ビンガム塑性流体の乱流解析を目的とした k - ϵ モデル*

中 村 雅 英**, 沢 田 雅**

A k - ϵ Model for the Turbulent Analysis of Bingham Plastic Fluid

by Masahide NAKAMURA and Tadashi SAWADA

The purpose of the present study is to develop a k - ϵ model which can analyze the turbulence of Bingham plastic fluid. The fact that the turbulent energy dissipation rates of Bingham plastic fluid become greater than the values of Newtonian fluid is taken into consideration. For verification of the present model, the friction factor and velocity distribution of a fully developed flow in a pipe is calculated and compared with the experimental data, and the dependency of turbulent energy and the energy dissipation rate on the Bingham yield stress is investigated.

Key Words: Non-Newtonian Fluid, Turbulence, k - ϵ Model, Plastic Fluid, Pipe Flow

1. 緒 言

ビンガム塑性流体の乱流に関する解析は、富田⁽¹⁾、北浦⁽²⁾、岐美⁽³⁾らによって行われているが、これらの研究は、すべて0方程式モデル⁽⁴⁾の範囲内である。0方程式モデルは、ニュートン流体の例をみてもわかるように適用範囲に限られる欠点がある。そのため、ニュートン流体では、乱流エネルギーなどを支配する方程式をあらたに加え、0方程式モデルよりも多くの方程式を使用する高次のモデルに基づいて乱流を解析する方法が多く用いられるようになってきている。

ビンガム塑性流体においても、ニュートン流体と条件は同じであり、いずれ0方程式モデルよりも高次のモデルが解析の主流になると考えられるが、そのような高次のモデルに関する研究は、まだ行われていない。以上の理由から、本研究ではビンガム塑性流体の乱流を解析することのできる2方程式モデルの開発を試みた。2方程式モデルは、ニュートン流体において実用の域にあり、0方程式モデルに比べはるかに広い適用範囲を有するモデルである。本研究では、2方程式モ

デルのうち最もよく検証されている k - ϵ モデル⁽⁵⁾⁽⁶⁾に基づいて、ビンガム塑性流体の乱流を解析することのできるモデルを導出する。さらに、導出したモデルを最も基本的な流れ場である円管内において完全に発達したビンガム塑性流体の乱流に適用し、解析結果と既存の実験結果との比較・検討を行う。

2. 主 要 記 号

- a : 比せん半径⁽⁷⁾
- $C_\mu, C_{\epsilon 1}, C_{\epsilon 2}$: 乱流モデルに現れる定数
- D, E : 乱流エネルギーおよび乱流エネルギー散逸の補正項
- e_{ij} : 変形速度テンソルの (i, j) 成分⁽⁷⁾
- f_μ, f_1, f_2 : 乱流モデルに現れる補正関数
- f_B : 乱流エネルギー散逸の塑性効果による補正式(7)
- H_e : ヘドストロム数⁽³⁾
- k, k_m : 乱流エネルギーおよびその最大値
- p : 圧力
- p_y : 降伏値
- R : 円管の内半径
- Re : レイノルズ数⁽⁷⁾
- Re_B : 伊藤により定義されたレイノルズ数⁽⁷⁾

* 昭和61年3月14日 東海支部第35期総会講演会において講演、原稿受付 昭和60年4月19日。

** 正員、秋田大学鉱山学部(〒010 秋田市手形学園町1-1)。

- r_y : $r_y = 2p_y / (-\partial p / \partial z)$
 t : 時間
 u, u_m : 軸方向速度およびその最大値
 u_* : 摩擦速度
 y^+ : $y^+ = u_* (R-r) \rho / \mu_B$
 r, θ, z : 座標
 α : $\alpha = 2\bar{e}_{ij} \cdot \bar{e}_{ji}$
 δ_{ij} : クロネッカのデルタ
 σ_{ij} : 応力テンソルの (i, j) 成分
 $\sigma_k, \sigma_\varepsilon$: k および ε に対する乱流プラントル数
 μ_B : 塑性粘度
 ν_B : $\nu_B = \mu_B / \rho$
 ν_t : うず粘性係数
 ν_{eq} : みかけの動粘性係数 $= (\mu_B + p_y / \sqrt{2\Pi}) / \rho$
 $\varepsilon, \varepsilon_m$: 乱流エネルギー散逸およびその最大値
 ρ : 密度
 Π : $\Pi = e_{ij} \cdot e_{ji}$
 λ_B : ビンガム塑性流体の摩擦抵抗係数
 添 字
 —: 時間平均を表す
 ' : 乱流による変動量を表す

3. 乱 流 解 析 モ デ ル

3.1 乱流場における構成方程式 ビンガム塑性流体の構成方程式は次式で与えられる⁽⁷⁾.

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\left(\mu_B + \frac{p_y}{\sqrt{2\Pi}}\right)e_{ij} \quad (1)$$

この式に現れる物理量を平均値と乱流による変動量との和とし、上式に代入し両辺の平均をとれば次式のようになる.

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= -\bar{p}\delta_{ij} + 2\left(\mu_B + \frac{p_y}{\sqrt{2\Pi} + 2\Pi'}\right)(\bar{e}_{ij} + e'_{ij}) \\ &= -\bar{p}\delta_{ij} + 2\mu_B\bar{e}_{ij} + \frac{p_y}{\sqrt{2\Pi}}\left(\bar{e}_{ij} - \frac{\Pi'e_{ij}}{2\Pi} + \dots\right) \end{aligned} \quad (2)$$

一般に、乱流におけるレイノルズ応力は、上式で与えられる応力よりはるかに大きい。上式で与えられる応力が重要になるのは、壁近傍などのレイノルズ応力が小さくなる場所である。そのような場所では、乱流は弱いので、式(2)の右辺カッコ内第2項以下を無視することができる。すると、式(2)は次式のようにになる。

$$\bar{\sigma}_{ij} = -\bar{p}\delta_{ij} + 2\left(\mu_B + \frac{p_y}{\sqrt{2\Pi}}\right)\bar{e}_{ij} \quad (3)$$

ここで、 $\nu_{eq} = (\mu_B + p_y / \sqrt{2\Pi}) / \rho$ とおけば、式(3)は次のようになる。

$$\bar{\sigma}_{ij} = -\bar{p}\delta_{ij} + 2\rho\nu_{eq}\bar{e}_{ij} \quad (4)$$

式(4)からわかるように、ビンガム塑性流体では、ニュートン流体と比べ、動粘性係数が ν_{eq} に変化したと考えればよい。したがって、 $k-\varepsilon$ モデルにおいても、動粘性係数を ν_{eq} におきかえれば、ビンガム塑性流体用のモデルになることが予想される。しかし、この点以外にも、ビンガム塑性流体の乱流の場合、ニュートン流体の乱流と異なる点が存在する。それについては、次節で述べる。

3.2 ビンガム塑性流体における乱流エネルギーおよび乱流エネルギー散逸の特徴 ビンガム塑性流体の代表としてあげられるのは、固体微粒子が流体中に懸濁している流体である。その場合、固体微粒子の存在により、乱流エネルギー散逸が増大することが、文献⁽⁸⁾において示唆されている。一般に $k-\varepsilon$ モデルにおいて、乱流エネルギー散逸を支配する方程式は、移流、拡散、生成、消滅の4項にわけてモデル化されており⁽⁴⁾乱流エネルギー散逸の増大する効果は、この4項のうち、生成項に影響を及ぼすと考えられる。以下でこの効果を定式化する。

ニュートン流体の $k-\varepsilon$ モデルにおいて、乱流エネルギー散逸の生成項は、 $C_{\varepsilon} f_B \nu_t \varepsilon (\partial u / \partial r)^2 / k$ で与えられる⁽⁹⁾。上記の効果を含めるため、この項を $f_B \cdot C_{\varepsilon} f_B \nu_t \varepsilon (\partial u / \partial r)^2 / k$ とおく。 f_B が、ビンガム塑性流体において、乱流エネルギー散逸がニュートン流体における値より大きくなる効果を示している。 f_B は以下の条件を満たすことが必要である。

(1) ビンガム塑性流体では、ニュートン流体より乱流エネルギー散逸が増大するから

$$f_B \geq 1 \quad (5)$$

(2) $p_y \rightarrow 0$ の極限をとった場合、ニュートン流体における値と一致することが必要であるから

$$p_y \rightarrow 0 \text{ のとき } f_B \rightarrow 1 \quad (6)$$

上記の2条件を満足する関数は、明らかに p_y を含んでいなくてはならない。そのため f_B は、 p_y を含んだ無次元数で表すことができると考えられる。ここでは、 p_y を含んだ無次元数としてヘドストロム数⁽³⁾を選ぶ。ヘドストロム数は次式で定義される。

$$H_e = 4\rho R^2 p_y / \mu_B^2$$

f_B の関数形は明らかではないが、式(6)を満足する最も簡単な形として次式のようにおく。

$$f_B = 1 + A \cdot H_e \quad (7)$$

ここで A は、実験値との比較・検討に基づいて決定される定数であり、本研究では

$$A = 4.1 \times 10^{-7} \quad (8)$$

とした。 $A > 0$ であるから、式(5)も満足している。

なお, p_y を含んだ無次元数は, ヘドスとロム数以外にも, 比せん半径⁽⁷⁾, ビンガム数⁽⁷⁾などが存在するが, f_B をこれらの無次元数の1次式として表すと, 式の中に現れる定数をどのように選んでも, 実験結果はうまく再現できなかった。比せん半径やビンガム数には, 流速や圧力こう配といった流体の運動と直接の関連を持つ量が含まれているので, この結果は, ビンガム塑性流体において乱流エネルギー散逸の増大する効果は流速や圧力こう配に依存しないことを示していると考えられ, 文献⁽⁸⁾と矛盾しない。

3.3 ビンガム塑性流体用 $k-\varepsilon$ モデル 3.1, 3.2 節の結果を考慮し, ビンガム塑性流体の乱流を解析することのできる $k-\varepsilon$ モデルを導出する。 ν をニュートン流体の動粘性係数とすれば, ニュートン流体で用いられる $k-\varepsilon$ モデルは, 軸対称流れに対しては次式のようになる⁽⁶⁾。

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial r} \right\} + \nu_t \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 - \varepsilon + D \quad (9)$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right\} + C_{\varepsilon 1} f_1 \frac{\varepsilon}{k} \nu_t \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 - C_{\varepsilon 2} f_2 \frac{\varepsilon^2}{k} + E \quad (10)$$

$$\nu_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (11)$$

式(9)~(11)において用いられる定数や補正項には, さまざまなモデルが提唱されているが, 本研究では Lam, Bremhorst によって提唱されたモデル⁽⁹⁾を用いる。このモデルを用いる理由は,

(1) 式(9), (10)に現れる乱流エネルギーの補正項 D および乱流エネルギー散逸の補正項 E のうち, 特に後者には明確な物理的意味がなく, 実験結果をよく再現するために導入する場合が多い。そのため, このようなモデルは, ニュートン流体において検証されていても, そのままビンガム塑性流体に用いることができない可能性がある。したがって, 補正項を用いないモデルのほうがビンガム塑性流体への拡張は容易であると考えられる。Lam-Bremhorst のモデルでは $D=E=0$ である。

(2) Lam-Bremhorst のモデルは, 現在提唱されている $k-\varepsilon$ モデルのうち, 最もすぐれたモデルの一つとされている⁽⁶⁾。

などである。

3.1, 3.2 節の結果と, 式(9)~(11)を考慮すれば, ビンガム塑性流体の $k-\varepsilon$ モデルは次式のようになると考えられる。

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left(\nu_B + \frac{\nu_t}{\sigma_k} + \frac{p_y}{\rho \sqrt{2\bar{\Pi}}} \right) \frac{\partial k}{\partial r} \right\} + \nu_t \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 - \varepsilon \quad (12)$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left(\nu_B + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} + \frac{p_y}{\rho \sqrt{2\bar{\Pi}}} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right\} + f_B C_{\varepsilon 1} f_1 \frac{\varepsilon}{k} \nu_t \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 - C_{\varepsilon 2} f_2 \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (13)$$

$$\nu_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (14)$$

これらの式に用いられる $C_\mu, C_{\varepsilon 1}$ などの定数や, f_μ, f_1 などの関数の具体的な形は文献⁽⁹⁾に示されている。

式(12)~(14)において, 特に問題となることは $2\bar{\Pi}$ の計算方法である。以下, これについて述べる。まず定義より

$$2\bar{\Pi} = 2(\bar{e}_{ij} + e'_{ij}) \cdot (\bar{e}_{ji} + e'_{ji}) = 2\bar{e}_{ij} \cdot \bar{e}_{ji} + 2e'_{ij} \cdot e'_{ji} \quad (15)$$

となる。ここで $\alpha = 2e'_{ij} \cdot e'_{ji}$ とおく。 α を求めるため, 乱流エネルギー散逸について考える。ニュートン流体の場合, 乱流エネルギー散逸は ν をニュートン流体における動粘性係数とすれば, $2\nu \bar{e}_{ij} \cdot e'_{ji}$ で与えられる。したがって, ビンガム塑性流体では, 3.1 節の結果より, 乱流エネルギー散逸は $2\nu_{eq} \bar{e}_{ij} \cdot e'_{ji}$ となる。これは式(13)で与えられる ε に等しいから, 結局

$$\varepsilon = 2 \frac{1}{\rho} \left(\mu_B + \frac{p_y}{\sqrt{2\bar{\Pi}}} \right) \bar{e}_{ij} \cdot e'_{ji} = \left(\mu_B + \frac{p_y}{\sqrt{2\bar{e}_{ij} \cdot \bar{e}_{ji} + \alpha}} \right) \frac{\alpha}{\rho} \quad (16)$$

となる。式(16)を式(12)~(14)と連立することによって, α や $2\bar{\Pi}$ は求めることができる。

4. 円管内乱流の解析

4.1 解析方法および解析条件 円管内において完全に発達したビンガム塑性流体の乱流の場合, 中心軸付近で, 流体中の応力が降伏値以下である領域があり⁽³⁾, その部分ではずり変形が生じない。そのため, その部分は, 一定速度で流れ, 流れは層流であると考えられる。流体中の応力が, 降伏値と一致する点の半径 r_y は, $r_y = 2p_y / (-\partial p / \partial z)$ で与えられる。したがって, 乱流エネルギーの境界条件は

$$r = r_y, R \text{ で } k=0 \quad (17)$$

となる。また流速は, Hencky の式⁽⁷⁾から求める。今回の解析では次式のようになる。

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r (\nu_t + \nu_{eq}) \frac{\partial u}{\partial r} \right\} \quad (18)$$

境界条件は, $r = r_y$ で $\partial u / \partial r = 0$, $r = R$ で $u = 0$ である。

式(18)は積分でき、次のようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{r}{2\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \frac{1}{\nu_t + \nu_{eq}} \quad \dots\dots\dots (19)$$

最後に、乱流エネルギー散逸 ε に関する境界条件を求める。Lam-Bremhorst が ε に関する境界条件を求めた方法⁽⁹⁾に従い、式(12)で $r=R$ とすれば、 $r=R$ で $\nu_t=0$ を考慮して次式を得る。

$$0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \nu_{eq} \frac{\partial k}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} - \varepsilon \Big|_{r=R} \quad \dots\dots\dots (20)$$

式(20)の右辺第1項の微分を実行して、 $r=R$ で $\partial k / \partial r = 0$ なる条件を考慮すれば、式(20)は次式となる。

$$\varepsilon \Big|_{r=R} = \nu_{eq} \frac{\partial^2 k}{\partial r^2} \Big|_{r=R} \quad \dots\dots\dots (21)$$

式(21)が $r=R$ における乱流エネルギー散逸の境界条件となる。しかし、この方法では $r=r_y$ における境界条件を求めることができない。その理由は、 $r=r_y$ で $\partial u / \partial r = 0$ という条件があるため、式(19)より、 $r=r_y$ で $\nu_{eq} = +\infty$ となるからである。そのため、 $r=r_y$ における境界条件は、 $\nu_{eq} = +\infty$ と、式(15)、(16)より求める。式(15)、(16)において $r=r_y$ とし、さらに $x=1/\nu_{eq}$ において α を消去すれば次式のようにになる。

$$\varepsilon \Big|_{r=r_y} = \rho_y^2 x \left\{ \frac{1}{(\rho - \mu_B x)^2} - \frac{1}{\rho^2} \right\} \quad \dots\dots\dots (22)$$

式(22)を導くにあたり、式(19)を用いて変形速度テンソルを消去し、また $r=r_y$ で $\nu_t=0$ なる条件も考慮している。式(22)が $x=0$ ($\nu_{eq} = +\infty$) なる解を持つためには、 $\varepsilon \Big|_{r=r_y} = 0$ が必要である。結局、境界条件は次式のようにになる。

$$\varepsilon \Big|_{r=r_y} = 0 \quad \dots\dots\dots (23)$$

式(12)～(16)および式(19)を、境界条件(17)、(21)、(23)のもとで数値解析する際の差分化の方法と半径方向メッシュ分割は文献⁽¹⁰⁾に従った。実際の計算では、半径方向メッシュ分割数は70を標準とし、メッシュ分割数を変化させても、解の変化は十分小さいことを確認した。また平均流速を求めるため、流速を数値積分する必要があるが、そのときの方法は、ガウス法によった。

次に数値計算を行った条件について示す。円管の内半径 R は、 $R=0.02, 0.03$ m とし、圧力こう配は $600 \sim 2000$ Pa/m とした。流体の種類は、6.75%、9.66%、21%のけいそう(珪藻)土でいしようとする。これらのでいしょうの物性値は

(i) 6.75%けいそう土

$$\rho = 1031 \text{ kg/m}^3, \mu_B = 0.0023 \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

$$\rho_y = 0.287 \text{ Pa}$$

(ii) 9.66%けいそう土

$$\rho = 1044 \text{ kg/m}^3, \mu_B = 0.003 \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

$$\rho_y = 0.331 \text{ Pa}$$

(iii) 21%けいそう土

$$\rho = 1057 \text{ kg/m}^3, \mu_B = 0.004 \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

$$\rho_y = 1.46 \text{ Pa}$$

である。無次元数の範囲は

$$Re : 1.45 \times 10^4 \sim 1.05 \times 10^5$$

$$Re_B : 2.72 \times 10^3 \sim 6.21 \times 10^4$$

$$He : 6.14 \times 10^4 \sim 3.47 \times 10^5$$

$$a : 9.57 \times 10^{-3} \sim 2.43 \times 10^{-1}$$

である。現時点において、さまざまな種類のビンガム塑性流体を用いた実験結果が得られているが、この数値計算条件は、これらの実験が行われている条件とほぼ同じ程度の無次元数を持つように定めてある。

4.2 摩擦抵抗係数 ここでは、管内における摩擦抵抗係数を本モデルに基づいて解析し、実験結果との比較・検討を行う。図1に、管内における摩擦抵抗係数に関する解析結果と実験曲線を示す。図1の実験曲線は文献⁽⁷⁾より引用したものであり、伊藤の定義したレイノルズ数 Re_B を用いれば、摩擦抵抗係数 λ_B は、ニュートン流体の場合と同じ形で書けることが示されている。すなわち、

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_B}} = 2.0 \log_{10} \{ Re_B \sqrt{\lambda_B} \} - 0.8 \quad \dots\dots\dots (24)$$

である。

式(24)と実験結果との比較は文献⁽⁷⁾で行われているが、その結果より式(24)と実験結果との差は最大10%程度であることがわかる。式(24)の実験結果を予測する精度を考慮すれば、本モデルによる解析結果が妥当なものであることは図1よりわかる。

なお、図1において21%けいそう土の解析結果のうち8点は、他の解析結果と少し異なった位置にあることがわかる。これは、これらの点のヘドストロム数が 3.47×10^5 で、他の点のヘドストロム数が $6.14 \times 10^4 \sim 1.54 \times 10^5$ の範囲内であるのに比べ、2倍以上大きいことが原因であると考えられる。

そのため、ヘドストロム数が十分大きい場合の摩擦抵抗係数についてさらに検討する必要があるが、そのようなヘドストロム数が大きい領域での実験値は少ない。例えば、文献⁽⁷⁾で、式(24)の妥当性を示すのに用いてある実験結果の最大ヘドストロム数は、 3.24×10^5 である。ここでは、本研究で導いたモデルは、ヘドストロム数が約 3×10^5 以下の領域において検証されたことを述べるにとどめ、これ以外の領域に対しては今後の課題と考える。

4.3 管内速度分布 まず、管内速度分布について

て、解析結果と実験結果の比較・検討を行う。文献⁽³⁾に管内の乱流速度分布を、ピトー管を用いて測定した結果が示されている。この実験と同じ条件下で解析した結果を図2に示す。

図2からわかるように、解析結果と実験結果とは、壁近傍を除いて良好な一致を示す。この実験では、ピトー管で流速が計測されているため、特に壁近傍ではピトー管により流れが乱される効果が無視できなくなり、測定誤差が大きくなることが予想できる。文献⁽³⁾のなかでも、このことは述べられているが、そのため壁近傍で差が生じたものと考えられる。

なお、図2に示した2ケースの管内摩擦抵抗係数を求め、 $P_1=1/\sqrt{\lambda_B}$, $P_2=2.0 \log_{10}\{Re_B\sqrt{\lambda_B}\}-0.8$ を計算してみれば、 $Re=1.45 \times 10^4$, $He=1.25 \times 10^5$ の場合(図2左), $P_1=4.66$, $P_2=4.93$ となり、 $Re=2.1 \times 10^4$, $He=4.9 \times 10^4$ の場合(図2右), $P_1=5.53$, $P_2=5.86$ となる。したがって、すでに述べた式(24)の予測精度の範囲内で両ケースとも、 $P_1=P_2$ となり、圧力損失は正しく求められていることがわかる。圧力損失を正しく評価するためには、壁近傍の速度分布を正しく解析することが必要であるから、この結果もまた、本解析の正しさを裏付けているものと考ええる。

次に壁近傍での速度分布の解析結果を図3に示す。図3には、ニュートン流体においてよく知られている壁法則、すなわち

$$\left. \begin{aligned} \frac{u}{u_*} &= y^+, & y^+ < 10 \\ \frac{u}{u_*} &= 2.5 \ln y^+ + 5.5, & y^+ > 10 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

を一点鎖線で示しておいた。

図3より、すべてのヘドストロム数に対してレイノルズ数が増加すると、解析結果は式(25)に近づいてゆ

図1 管内摩擦抵抗係数

く傾向を持つことがわかる。また、ヘドストロム数の増加は、解析結果を式(25)からずれる方向へ移動させることがわかる。一例として、 $He=3.45 \times 10^5$, $Re=6.10 \times 10^4$ の場合(図3(a))と、 $He=6.14 \times 10^4$, $Re=1.85 \times 10^4$ の場合(図3(c))と比較してみればわかるように、前者のほうがレイノルズ数が多いにもかかわらず、解析結果と式(25)との差は大きい。これらの結果は、ヘドストロム数の増加は塑性効果を強め、乱流を弱めていること、およびレイノルズ数の増加は乱流を強め、塑性効果を弱めていること、によると考えられ文献⁽³⁾と矛盾しない。

4.4 うず粘性係数 この節では円管内におけるうず粘性係数、特に壁近傍におけるうず粘性係数について検討する。図4に解析結果の一例を示す。

ニュートン流体の場合、壁近傍の完全に乱れた領域でのうず粘性係数は、 ν を動粘性係数として、 $\nu_t/\nu = \kappa y^+$ とかけることが知られている⁽⁶⁾。ここで κ は、円管の場合、 $\kappa=0.4$ で与えられる。そこで、 ν を ν_B でおきかえ、 $\nu_t/\nu_B=0.4 y^+$ のグラフを一点鎖線で図4に示す。図4にみられるように、本モデルから得られる ν_t/ν_B は、 $0.4 y^+$ より小さい。しかし、すべてのヘドストロム数に対して、レイノルズ数が増加すると、 ν_t/ν_B は $0.4 y^+$ に近づいてゆく傾向がある。この傾向は、ヘドストロム数が小さいほど著しい(図4(c))。逆にヘドストロム数が増加すると、レイノルズ数が大きくても ν_t/ν_B は $0.4 y^+$ から離れる方向へ移動する。このことは図4において、 $He=3.47 \times 10^5$, $Re=6.10 \times 10^4$ の場合(図4(a))と $He=6.14 \times 10^4$, $Re=3.61 \times 10^4$ の場合(図4(c))とを比較してみれば理解できる。

これらの結果もまた4.3節と同じように、ヘドストロム数の増加は塑性効果を強め乱流を弱めていること、およびレイノルズ数の増加は乱流を強め塑性効果を弱めていること、によると考えられる。

なお、 $\nu_t/\nu=0.4 y^+$ の関係式は、完全に乱れが発達している場合の式であるため、乱れが弱くなる壁のごく近傍では、この関係式は成り立たなくなる。したが

図2 管内速度分布

って、図4において、壁のごく近傍で ν_t/ν_B が $0.4y^+$ より小さくなることは当然の結果である。

4.5 乱流エネルギーおよび乱流エネルギー散逸 この節では、特に壁近傍での乱流エネルギーおよび乱流エネルギー散逸の分布について検討する。解析結果の一例を図5に示す。図5において、乱流エネルギー k は摩擦速度 u_* を用いて無次元形とし、乱流エネルギー散逸 ε は、 ν_B/u_*^3 を乗じて無次元形としている。

図5から、乱流エネルギーおよび乱流エネルギー散逸の分布は、いずれもニュートン流体の場合と定性的によく似ていることがわかる。また、レイノルズ数が大きくなると、乱流エネルギーおよび乱流エネルギー散逸の最大値はいずれも大きくなり、最大値をとる位置はいずれも壁に近づく方向に移動することがわかる。これは、レイノルズ数が小さくなると塑性的性質が強くなり、式(12)、(13)からわかるように乱流エネルギーおよび乱流エネルギー散逸の拡散定数が大きくなり、分布が平坦化したことが原因と考えられる。

次に乱流エネルギーの最大値 k_m および乱流エネルギー散逸の最大値 ε_m に着目し、これらの量のレイノルズ数依存性について検討する。まず乱流エネルギーの最大値のレイノルズ数依存性を図6(a)に示す。図より、すべてのヘドストロム数に対して、レイノルズ数が増加すると乱流エネルギーの最大値は上昇し、一定値に飽和する傾向を示す。また、その飽和値は、ヘドストロ

ム数に依存し、ヘドストロム数が小さいほど、飽和値は高くなっている。一方乱流エネルギー散逸の最大値のレイノルズ数依存性は、図6(b)に示されているが、乱流エネルギーの最大値とおなじく、すべてのヘドストロム数に対して、レイノルズ数の増加とともに上昇し、一定値に飽和する傾向を示す。またその飽和値は、わずかではあるがヘドストロム数が大きいほど高くなっている。これは、塑性的効果が強くなると、乱流エネルギーおよび乱流エネルギー散逸の拡散定数が大きくなり分布が平坦化すること、および式(7)において f_B がヘドストロム数とともに増加することによると考えられる。

4.6 中心軸付近における乱流エネルギー、乱流エネルギー散逸およびうず粘性係数 一般に円管内の速度分布は、中心軸付近でこう配がゆるやかになるため、塑性的効果は中心軸付近で大きくなる。そこで、この節では中心軸付近における解析結果について検討する。

図7(a)に、乱流エネルギーおよび乱流エネルギー散逸の分布を示す。この場合、比せん半径は0.243であるため、 $r/R=0.243$ において、乱流エネルギー k および乱流エネルギー散逸 ε はともに $k=\varepsilon=0$ となっている。乱流エネルギーおよび乱流エネルギー散逸はいずれも r/R とともに大きくなっており、 r/R の大きいところから拡散によって流れてきたことを示している。

(a) $H_e = 3.47 \times 10^5$

(b) $H_e = 1.54 \times 10^5$

(c) $H_e = 6.14 \times 10^4$

図3 壁近傍における速度分布

(a) $H_e = 3.47 \times 10^5$

(b) $H_e = 1.54 \times 10^5$

(c) $H_e = 6.14 \times 10^4$

図4 壁近傍におけるうず粘性係数の分布

次に図7(b)に、みかけの動粘性係数 ν_{eq} と ε による粘性係数 ν_t を示す。 $r/R=0.243$ において、 $\nu_{eq} = +\infty$ の境界条件があるため、 r/R が 0.243 に近づくと ν_{eq} は急激に大きくなる。なお参考として、層流の場合の ν_{eq} を式(26)に示す。式(26)を導くにあたり、文献⁽⁷⁾で示されている速度分布を用いた。

$$\nu_{eq} = \nu_B \left(1 + \frac{a}{r/R - a} \right) \dots\dots\dots (26)$$

また図7(b)の条件下では、レイノルズ数が 1.45×10^4 と比較的大きいにもかかわらず、 ν_t に対して ν_{eq} は、特に中心軸付近では無視することができず、相対的に乱れは弱くなっていることがわかる。

(a) 乱流エネルギー

(b) 乱流エネルギー散逸

図5 乱流エネルギーおよび乱流エネルギー散逸の分布

(a) 乱流エネルギーの最大値

(b) 乱流エネルギー散逸の最大値

図6 乱流エネルギーおよび乱流エネルギー散逸の最大値のレイノルズ数依存性

(a) 乱流エネルギーおよび乱流エネルギー散逸

(b) みかけの動粘性係数とうず粘性係数

図7 中心軸付近における解析結果

5. 結 言

ビンガム塑性流体の乱流解析を目的とした $k-\varepsilon$ モデルについて、Lam-Bremhorst によって提案されたモデルをベースとして検討した。検討の結果、塑性の効果により乱流エネルギー散逸が増加する効果を含める必要性が明らかとなったため、ここではその効果をヘドストロム数を用いて表した。

本モデルを、円管内において完全に発達した乱流の摩擦抵抗係数および速度分布の解析に適用し、実験結果との比較を行うことにより検証した。また壁近傍の速度分布を解析し、レイノルズ数が大きくなると塑性効果が弱くなり、ニュートン流体でよく知られている壁法則に近づくことを示した。さらに、本モデルより

得られる乱流エネルギーおよび乱流エネルギー散逸のレイノルズ数およびヘドストロム数依存性について検討を行った。

文 献

- (1) 富田, 機論, 24-141 (昭33), 288.
- (2) 北浦・ほか2名, 化学工学, 29-8 (昭40), 27.
- (3) 岐美・ほか3名, 日本原子力学会誌, 7-12 (昭40), 2.
- (4) 例えば, 石垣, 機誌, 87-785 (昭59), 335.
- (5) Jones, W. P. and Launder, B. E., *Int. J. Heat Mass Transfer*, 15-2 (1972), 309.
- (6) 長野・ほか2名, 機論, 50-457, B (昭59), 2022.
- (7) 富田, レオロジー, (昭50), 315, コロナ社.
- (8) Owen, P. R., *J. Fluid. Mech.*, 39-2 (1969), 407.
- (9) Lam, C. K. G. and Bremhorst, G., *Trans. ASME, J. Fluid. Eng.*, 103-3 (1981), 456.
- (10) 河村, 機論, 39-324, B (昭48), 2498.

討 論

〔質問〕 加藤 宏・水沼 博

〔東京都立大学工学部〕

(1) ビンガム塑性流体の大きな特徴はずり応力が降伏値以下のときに剛体としてふるまうことである。しかし貴論文ではこの塑性の効果は管中心部に一樣速度の層流部が存在するという仮定にのみ直接関係している。流れは乱流で変動を含んでおり、管中心部においてもずり応力は常に降伏値以下とは限らないであろうし、またたとえずり応力が常に降伏値以下としても半径 r_0 は図2をみても無視できるほどの大きさであるから、解析には塑性の効果は直接あらわれていないのではないか。ビンガム塑性モデルは使用できるずり速度範囲も限られるであろうから、他の純粘性モデルを用いたほうがよいのではないか。

(2) $k-\varepsilon$ モデルが優れているのは、種々の流れ場に対し精度良く乱流諸量を計算できる点にある。これに対し式(7)のような定式化をしたのでは計算の対象が円管内の流れに限られてしまい、あえて $k-\varepsilon$ モデルを用いた意義が弱くなるのではないか。

〔回答〕 (1) 塑性の効果は、(i)構成方程式の $\rho_0/\sqrt{2\pi} \cdot \bar{\varepsilon}_{ij}$ の項, (ii)境界条件 (4・1節), (iii)乱流エネルギー散逸の生成項, を通じてあらわれており, (i), (ii)の効果は特に中心軸付近で顕著となる(図7)。 (iii)の効果が無視できないことは、長谷川氏への回答(3)で述べたとおりである。なお本報で述べた結果は、ご指摘のとおり比せん半径が比較的小さい場合にかぎられていたが、島・辻野氏への回答(1)で述べたように、現在より低いレイノルズ数の流れ(比

せん半径は大きくなる)へも本モデルを適用し、解析を行っている。

一般に、他のモデル(べき乗則モデルなど)でもモデル中に含まれる定数をえらぶことによって、ビンガム塑性流体を近似的に表すことは可能であるから、質問者のご指摘どおり、他のモデルを用いることも考えられる。しかし、これまで Hencky の式はスラリーの乱流解析によく用いられてきており、ここであえて他のモデルを用いる意義は弱いと考える。ただし、Hencky の式の数学的な取扱いを容易にする目的で他のモデルを用いることは十分意味があるが、これは次のステップでの課題と考える。

(2) これまで、ビンガム塑性流体の乱流実験はそのほとんどが円管を用いて行われていたため、質問者のご指摘どおり、降伏応力を含んだ無次元数は円管内流れを対象としたものが多い。しかし、ヘドストロム数は物性値と代表長さのみを含んでいるため、代表長さをえらぶことによって他の流れに対しても適用可能と考えられる。今回の報告では、既存の実験結果を再現することを目的としたため円管内流れに限定したが、それ以外の流れへの拡張は今後の課題と考えたい。

〔質問〕 島 章・辻野 智二

〔東北大学高速力学研究所〕

(1) 式(8)の A の値の決定には、いかなるデータを用いたか。また、この値の適用範囲についてお聞きしたい。

(2) 塑性効果とは、レオロジー的にどういう意味

か。

(3) 数値計算に用いたけい藻土でいしょうの物性はいかなる文献によるものかご教示願いたい。

〔回答〕 (1) 摩擦抵抗係数の実験値、および管内速度分布の実験値（いずれも文献名は本文中に示されている）に基づいてきめた。ビンガム塑性流体の場合、実験結果がニュートン流体ほど多くないために、可能なかぎり物理的意味に基づいて考察を進め、実験結果と比較して決定すべき定数の数を減少させた。なお、この式の有効範囲であるが、現在さらに広い範囲にわたって計算を進めており、それによると乱流に移した程度のレイノルズ数を持つ流れの摩擦抵抗係数や、臨界レイノルズ数付近で乱流エネルギーが消失することなどもほぼ正しく表せており、レイノルズ数に対しては十分広い適用範囲を有していると考えられる。なお、ヘドストロム数に対しては、本文中でも述べたように約 3×10^5 以上の領域ではさらに検討する必要がある。

(2) 具体的には、(i) 速度こう配の減少とともにみかけの粘性係数が増加すること、および(ii) 流体中の応力が降伏応力以下の領域ではずり変形が生じないこと、であり流体が降伏応力を持つことによって生ずる効果を示したものである。

(3) 文献に当然含めるべきであるが記入もれがあった。ご指摘に感謝する。文献名は文献(付1)のとおりである。

〔質問〕 長谷川 富市〔新潟大学工学部〕

(1) 円柱座標系を使用しているので第2不変量IIの表示は $2II = e^{ij}e_{ji}$ とすべきと思われるが、いかがか。

(2) ビンガム流体の構成方程式と運動方程式を組合せ簡単化を行って式(9)~(11)に対応するビンガム流体の $k-\varepsilon$ モデルは導出できないものか。そうすれば乱流エネルギー散逸の生産項にのみビンガム塑性流体の影響を入れるという仮定や式(7)の仮定も不必要になると思われるが、いかがか。

(3) $H_0 = 3.47 \times 10^5 \sim 6.14 \times 10^4$ に対応して $f_B = 1.14 \sim 1.025$ になり高々10%程度の f_B の増加である。

生産項のこの程度の増加が、図4~6に示された計算結果の主たる原因とは考えにくい。例えば $f_B = 1.0$ として式(12)~(14)、(16)を用いて計算するとどのようになるのか。また図5~7にニュートン流体の場合も記入されたほうがよいように思われるが、いかがか。

〔回答〕 (1) 本報では、 e_{ij} は工学上通常用いられる変形速度テンソルを示しており〔具体的な表示は、本文中の文献(7)参照〕、 e_{ij} をこのように定義すると、円柱座標系でも $2II = 2e_{ij} \cdot e_{ji}$ となる。なお、厳密なテンソルの意味での表示方法は、質問者のご指摘のとおりである。

(2) ニュートン流体の $k-\varepsilon$ モデルでも、特に ε に対する方程式は高度にモデル化されており(付2)、多くの仮定に基づいている。したがって、Henckyの式から $k-\varepsilon$ モデルを導く場合でも、多くの仮定が必要となるため、質問者の方法には多くの困難が伴うものと考ええる。

(3) $f_B = 1.0$ とすると、 $1/\sqrt{\lambda_B}$ は図1の実験曲線に対し、20%程度小さくなり、すべての計算結果において摩擦抵抗係数を過大評価する。乱流エネルギー散逸の生成項が10%程度変化すると、結果に強い影響を与えることは他の研究(付3)でも示されている。なお、図5~7で、ニュートン流体の値を示さなかったのは次の理由による。

(i) $k-\varepsilon$ モデルはニュートン流体において多くの問題に適用され成功をおさめているが、実験結果との比較はおもに速度分布、圧力分布を通じて行われており、乱流エネルギー分布や乱流エネルギー散逸の分布に関して、実験結果と比較・検討された例はあまり多くない。そのため、ニュートン流体においても乱流エネルギーや乱流エネルギー散逸に関してはさらに検討を行う必要があるように考える。このような現状のもとでは、ビンガム塑性流体の乱流エネルギーや乱流エネルギー散逸に対し、ニュートン流体の値と定量的な比較を行う意義は弱いように考える。

(ii) 図5~7はビンガム塑性流体の特徴を定性的に示すための図である。特に図7においては、ニュートン流体との差はあきらかである。

(付1) 平井, 化学技術者のためのレオロジー, (昭53), 158, 科学技術社。

(付2) 石垣, 機誌, 87-785 (昭59), 338.

(付3) 西島・吉澤, ながれ, 3-3 (昭59), 295.