60年3月19日。

** 正員、東京電機大学工学部 (〒101 東京都千代田区神田綿町2-2)。

程式を満足させるための方法は、著者の方法⁽⁴⁾⁽⁵⁾を使うことにする。これは、NS 方程式の数値解析を行う場合、計算時間の大部分が反復計算に使われるため、収束の速い方法を使ったほうが得策だからである。著者の方法と他の方法（流れ関数とうず度を使った方法、MAC 法、SMAC 法、SOLA 法）との比較については、他の論文⁽⁴⁾⁽⁷⁾で論じているので、ここではふれない。

なお、本論文においても、三次元流への適用可能性を考慮し、一般性の高い方法の確立をめざすことにする。

2. 厳密な差分解析の挙動

圧力の場合も含めて流れの場が正しく計算されているかどうかを知るには、厳密解のある流れの場について調べるのが適切である。したがって、本論文においても、まず厳密な差分解析の挙動について論じる。ただし、本論文では二次元非定常 Womersley 流のみを対象とする。

さて、この場合、無次元化された NS 方程式は、 x 、 y 直交座標系で

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + A \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad A = \frac{2\pi}{\alpha^2} \quad (1)$$

とかける。ここで、 u は x 方向の速度成分、 t は時間、 p は圧力である。また、 α はウォーマースレイ数で $\alpha = L\sqrt{\Omega/\nu}$ (L : 流れの場の代表長さ、 Ω : 角振動数) で定義される。この流れでは、 y 方向の速度成分 v は $v=0$ である。式(1)の回転をとると、うず度輸送方程式

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = A \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \quad (2)$$

$$\omega = -(\partial^2 \psi / \partial y^2), \quad u = \partial \psi / \partial y \quad (3)$$

が得られる。ただし、 ω はうず度で ψ は流れ関数である。

この流れの初期条件と境界条件として、

$$t < 0;$$

$$\text{いたるところで } u = \psi = \omega = 0 \quad (4\cdot a)$$

$$t > 0;$$

$$y=0 \text{ で } \psi = \omega = 0 \quad (4\cdot b)$$

$$y=1 \text{ で } \psi = \sin 2\pi t, \quad u=0 \quad (4\cdot c)$$

を考える。この流れの厳密解は、ラプラス変換によって求められる⁽⁶⁾ので、差分解析の精度、挙動を吟味するには都合がよい。ここでは、式(2)、(3)を次の四つの方法によって吟味した。

2.1 Crank-Nicolson 法 この方法は、式(2)、(3)を

$$\begin{aligned} & -A\Delta t \omega_{i,j}^{t+\Delta t}/s^2 + 2(1+A\Delta t/s^2)\omega_{i,j}^t \\ & -A\Delta t \omega_{i,j}^{t-\Delta t}/s^2 = 2\omega_{i,j}^t + A\Delta t(\partial^2 \omega / \partial y^2)_{i,j}^t \end{aligned} \quad (5\cdot a)$$

$$2\psi_{i,j}^{t+\Delta t} = (\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1} + s^2 \omega_{i,j}^{t+\Delta t}) \quad (5\cdot b)$$

$$u_{i,j}^{t+\Delta t} = (\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j})^{t+\Delta t}/s \quad (5\cdot c)$$

$$\partial^2 \omega / \partial y^2 = (\omega_{i,j+1} + \omega_{i,j-1} - 2\omega_{i,j})/s^2 \quad (5\cdot d)$$

と差分化する。新しい時刻の圧力 $p^{t+\Delta t}$ は

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^{t+\Delta t} = -\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{t+\Delta t/2} - A\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^{t+\Delta t/2} \quad (5\cdot e)$$

によって求める。ここで、添字 i と j はそれぞれ x 、 y 軸方向の格子番号を示し、上つきの添字 t と $t+\Delta t$ は、 Δt を時間の刻み幅として、それぞれ時刻 t および $t+\Delta t$ の時刻の値であることを示す。 s は y 方向の格子幅である。

座標系は、図1のようにとり、各変数は図のように定義する。ただし、 ψ と ω は各格子点で定義する。厳密な差分解析を求める場合には、 x 方向の格子幅 h 、および添字 i は必要ないが、後の計算で必要となるのでつけておく。したがって、圧力 $p_{i,j}$ の定義点は、 x 方向の速度成分 $u_{i,j}$ の定義点と一致する。 y 方向の速度成分 $v_{i,j}$ は恒等的に零である。

よく知られているように、Crank-Nicolson 法は、無条件安定であるが、各時刻において連立方程式を解かなければならない。

2.2 DuFort-Frankel 法⁽¹⁾ この方法は、近似

$$\omega_{i,j}^{t+\Delta t} = (\omega_{i,j}^{t+\Delta t} + \omega_{i,j}^{t-\Delta t})/2 \quad (6)$$

を粘性項に適用する方法である。差分方程式は、

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{2A\Delta t}{s^2}\right)\omega_{i,j}^{t+\Delta t} = \omega_{i,j}^{t-\Delta t} + \frac{2A\Delta t}{s^2} \\ & \times (\omega_{i,j+1}^{t-\Delta t} + \omega_{i,j-1}^{t-\Delta t} - \omega_{i,j}^{t-\Delta t}) \end{aligned} \quad (7\cdot a)$$

となる。新しい時刻 $t=t+\Delta t$ における流れ関数と速度は、式(5・b)、(5・c)によって求める。この方法は、非反復という長所をもつが、新しい時刻のうず度を求めるのに、過去の二つの時刻のうず度が必要である。また、ノイマンの安定解析によると、無条件安定となるが、実際上は、近似(6)のために、 $\Delta t, s \rightarrow 0$ かつ $\Delta t/s$

図1 座標系の定義

→0 のときのみ差分方程式(7・a)は適正である。新しい時刻 $t = t + \Delta t$ における圧力は、

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^{t+\Delta t} = -\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^t + \frac{A}{s^2}(u_{i,j+1}^t + u_{i,j-1}^t - u_{i,j}^{t+\Delta t} - u_{i,j}^{t-\Delta t}) \quad (7 \cdot b)$$

によって求める。

2・3 MacCormack 法⁽¹⁾ この方法は2段階法のうちの一つで、第1段の空間微分を前進差分法、第2段の空間微分を後退差分法で近似する方法である。

(i) 1段階

$$\omega_{i,j}^* = \omega_{i,j}^t + \frac{A\Delta t}{s/2} \left\{ \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)_{i,j+1/2}^t - \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)_{i,j}^t \right\} \quad (8 \cdot a)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^* = -\frac{u_{i,j}^* - u_{i,j}^t}{\Delta t} - A \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^t \quad (8 \cdot b)$$

(ii) 2段階

$$\omega_{i,j}^{t+\Delta t} = \frac{1}{2} \left[\omega_{i,j}^* + \omega_{i,j}^t + \frac{A\Delta t}{s/2} \left\{ \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)_{i,j}^* - \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)_{i,j-1/2}^* \right\} \right] \quad (8 \cdot c)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^{t+\Delta t} = -\frac{u_{i,j}^{t+\Delta t} - (u_{i,j}^t + u_{i,j}^*)/2}{\Delta t/2} - A \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^*_{i,j} \quad (8 \cdot d)$$

ただし、 $(\partial \omega / \partial y)_{i,j+1/2}$ などは、

$$(\partial \omega / \partial y)_{i,j+1/2} = (\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j})/s$$

などとする。

2・4 2段階法 この方法は、流れの計算を開始した直後でも正確な圧力場が得られるように考えたもので、時間微分項について、第1段を前進差分法、第2段を非反復の陰解法によって計算する。

(i) 1段階

$$\omega_{i,j}^{t+\Delta t/2} = \omega_{i,j}^t + \frac{A\Delta t}{2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right)_{i,j}^t \quad (9 \cdot a)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^{t+\Delta t/2} = -\frac{u_{i,j}^{t+\Delta t/2} - u_{i,j}^t}{\Delta t/2} - A \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)_{i,j}^t \quad (9 \cdot b)$$

(ii) 2段階

$$\left(1 + \frac{A\Delta t}{s^2}\right) \omega_{i,j}^{t+\Delta t} = \omega_{i,j}^t + \frac{A\Delta t}{s^2} (\omega_{i,j+1}^{t+\Delta t/2} + \omega_{i,j-1}^{t+\Delta t/2} - \omega_{i,j}^t) \quad (9 \cdot c)$$

2段階めの圧力は、

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^{t+\Delta t} = -\frac{u_{i,j}^{t+\Delta t} - u_{i,j}^{t+\Delta t/2}}{\Delta t/2} - A \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)_{i,j}^{t+\Delta t/2} \quad (9 \cdot d)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^{t+\Delta t/2} = -\frac{u_{i,j}^{t+\Delta t} - u_{i,j}^t}{\Delta t} + \frac{A}{s^2} (u_{i,j+1}^{t+\Delta t/2} + u_{i,j-1}^{t+\Delta t/2} - u_{i,j}^{t+\Delta t} - u_{i,j}^t) \quad (9 \cdot e)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^{t+\Delta t/2} = -\frac{u_{i,j}^{t+\Delta t} - u_{i,j}^t}{\Delta t} - A \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)_{i,j}^{t+\Delta t/2} \quad (9 \cdot f)$$

の3とおりによって計算した。式(9・d)は前進差分形、式(9・e)、(9・f)は中心差分形である。したがって、式(9・e)と(9・f)の差分式の形式上の誤差は、それぞれ $O\{\Delta t^2, (\Delta t/s)^2, s^2\}$, $O\{\Delta t^2, s^2\}$ である。また、式(9・e)と式(9・f)は、近似(6)を導入しなければ同じである。

さて、以上の各方法によって得られた厳密な差分解について検討する。計算の条件は、ウォーマースレイ数 $\alpha=4$, y 方向の格子幅 $s=1/10$, $JC=13$ (図1参照) である。初期条件と境界条件は、式(4・a)～(4・c)によって与える。ただし、Crank-Nicolson 法のみ、 $y=0$ と1でうず度も厳密解を与える。

図2は、 $\Delta t=1/100$ としたとき、式(9・d)～(9・f)によって得られた圧力こう配を示す。図の右側の部分が $t=0.005$ のときで、左側の部分が $t=0.195$ のときである。この流れでは、厳密解の圧力こう配は y に依存しない。したがって、数値計算によって得られる圧力こう配も y に依存しないほうが望ましい。しかし、実際に計算を行ってみると、差分式の形によって結果が異なる。とくに、式(9・d)、(9・f)による結果は y 依存性がみられ、時間 t が小さいときは大きく、 t が大きくなると小さくなる。この依存性は、式(9・d)、(9・f)のうず度を速度で計算してもみられる。いまの場合、式(9・e)による計算が y 依存性もなく、厳密解に近い解が得られる。ただし、式(9・e)による計算では、壁面上の速度の粘着条件を放物線近似で与えると、図にみられるような大きな y 依存性を生じる。線形近似を行ったときには、このような依存性はみられない。なお、式(9・e)と(9・f)は、式(6)の形の近似を使った以外は同じであることを注意しておく。

これらの結果から、圧力を求める際には、差分方程式と適合した計算をする必要があるように思われる。

図2 式(9・d)～(9・e)により得られる圧力こう配

いまの場合には、差分方程式が式(9・c)であるから、圧力も式(9・e)の形によって求めるのが最も精度がよい。この事情は2段階法に限らない[式(7・b)、式(8・d)参照]。

図3は、各方法によって得られた圧力こう配の時間的な変化を示す。この図から、DuFort-Frankel法は、大きな時間刻みはとれるものの、時間 t が小さい間は近似がよくないことがわかる。これに対して、Crank-Nicolson法は、大きな時間刻みをとっても、 t の全領域にわたり、ほぼ正しい値が得られる。また、2段階法は、 t が小さい間でもほぼ正しい値が得られ、 $t > 0.1$ では厳密解とほとんど一致する。なお、MacCormack法は、この例では、図に示すように精度が悪いので、以後扱わない。

3. いくつかの差分解析法

以上の考察をもとに、いくつかの差分解析法について述べる。ここでは、無次元化した非定常二次元NS方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + A \nabla^2 u \quad \dots (10 \cdot a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + A \nabla^2 v \quad \dots (10 \cdot b)$$

と、連続の方程式

$$D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \dots (11)$$

を対象とするが、以下に述べる方法は、いずれも三次元流にも適用できる。

さて、連続の方程式を満足させるための著者の方法の骨子は、ある時間ステップ、あるいは各反復において、適当な不変量を陰的条件として課すということである。不変量としてうず度をとると、結果的に連続の

方程式(11)を満足させるためには、

$$D^{(k)} = \nabla^2 \phi^{(k+1)} \quad \dots (12)$$

を各反復において解けばよい。ここで、 ϕ はポテンシャル関数で、上つきの添字 (k) は反復回数を表す。新しい反復回数 $k=k+1$ における速度 $v=(u, v)$ は、

$$v^{(k+1)} = v^{(k)} - \nabla \phi^{(k+1)} \quad \dots (13)$$

によって求める。以下、この方法を各方法に適用し、精度、反復回数等を調べることにする。

3・1 Crank-Nicolson法(C-N法) この方法は、前報⁽⁵⁾で詳しく述べたので省略する。注意すべきことは、差分式の誤差は一般に $O(\Delta t, \delta^2)$ [$\delta = \max(h, s)$; h, s : x, y 方向の格子幅]であることである。

3・2 DuFort-Frankel法(D-F法) この方法は、すでに述べたように粘性項にのみ近似(6)を使う方法である。この近似をNS方程式(10)に使うと、

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 + 2A\Delta t \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{s^2} \right) \right\} u_{i,j}^{t+\Delta t} \\ &= u_{i,j}^{t-\Delta t} + 2\Delta t \left\{ - \left(\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} \right)^t - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^t + A \nabla^2 u^t \right\} \quad \dots (14 \cdot a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 + 2A\Delta t \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{s^2} \right) \right\} v_{i,j}^{t+\Delta t} \\ &= v_{i,j}^{t-\Delta t} + 2\Delta t \left\{ - \left(\frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} \right)^t - \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^t + A \nabla^2 v^t \right\} \quad \dots (14 \cdot b) \end{aligned}$$

となる。上式に含まれる $\partial u^2 / \partial x$ 等は、

$$\frac{\partial u^2}{\partial x} = \frac{u_{i+1/2,j}^2 - u_{i-1/2,j}^2}{h} \quad \dots (15 \cdot a)$$

$$\frac{\partial uv}{\partial y} = \frac{u_{i,j+1/2} v_{i,j-1/2} - u_{i,j-1/2} v_{i,j+1/2}}{s} \quad \dots (15 \cdot b)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_{i,j} - p_{i-1,j}}{h} \quad \dots (15 \cdot c)$$

$$\frac{\partial uv}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j-1/2} v_{i-1/2,j} - u_{i,j-1/2} v_{i+1,j}}{h} \quad \dots (15 \cdot d)$$

$$\frac{\partial v^2}{\partial y} = \frac{v_{i,j+1/2}^2 - v_{i,j-1/2}^2}{s} \quad \dots (15 \cdot e)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{p_{i,j} - p_{i,j-1}}{s} \quad \dots (15 \cdot f)$$

で近似する。ただし、 $u_{i+1/2,j}$ などは

$$u_{i+1/2,j} = (u_{i,j} + u_{i+1,j}) / 2$$

などとする。また、記号 ∇^2 は

$$\begin{aligned} \nabla^2 v^t &= \frac{v_{i+1,j}^t + v_{i-1,j}^t - v_{i,j}^t}{h^2} \\ &+ \frac{v_{i,j+1}^t + v_{i,j-1}^t - v_{i,j}^t}{s^2} \end{aligned}$$

図3 圧力こう配の時間的な変化

を意味するものとする。圧力 $p^{t+\Delta t}$ は、

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{i,j}^{t+\Delta t} = -\frac{u_{i,j}^{t+\Delta t} - u_{i,j}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} - \left(\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y}\right)_{i,j}^t + A\bar{\nabla}^2 u^t \quad \dots\dots\dots (16\cdot a)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{i,j}^{t+\Delta t} = -\frac{v_{i,j}^{t+\Delta t} - v_{i,j}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} - \left(\frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y}\right)_{i,j}^t + A\bar{\nabla}^2 v^t \quad \dots\dots\dots (16\cdot b)$$

を積分して求める。ただし、記号 $\bar{\nabla}^2$ は

$$\bar{\nabla}^2 v^t = \frac{v_{i+1,j}^t + v_{i-1,j}^t - v_{i,j}^{t+\Delta t} - v_{i,j}^{t-\Delta t}}{h^2} + \frac{v_{i,j+1}^t + v_{i,j-1}^t - v_{i,j}^{t+\Delta t} - v_{i,j}^{t-\Delta t}}{s^2}$$

を表すものとする。なお、連続の方程式(11)は

$$D_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{s} \quad \dots\dots\dots (17)$$

によって計算する。また、ポアソンの方程式(12)は、

$$2\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{s^2}\right)\varphi_{i,j}^* = \nabla^2 \varphi - D_{i,j}^{(k)} \quad \dots\dots\dots (18\cdot a)$$

$$\varphi_{i,j}^{(k+1)} = \varphi_{i,j}^{(k)} + RF_\varphi(\varphi_{i,j}^* - \varphi_{i,j}^{(k)}) \quad \dots\dots\dots (18\cdot b)$$

によって計算する。ただし、 RF_φ は φ に対する緩和係数で、記号 $\nabla^2 \varphi$ は

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i-1,j}}{h^2} + \frac{\varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j-1}}{s^2}$$

を意味する。速度成分 v , v は

$$u_{i,j}^{(k+1)} = u_{i,j}^{(k)} - \frac{\varphi_{i,j}^{(k+1)} - \varphi_{i-1,j}^{(k+1)}}{h} \quad \dots\dots\dots (19\cdot a)$$

$$v_{i,j}^{(k+1)} = v_{i,j}^{(k)} - \frac{\varphi_{i,j}^{(k+1)} - \varphi_{i,j-1}^{(k+1)}}{s} \quad \dots\dots\dots (19\cdot b)$$

によって計算する。計算順序は、次のようにする。

$$\begin{aligned} & -\frac{\Delta t}{h} u_{i-1,j}^{t+\Delta t} u_{i,j}^{t+\Delta t} + \left\{1 + 2A\Delta t \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{s^2}\right)\right\} u_{i,j}^{t+\Delta t} + \frac{\Delta t}{h} u_{i+1,j}^{t+\Delta t} u_{i,j}^{t+\Delta t} \\ & = u_{i,j}^{t-\Delta t} + 2\Delta t \left[-\left\{\left(\frac{\partial u^2}{\partial x}\right)^{t-\Delta t} - \frac{\partial u^t u^{t-\Delta t}}{\partial x} + \left(\frac{\partial uv}{\partial y}\right)^t\right\}_{i,j} - \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{i,j}^t + A\bar{\nabla}^2 u^t \right] \quad \dots\dots\dots (23\cdot a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{\Delta t}{s} v_{i,j-1}^{t+\Delta t} v_{i,j}^{t+\Delta t} + \left\{1 + 2A\Delta t \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{s^2}\right)\right\} v_{i,j}^{t+\Delta t} + \frac{\Delta t}{s} v_{i,j+1}^{t+\Delta t} v_{i,j}^{t+\Delta t} \\ & = v_{i,j}^{t-\Delta t} + 2\Delta t \left[-\left\{\left(\frac{\partial uv}{\partial x}\right)^t + \left(\frac{\partial v^2}{\partial y}\right)^{t-\Delta t} - \frac{\partial v^t v^{t-\Delta t}}{\partial y}\right\}_{i,j} - \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{i,j}^t + A\bar{\nabla}^2 v^t \right] \quad \dots\dots\dots (23\cdot b) \end{aligned}$$

となる。このようにしても、新しい時刻 $t = t + \Delta t$ における未知の速度は、三重対角行列になるから簡単に解ける。圧力 $p^{t+\Delta t}$ は

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{i,j}^{t+\Delta t} = -\frac{u_{i,j}^{t+\Delta t} - u_{i,j}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} - \left\{\left(\frac{\partial u^2}{\partial x}\right)^{t-\Delta t} + \frac{\partial u^t u^{t+\Delta t}}{\partial x} - \frac{\partial u^t u^{t-\Delta t}}{\partial x} + \left(\frac{\partial uv}{\partial y}\right)^t\right\}_{i,j} + A\bar{\nabla}^2 u^t \quad \dots\dots\dots (24\cdot a)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{i,j}^{t+\Delta t} = -\frac{v_{i,j}^{t+\Delta t} - v_{i,j}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} - \left\{\left(\frac{\partial uv}{\partial x}\right)^t + \left(\frac{\partial v^2}{\partial y}\right)^{t-\Delta t} + \frac{\partial v^t v^{t+\Delta t}}{\partial y} - \frac{\partial v^t v^{t-\Delta t}}{\partial y}\right\}_{i,j} + A\bar{\nabla}^2 v^t \quad \dots\dots\dots (24\cdot b)$$

を積分して求める。計算順序は次のようにする。

$$\begin{array}{c} v^{t,t=t+\Delta t} v^{t+\Delta t} \quad D^{(k)} \quad -\varphi^{(k+1)} \quad -v^{(k+1)} \quad P^{t+\Delta t} \\ p^t \quad \left[\begin{array}{c} \text{式(23)} \quad \text{式(17)} \quad \text{式(18)} \quad \text{式(19)} \quad \text{式(24)} \\ \varphi=0 \end{array} \right] \end{array}$$

$$\begin{array}{c} v^{t,t=t+\Delta t} v^{t+\Delta t} \quad D^{(k)} \quad -\varphi^{(k+1)} \quad -v^{(k+1)} \quad P^{t+\Delta t} \\ p^t \quad \left[\begin{array}{c} \text{式(14)} \quad \text{式(17)} \quad \text{式(18)} \quad \text{式(19)} \quad \text{式(16)} \\ \varphi=0 \end{array} \right] \end{array}$$

この方法は、非反復法という長所をもつが、 $\Delta t, \delta \rightarrow 0 [\delta = \max(h, s)]$, かつ $\Delta t/\delta \rightarrow 0$ のときの NS 方程式(10)と適合する。したがって、時間刻み Δt をあまり大きくすることは許されない。

3.3 DuFort-Frankel 法 + 線形化法 [Present (D-F+L)]

この方法は、本論文で提案する一つの方法である。その骨子は、D-F 法が粘性項にのみ近似式(6)を使うのに対し、非反復という長所を生かして、対流項にも近似式(6)を使って線形化し、新しい時刻の流れの中の信号が粘性項のみならず、対流項からも伝ばするようにしたものである。したがって、一般には D-F 法よりよい近似になっているものと思われる。また、非反復という長所を生かすために、対流項すべてに近似式(6)を使わずに、 $\partial u^2/\partial x, \partial v^2/\partial y$ の項のみ(三次元流なら $\partial w^2/\partial z$ の項も)近似式(6)を使う。すなわち、

$$(u^2)^{t+\Delta t} = (u^2)^{t-\Delta t} + 2u^t(u^{t+\Delta t} - u^{t-\Delta t}) \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^2}{\partial x} &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u^2}{\partial x}\right)^{t+\Delta t} + \left(\frac{\partial u^2}{\partial x}\right)^{t-\Delta t} \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \{ (u^2)^{t-\Delta t} + u^t u^{t+\Delta t} - u^t u^{t-\Delta t} \} \quad \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

などと近似する。 $\partial u^t u^{t+\Delta t}/\partial x$ などは、

$$\frac{\partial u^t u^{t+\Delta t}}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j}^t u_{i+1,j}^{t+\Delta t} - u_{i-1,j}^t u_{i-1,j}^{t+\Delta t}}{2h} \quad \dots\dots\dots (22)$$

などとする。結果は、

この方法は、Wilkinson⁽⁸⁾の理論によって

$$1+2A\Delta t(1/h^2+1/s^2)\geq \Delta t(|u_{i-1,j}|^t+|u_{i+1,j}|^t)/h\approx 2\Delta t|u_{i,j}|^t/h$$

$$1+2A\Delta t(1/h^2+1/s^2)\geq 2\Delta t|v_{i,j}|^t/s$$

ならば、丸め誤差の累積に関して極めて安定である。これより、

$$2\Delta t\{V/\Delta-A(1/h^2+1/s^2)\}\leq 1, \quad V/\Delta=\max(|u_{i,j}|^t/h, |v_{i,j}|^t/s) \quad (25)$$

となる。したがって、

$$V/\Delta\leq A(1/h^2+1/s^2) \quad (26)$$

ならば無条件安定である。もし

$$V/\Delta\gg A(1/h^2+1/s^2)$$

ならば、Courant 数 $C_n=V\Delta t/\Delta$ を使うと

$$C_n<1/2 \quad (27)$$

となる。この方法は、方程式が非線形でも一つの安定性基準が導ける珍しい例である。

3・4 2段階法 [Present (Two-Step)] 2段階法については、ADI法、および前報で扱った2段階 Lax-Wendroff 法などを始めとして、数多くの方法がある⁽¹⁾⁽⁹⁾。しかし、2・3節の MacCormack 法の計算例で示したように、圧縮性流体の数値解法で使われている2段階法をそのまま非圧縮粘性流体の流れに適用しても、必ずしも精度のよい結果は得られない。そこで、本論文においては、流れの計算開始直後でも正確な圧力場が計算できる方法として、次に示すように第1段に前進差分法、第2段に3・3節の非反復の陰解法を使う方法を提案する。

(i) 1段階

$$u_{i,j}^{t+\Delta t/2}=u_{i,j}^t+\frac{\Delta t}{2}\left\{-\left(\frac{\partial u^2}{\partial x}+\frac{\partial uv}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)+A\nabla^2 u\right\}_{i,j}^t \quad (28\cdot a)$$

$$v_{i,j}^{t+\Delta t/2}=v_{i,j}^t+\frac{\Delta t}{2}\left\{-\left(\frac{\partial uv}{\partial x}+\frac{\partial v^2}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)+A\nabla^2 v\right\}_{i,j}^t \quad (28\cdot b)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{i,j}^{t+\Delta t/2}=-\frac{u_{i,j}^{t+\Delta t/2}-u_{i,j}^t}{\Delta t/2}+\left\{-\left(\frac{\partial u^2}{\partial x}+\frac{\partial uv}{\partial y}\right)+A\nabla^2 u\right\}_{i,j}^t \quad (29\cdot a)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{i,j}^{t+\Delta t/2}=-\frac{v_{i,j}^{t+\Delta t/2}-v_{i,j}^t}{\Delta t/2}+\left\{-\left(\frac{\partial uv}{\partial x}+\frac{\partial v^2}{\partial y}\right)+A\nabla^2 v\right\}_{i,j}^t \quad (29\cdot b)$$

計算順序は、次のようにする。

(ii) 2段階

$$-\frac{\Delta t}{2h}u_{i,j}^{t+\Delta t/2}u_{i,j}^{t+\Delta t}+\left\{1+A\Delta t\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{s^2}\right)\right\}u_{i,j}^{t+\Delta t}+\frac{\Delta t}{2h}u_{i,j}^{t+\Delta t/2}u_{i,j}^{t+\Delta t}$$

$$=u_{i,j}^t+\Delta t\left[-\left\{\left(\frac{\partial u^2}{\partial x}\right)^t-\frac{\partial u^{t+\Delta t/2}u^t}{\partial x}+\left(\frac{\partial uv}{\partial y}\right)^{t+\Delta t/2}\right\}_{i,j}-\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{i,j}^{t+\Delta t/2}+A\nabla^2 u^{t+\Delta t/2}\right] \quad (30\cdot a)$$

$$-\frac{\Delta t}{2s}v_{i,j}^{t+\Delta t/2}v_{i,j}^{t+\Delta t}+\left\{1+A\Delta t\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{s^2}\right)\right\}v_{i,j}^{t+\Delta t}+\frac{\Delta t}{2s}v_{i,j}^{t+\Delta t/2}v_{i,j}^{t+\Delta t}$$

$$=v_{i,j}^t+\Delta t\left[-\left\{\left(\frac{\partial uv}{\partial x}\right)^{t+\Delta t/2}+\left(\frac{\partial v^2}{\partial y}\right)^t-\frac{\partial v^{t+\Delta t/2}v^t}{\partial y}\right\}_{i,j}-\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{i,j}^{t+\Delta t/2}+A\nabla^2 v^{t+\Delta t/2}\right] \quad (30\cdot b)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{i,j}^{t+\Delta t/2}=-\frac{u_{i,j}^{t+\Delta t}-u_{i,j}^t}{\Delta t}-\left\{\left(\frac{\partial u^2}{\partial x}\right)^t+\frac{\partial u^{t+\Delta t/2}u^{t+\Delta t}}{\partial x}-\frac{\partial u^{t+\Delta t/2}u^t}{\partial x}+\left(\frac{\partial uv}{\partial y}\right)^{t+\Delta t/2}\right\}_{i,j}+A\nabla^2 u^{t+\Delta t/2}$$

$$\quad \quad \quad (31\cdot a)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{i,j}^{t+\Delta t/2}=-\frac{v_{i,j}^{t+\Delta t}-v_{i,j}^t}{\Delta t}-\left\{\left(\frac{\partial uv}{\partial x}\right)^{t+\Delta t/2}+\left(\frac{\partial v^2}{\partial y}\right)^t+\frac{\partial v^{t+\Delta t/2}v^{t+\Delta t}}{\partial y}-\frac{\partial v^{t+\Delta t/2}v^t}{\partial y}\right\}_{i,j}+A\nabla^2 v^{t+\Delta t/2} \quad (31\cdot b)$$

$$p^{t+\Delta t}=p^{t+\Delta t/2} \quad (31\cdot c)$$

ただし、演算子 $\nabla^2 v$ と $\tilde{\nabla}^2 v$ は、すでに述べた記法で Δt のかわりに $\Delta t/2$ とおいて適用する。また、第1

段階めの圧力 $p^{t+\Delta t/2}$ と第2段階めの圧力 $p^{t+\Delta t}$ は、仮の値とし、式(31・a)、(31・b)による圧力を $t=t+\Delta t/2$ において計算された値とする。こうすることによ

表 1 各方法による反復回数と CPU 時間の比較

Method	Δt	Number of Time Steps	ϵ_D	Total Number Iterations	CPU Time About (sec)	Comments
Explicit	1/200	104	10^{-2}	938	10	—
	1/200	104	10^{-3}	2700	20	—
C-N	1/50	26	10^{-2}	1005	23	$RFu=1, RFv=1, \mu=1$
	1/25	13	10^{-2}	822	19	$RFu=1, RFv=1, \mu=1$
D-F	1/50	26	10^{-2}	805	8	—
	1/25	13	10^{-2}	633	6	—
Present(D-F+L)	1/50	26	10^{-2}	698	8	—
Present (Two-Step)	1/100	52	10^{-2}	983	13	—
	1/100	52	10^{-3}	2722	21	—

図 4 各方法により得られた速度分布 ($t=0.52$)

て、差分式の誤差は、形式上 $O\{\Delta t^2, (\Delta t/\delta)^2, \delta^2\}$ となる。もちろん、このようにしなくても、式(31・a), (31・b)によって計算された圧力を $t=t+\Delta t$ における圧力としてもよい (このときは、差分式の形式上の誤差は $O\{\Delta t, (\Delta t/\delta)^2, \delta^2\}$ になる) が、ここでは、正確な圧力を求めるために、仮の値を計算することにする。また、第2段階で計算の簡単な D-F 法を用いてもよい。いずれにしても、第1段の前進差分法による計算で Δt の大きさに制限をうけるが、その大きさは、通常の前進差分法の2倍である。なお、計算順序は次のとおりである。

4. 計算結果

格子分割は、前報と同じく $h=s=1/10$ とし、 $IC=61$, $JC=13$ とした (図1参照)。また、ウォーマースレイ数 α は $\alpha=4$ とした。初期条件は、

$$t < 0 \text{ で } u=v=p=0$$

とし、境界条件は、

(i) 上流側

$$v: \text{厳密解を与える, } p=0 \dots\dots\dots (32\cdot a)$$

(ii) $y=0$

$$\text{対称条件を課す} \dots\dots\dots (32\cdot b)$$

(iii) $y=1$

$$v=0 \dots\dots\dots (32\cdot c)$$

(iv) 下流側

$$\partial v / \partial x = 0 \dots\dots\dots (32\cdot d)$$

とした。なお、陰解法を使う場合、新しい時刻における下流側の速度の値は一般に未知である。いまの場合には、境界条件式(32・d)を考慮して式(23), (30)を解いている。対称条件を課するときも同様である。この例では、このようにすれば陰解法を適用しても、境界条件に特別な考慮を必要としない。

表1は、各方法による反復回数と CPU 時間の比較を示す。ただし、表中 ϵ_D は

$$\epsilon_D = |D_{i,j}|_{\max}$$

を表す。これは収束条件として使っている。また、Explicit は前進差分法による結果を示す。C-N 法で RFu, RFv, μ とあるのは、いずれも緩和係数である⁽⁵⁾。φ の緩和係数 RF_ϕ はいずれの場合も1とし、式(18)のみ SLOR 法で解いた。この表より、本論文の目的の

一つは達成されていることがわかる。すなわち、Explicit法に比べて、D-F法、およびD-F+L法は大きな時間刻みをとることが可能であり、反復回数、CPU時間ともに少ない。C-N法も大きな時間刻みをとることが可能であり、 $\Delta t=1/25$ とするとExplicit法より反復回数は少なくなる(前報では、 $\Delta t=1/50$ までしかとらなかった)。また、D-F法とD-F+L法では、D-F+L法のほうが反復回数が少ない。

図4(a), (b)は、各方法による下流端における速度分布を示す($t=0.52$)。これらの図より、C-N法では $\Delta t=1/25$ としてもよい差分解が得られるが、D-F法で $\Delta t=1/25$ とすると、解は得られるものの精度がよくないことがわかる。また、Two-Step法(Present)で $\epsilon_0 < 10^{-3}$ としたものは厳密解にほとんど一致する。

図5(a), (b)は各方法による下流端における圧力こう配の時間的変化である。図5(a)から、D-F法、およびD-F+L法は、2章で示したように t が小さい間は近似の度合いがよくないことがわかる。これに対し、C-N法では t が小さい間でもほぼ正しい値が得られる。 $t \geq 0.2$ では、いずれの方法でも、ほぼ正しい圧力こう配が得られる。図に見られる圧力の振動を小さくするには、収束条件を厳しくしなければならない。図5(b)は、 t が小さいときの拡大図である。この図で注意すべきことは、Explicit法では、収束条件を厳しくすると($\epsilon_0 < 10^{-3}$)、ほぼ正しい解が得られるが、 t が大きくなってもわずかのゆらぎがみられるのに対し、Two-Step法では、収束条件がゆるくとも($\epsilon_0 < 10^{-2}$)、 $t \geq 0.18$ では厳密解とほとんど一致する解が得られる

ということである。Two-Step法で収束条件を厳しくすると($\epsilon_0 < 10^{-3}$)、 t が小さくてもほぼ正しい圧力こう配が得られる。 $t=0.85$ 付近でややオーバーシュートぎみであるが、これは収束条件をさらに厳しくするとみられなくなる。

5. 結 言

本論文において、速度と圧力を使った非圧縮粘性流れの方程式系のいくつかの非定常差分解析法に、連続の方程式を満足させるための著者の方法を適用して、その有効性を調べた。これらの方法は、いずれも三次元流や自由表面などの境界が動く問題にも適用可能である。前報、および本論文で示した簡単な流れの数値解析結果から、以下のことが結論できる。

(1) 正しい圧力場を求めるためには、運動量輸送方程式、あるいはうず度輸送方程式の差分化と適合した計算を行う必要がある。

(2) 本論文で述べた方法は、いずれも収束が速く、各時間ステップで速度場は精度よく求めることができる。通常の計算では、収束条件 $\epsilon_0 < 10^{-2}$ ($\epsilon_0 = |D_{ij}|_{\max}$, $D = \nabla \cdot v$)で十分である。

(3) しかし、圧力場を流れの計算開始直後から精度よく計算するためには、収束条件 $\epsilon_0 < 10^{-2}$ では不十分で、 $\epsilon_0 < O(10^{-3})$ でなければならない。なお、前進差分法、非反復の陰解法を使った場合には、収束条件を厳しくしても最初の数ステップ、ないしは数十ステップは圧力場が正しく計算されない。

(4) 流れの計算開始直後でも、圧力場を正しく

(a)

(b)

図5 各方法による圧力こう配の時間的変化

計算するためには多段階法を使う必要がある。ただし、圧縮性流体で適用されている多段階法を非圧縮粘性流体に適用するときには、注意が必要である。本論文で提案した2段階法の差分式の誤差は、形式上 $O(\Delta t^2, (\Delta t/\delta)^2, \delta^2)$ (Δt : 時間刻み幅, δ : 空間の格子幅の最大値) であり, $\Delta t, \delta \rightarrow 0$ かつ $\Delta t/\delta \rightarrow 0$ のときのみナビエ・ストークス方程式と適合する。

(5) 大きな時間刻みをとるためには、陰解法を使う必要があるが、この方法では、通常連立方程式を解かなければならない。これを簡単に計算できる方法として、非反復の陰解法を提案した。この方法は、通常の前進差分法と比べて、反復回数、実演算時間ともに少なく、実用上の問題では有用であると思われる。この方法の差分式の誤差は、 $O(\Delta t, (\Delta t/\delta)^2, \delta^2)$ であり, $\Delta t, \delta \rightarrow 0$ かつ $\Delta t/\delta \rightarrow 0$ のときのみナビエ・ストークス方程式に適合する。ただし、DuFort-Frankel 法と同

様、流れの計算開始直後では、圧力場は正しく計算されない。

文 献

- (1) Peyret, R. and Taylor, T. D., *Computational Methods for Fluid Flow*, (1983), 144, Springer-Verlag.
- (2) Patankar, S. V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, (1980), 113, Hemisphere Publishing Corp.
- (3) 代表的には MAC 法, Harlow, F. H. and Welch, J. E., *Phys. Fluids*, 8 (1965), 2182.
- (4) Takemitsu, N., *J. Comput. Phys.*, 61-3 (1985), 499.
- (5) 竹光, 機論, 52-474, B (昭 61), 532.
- (6) 大宮司・里深, 機誌, 87-785 (昭 59), 304, 310.
- (7) 竹光・松信, 数理解析研究所講究録, 539 (昭 59), 256.
- (8) Wilkinson, J. H., *J. Assoc. Comput. Mach.*, 8 (1961), 281.
- (9) Roache, P. J., *Computational Fluid Dynamics*, (1976), 91, Hermosa Publishers Inc.