非一様磁場下での液体金属ジェットの形状*
(第2報, 円形ノズルから噴出するジェットの解析)大島修造**, 山根隆一郎**
持丸義弘**, 松岡俊宏***The Shape of Liquid Metal Jets under a Non-Uniform Magnetic Field
(2nd Report, Analysis of Jets Issuing from Circular Nozzles)by Shuzo OSHIMA, Ryuichiro YAMANE,
Yoshihiro MOCHIMARU, and Toshihiro MATSUOKA

The shape of a horizontal slender jet of a liquid metal issuing from non-conducting circular nozzles under a non-uniform magnetic field is discussed. Our primary interests are to determine the shape of the free surface of the jet under such a field, and to demonstrate the possibility of the magnetic shape-control of liquid metal jets. The basic equations of MHD flows are simplified by neglecting the terms concerning the viscosity, and solutions of the approximate analysis are presented. Parameters on which the magnetic shaping of jets are dependent are made clear. A jet with a circular initial shape forms a thin sheet, but maintains the same cross-sectional area. The shapes obtained by the approximate analysis are shown to be in good agreement with those of the experimental results.

Key Words: Fluid Mechanics, Magnetohydrodynamics, Liquid Metal Jet, Non-Uniform Magnetic Field, Metallurgy, Continuous Casting, Magnetic Shape-Control

1. 緒 言

磁場こう配下での液体金属ジェットの形状変化に関して, 前報⁽¹⁾では水銀を用いた実験の結果を報告した。本報では円形ノズルから噴出する液体金属ジェットの形状変化について, 変形量が小さな範囲での近似解析を行う。磁場が作用しない通常の液体ジェットの解析は Rayleigh⁽²⁾, Weber⁽³⁾の理論に始まり, これまで数多くの研究がなされており, ジェットの形状, 界面の安定性理論, ジェットの崩壊長さなどが詳細に議論されている。液体ジェットの形状変化に関連した研究に限っても数多くの解析結果が報告されており, Taylor⁽⁴⁾, Clarke⁽⁵⁾, Longuet-Higgins⁽⁶⁾, Tuch⁽⁷⁾, Green⁽⁸⁾, Geer⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾らの研究成果に興味ある結果を見出すことができる。

近年, 変動磁界を利用して溶融金属流の界面形状を非接触に制御することが考えられており, Shercliff⁽¹¹⁾が柱状溶融金属の変動磁界による形状変化に関して解析結果を報告しているが, 表面張力と電磁力の静的な

釣り合いから形状を求めており, 流動は考慮されていない。そこで本論文では, 磁場こう配による形状変化に関して, 流動を考慮した準三次元的な解析を行う。解析により, まず, まだ明らかにされていない磁場こう配下での液体金属ジェットの形状を求め, 表面張力, 磁場の強さ, 磁場分布などの影響を明らかにし, 最後に実験結果との比較検討を行う。

2. 主な使用記号

a : ノズルの半径
 B_0 : 印加磁束密度 ($B_0 = |B_0|$)
 B_{0u} : 一様印加磁束密度 ($B_{0u} = |B_{0u}|$)
 b_n : く形ノズルの幅
 d : ノズルの内径 $= 2a$
 h_n : く形ノズルの高さ
 i_r, i_θ : r, θ 方向単位ベクトル
 J : 電流密度
 j, k : y, z 方向単位ベクトル
 L : ジェットの主流方向の代表長さ
 L_m : 印加磁場のこう配部の代表長さ
 N_a : スチュアート数 $= \sigma_e B_{0u}^2 a / \rho_j w_0$
 p : 圧力
 p_a : 大気圧

* 昭和61年4月1日 第63期通常総会講演会において講演, 原稿受付 昭和60年9月13日。

** 正員, 東京工業大学工学部 (〒152 東京都目黒区大岡山2-12-1)。

*** 日本国有鉄道 (〒100 東京都千代田区丸の内1-1)。

r, θ, z : 円柱座標

r_1, r_2 : ジェットの境界の主曲率

r_p, r_{ps} : 位置ベクトル

s : ジェットの境界の r 座標

v : 速度

W_a : ウェーバ数 $= \rho_f a \omega_0^2 / \sigma$

w_0 : 主流速度

x, y, z : 直角座標

$\varepsilon = a/L$

$\varepsilon_m = a/L_m$

ρ^* : 無次元座標 $= r/s(\theta, z)$

ρ_f : 流体の密度

σ : 表面張力

σ_e : 導電率

ϕ : 電場ポテンシャル

3. 解 析

磁場こう配中に噴出される細長い液体金属ジェットの定常三次元流れの解析を行う。ジェットは磁場こう配部から十分離れた一様磁場内から噴出され、初期の断面形状は円形で流速は一様と仮定する。解析の主眼は磁場こう配による断面形状の変化に置き、表面張力を考慮した解析を行う。なお、重力と粘性の影響は省略する。

3.1 基礎方程式 磁場の作用を受ける液体金属の非粘性定常流に関する基礎式はベクトル表示で

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_f} \nabla p + \frac{1}{\rho_f} \mathbf{J} \times \mathbf{B}_0 \quad (1)$$

$$\mathbf{J} = \sigma_e (-\nabla \phi + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_0 = 0 \quad (5)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}_0 = 0 \quad (6)$$

である。ここで、次の無次元量を導入する。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}^* &= \mathbf{v}/w_0, \quad p^* = p/\rho_f w_0^2 \\ \phi^* &= \phi/a w_0 B_{0u} \\ \mathbf{J}^* &= \mathbf{J}/\sigma_e w_0 B_{0u} \\ \nabla^* &= a \nabla, \quad \mathbf{B}_0^* = \mathbf{B}_0/B_{0u} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

上式を用いれば、式(1)～(6)は

$$(\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{v}^* = -\nabla^* p^* + N_a (\mathbf{J}^* \times \mathbf{B}_0^*) \quad (8)$$

$$\mathbf{J}^* = -\nabla^* \phi^* + \mathbf{v}^* \times \mathbf{B}_0^* \quad (9)$$

$$\nabla^* \cdot \mathbf{v}^* = 0 \quad (10)$$

$$\nabla^* \cdot \mathbf{J}^* = 0 \quad (11)$$

$$\nabla^* \cdot \mathbf{B}_0^* = 0 \quad (12)$$

$$\nabla^* \times \mathbf{B}_0^* = 0 \quad (13)$$

となる。ここで、 N_a は円形ノズルの半径 a を代表長

さとするスチュアート数で $N_a = \sigma_e B_{0u} a / \rho_f w_0$ である。

3.2 基礎方程式の近似 細長い円形ジェットの断面形状は電磁力によって緩やかに変化するものと仮定する。まず、無次元流速 $\mathbf{v}^*$ を次のように表す。

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{v}_0^* + \mathbf{v}'^* \quad (14)$$

ここで、 $\mathbf{v}_0^*$ は無次元一様流速、 $\mathbf{v}'^*$ は変形に伴う無次元変動速度で、 $|\mathbf{v}'^*| \ll |\mathbf{v}_0^*|$ と仮定する。式(8)、(9)に上式を代入し、微小項を省略すると次式を得る。

$$(\mathbf{v}_0^* \cdot \nabla^*) \mathbf{v}'^* = -\nabla^* p^* + N_a (\mathbf{J}^* \times \mathbf{B}_0^*) \quad (15)$$

$$\mathbf{J}^* = -\nabla^* \phi^* + \mathbf{v}_0^* \times \mathbf{B}_0^* \quad (16)$$

上式と式(10)～(14)より、無次元圧力 p^* と無次元電場ポテンシャル ϕ^* の方程式として次式を得る。

$$\Delta^* p^* = -\frac{1}{2} N_a (\mathbf{v}_0^* \cdot \nabla^*) B_0^{*2} \quad (17)$$

$$\Delta^* \phi^* = 0 \quad (18)$$

ここで、 B_0^* は $|\mathbf{B}_0^*|$ を表す。無次元印加磁束密度分布 B_0^* は磁石の特性で定まった既知関数である。したがって式(17)は Poisson 方程式である。

磁場こう配部から十分に離れた一様磁場内では、速度が一様な非粘性ジェット内に誘導電流は生じない。したがって、一様磁場内での無次元電場ポテンシャルを ϕ_u^* 、無次元一様印加磁束密度を B_{0u}^* とすると式(16)より次式を得る。

$$\nabla^* \phi_u^* = \mathbf{v}_0^* \times \mathbf{B}_{0u}^* = \mathbf{C}_1 \quad (19)$$

ここで、 $\mathbf{C}_1$ は定数ベクトルである。上式を解くと

$$\phi_u^* = \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{r}_p^* + \mathbf{C}_2 = (\mathbf{v}_0^* \times \mathbf{B}_{0u}^*) \cdot \mathbf{r}_p^* + \mathbf{C}_2 \quad (20)$$

ここで、 $\mathbf{C}_2$ は任意定数、 $\mathbf{r}_p^*$ は無次元位置ベクトルである。こう配が非常に緩やかな場合には、上式が磁場こう配部でも近似的に成立するものと考えられる。そこで、無次元電場ポテンシャル ϕ^* を次のように置く。

$$\left. \begin{aligned} \phi^* &= \phi_0^* + \phi'^* \\ \phi_0^* &= (\mathbf{v}_0^* \times \mathbf{B}_0^*) \cdot \mathbf{r}_p^* \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

ϕ'^* は印加磁場のこう配によって引き起こされる付加的な電場ポテンシャルを表し、こう配が緩やかな場合、 $|\phi'^*| \ll |\phi_0^*|$ が成立するものと考えられる。

ここで、次式のような無次元円柱座標を考える (図1)。

$$\left. \begin{aligned} z^* &= z/L, \quad r^* = r/a \\ \theta^* &= \theta \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

ここで、 L はジェットの主流方向の代表長さで、ジェットは緩やかに変形するものとし、 $a \ll L$ と仮定する。また、無次元印加磁束密度分布 $\mathbf{B}_0^*$ および無次元主流速度 $\mathbf{v}_0^*$ を次のように置く。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B}_0^* &= B^*(z^*) \mathbf{j} \\ \mathbf{v}_0^* &= k \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

ここで, j, k はそれぞれ y 軸方向単位ベクトルと z 軸方向単位ベクトルである. 式(18)に式(21)~(23)を代入すると次式を得る.

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial \phi'^*}{\partial r^*} \right) + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 \phi'^*}{\partial \theta^{*2}} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \phi'^*}{\partial z^{*2}} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \phi_0^*}{\partial z^{*2}} = 0 \quad (24)$$

ここで, $\varepsilon = a/L$ で, $\varepsilon \ll 1$ と仮定する. また, ϕ'^* は次式のような ε^2 のべき級数で表せるものとする.

$$\phi'^* = \varepsilon^2 \phi_1^* + \varepsilon^4 \phi_2^* + \cdots + (\varepsilon^2)^n \phi_n^* + \cdots \quad (25)$$

上式を式(24)に代入し, ε の同べきの項を集めると, 次式を得る.

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial \phi_{n+1}^*}{\partial r^*} \right) + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 \phi_{n+1}^*}{\partial \theta^{*2}} = -\frac{\partial^2 \phi_n^*}{\partial z^{*2}} \quad (n \geq 0) \quad (26)$$

一方, 式(17)に式(23)を代入すると無次元圧力 p^* の方程式として次式を得る.

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial p^*}{\partial r^*} \right) + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 p^*}{\partial \theta^{*2}} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 p^*}{\partial z^{*2}} = -\frac{1}{2} \varepsilon N_a G^*(z^*) \quad (27)$$

ここで $G^*(z^*) = dB^2(z^*)/dz^*$ である. 上式の左辺第3項を微小項として省略し, 次のように近似する.

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial p^*}{\partial r^*} \right) + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 p^*}{\partial \theta^{*2}} = -\frac{1}{2} \varepsilon N_a G^*(z^*) \quad (28)$$

上式の右辺は既知関数であるため, 式(28)は (r^*, θ^*) 平面内で境界条件が与えられれば, 任意の z^* において解くことができる.

ここで運動方程式(15)の右辺のオーダ評価を行う. 式(15)の右辺を F^* とし, 次のように置く.

$$F^* = F_p^* + F_m^* = -\nabla^* p^* + N_a (J^* \times B_0^*) \quad (29)$$

ここで, F_p^* は圧力項, F_m^* は電磁力項を表す. 上式の無次元電流密度 J^* の成分は式(16), (21), (25)より次式で表される.

$$\left. \begin{aligned} J_r^* &= -\varepsilon^2 \frac{\partial \phi_1^*}{\partial r^*} + O(\varepsilon^4) \\ J_\theta^* &= -\frac{\varepsilon^2}{r^*} \frac{\partial \phi_1^*}{\partial \theta^*} + O(\varepsilon^4) \\ J_z^* &= \varepsilon \frac{\partial \phi_0^*}{\partial z^*} + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

したがって F_p^*, F_m^* の各成分は次のようなオーダをもつことがわかる.

$$\left. \begin{aligned} F_{pr}^* &\sim O(1), F_{p\theta}^* \sim O(1), F_{pz}^* \sim O(\varepsilon) \\ F_{mr}^* &\sim O(\varepsilon N_a), F_{m\theta}^* \sim O(\varepsilon N_a), F_{mz}^* \sim O(\varepsilon^2 N_a) \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

上式より, 主流方向に作用する力は, それに垂直な断面内方向に作用する力に比べて小さいことがわかる. 仮定により $\varepsilon \ll 1$ であるから, 無次元変動速度 v^* の各成分に次の関係が成立する.

$$|v_r^*|, |v_\theta^*| \gg |v_z^*| \quad (32)$$

したがって, 電磁力による細長いジェットの変形に際して, 断面積の変化は断面形状の変化に比べて小さいことが予想される. このことは前報⁽¹⁾の実験結果と一致している.

式(15)に式(16), (21), (25)および式(30)を代入すると無次元変動速度 v^* の r 方向成分 v_r^* と θ 方向成分 v_θ^* の方程式として次式を得る.

$$\varepsilon \frac{\partial v_r^*}{\partial z^*} = -\frac{\partial}{\partial r^*} \left[p^* + \frac{1}{4} \varepsilon N_a r^{*2} G^*(z^*) \cos^2 \theta^* \right] \quad (33)$$

$$\varepsilon \frac{\partial v_\theta^*}{\partial z^*} = -\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial \theta^*} \left[p^* + \frac{1}{4} \varepsilon N_a r^{*2} G^*(z^*) \times \cos^2 \theta^* \right] \quad (34)$$

したがって, 電磁力による細長いジェットの形状変化を近似的に求めるには, 圧力の方程式(28)と, 変動速度の方程式(33), (34)を適当な境界条件のもとに解くことになる.

3.3 境界条件 次に境界条件を定式化する. まず, ジェットの境界を表す位置ベクトル r_{ps} を次のように置く.

$$r_{ps}(\theta, z) = z k + s(\theta, z) i_r \quad (35)$$

したがって, 境界上の二つのベクトル e_θ, e_z は次式で与えられる.

$$e_\theta = \frac{\partial r}{\partial \theta} = \frac{\partial s}{\partial \theta} i_r + s \frac{\partial i_r}{\partial \theta} = s_\theta i_r + s i_\theta \quad (36)$$

$$e_z = \frac{\partial r}{\partial z} = k + \frac{\partial s}{\partial z} i_r = k + s_z i_r \quad (37)$$

ここで, s の添字は添字による偏微分を意味する. ジェット境界曲面の法線ベクトル e_n は次式で求まる.

図1 座標系

$$\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_z = s\mathbf{i}_r - s_\theta\mathbf{i}_\theta - ss_z\mathbf{k} \quad \dots\dots\dots(38)$$

一方、速度ベクトル $\mathbf{v}$ は式(14), (32)より次式で近似される。

$$\mathbf{v} = v_r\mathbf{i}_r + v_\theta\mathbf{i}_\theta + w_0\mathbf{k} \quad \dots\dots\dots(39)$$

流体は境界面に沿って流れることから境界面上で次式が成立する。

$$\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{v} = sv_r - s_\theta v_\theta - ss_z w_0 = 0 \quad \dots\dots\dots(40)$$

上式を無次元量で表すと次式を得る。

$$\varepsilon s^* s_z^* = s^* v_r^* - s_\theta^* v_\theta^* \quad \dots\dots\dots(41)$$

次に、表面張力の影響を考慮して圧力の境界条件を導く。大気圧を p_a とおくと表面張力による内圧の増加 δp は次式で与えられる。

$$\delta p = p - p_a = \sigma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad \dots\dots\dots(42)$$

ここで、 r_1, r_2 は境界面の主曲率であり、上式の括弧内は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = & -\{s^2(1+s_z^2)+s_\theta^2\}^{-3/2} \cdot \{ss_{zz}(s^2 \\ & +s_\theta^2) - 2(ss_{\theta z} - s_z s_\theta)s_z s_\theta \\ & + (1+s_z^2)(ss_{\theta\theta} - 2s_\theta^2 - s^2)\} \quad \dots\dots\dots(43) \end{aligned}$$

上式を無次元量で表すと次のようになる。

$$\frac{1}{r_1^*} + \frac{1}{r_2^*} = \frac{s^{*2} + 2s_\theta^{*2} - s^* s_\theta^* \theta^*}{(s^{*2} + s_\theta^{*2})^{3/2}} + O(\varepsilon^2) \quad \dots\dots\dots(44)$$

式(42), (44)を用いると境界面上の無次元圧力 p^* は次式で近似される。

$$p^* = \frac{1}{W_a} \cdot \frac{s^{*2} + 2s_\theta^{*2} - s^* s_\theta^* \theta^*}{(s^{*2} + s_\theta^{*2})^{3/2}} \quad \dots\dots\dots(45)$$

ここで、 W_a は円形ノズルの半径を代表長さとするウェーバ数で $W_a = \rho_f a w_0^2 / \sigma$ である。なお、上式の誘導に際して、大気圧 $p_a = 0$ と置いた。

以上から、式(41)が変動速度 v^* 、式(45)が圧力 p^* の境界条件となる。

3.4 近似解の誘導 まず、無次元圧力 p^* 、無次元境界 s^* をそれぞれ次のように置く。

$$p^* = -\frac{1}{8}\varepsilon N_a G^*(z^*)(r^{*2}-1) + \frac{1}{W_a} + \psi^* \quad \dots\dots\dots(46)$$

$$s^*(\theta^*, z^*) = 1 + s'^*(\theta^*, z^*) \quad \dots\dots\dots(47)$$

ここで、 s'^* は境界の変動成分を表し、微小変形を仮定し $|s'^*| \ll 1$ と仮定する。さらに、解析を容易にするため、次のような座標変換を行う。

$$\left. \begin{aligned} (r^*, \theta^*, z^*) & \rightarrow (\rho^*, \theta^*, z^*) \\ \rho^* & = \frac{r^*}{s^*(\theta^*, z^*)} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(48)$$

新しい座標系では、境界面はつねに $\rho^* = 1$ に対応する。式(46), (47)を代入し、式(48)の座標変換を行い、

さらに、 $|s'^*| \ll 1$ の仮定のもとに微小項を省略すると、式(28), (33), (41)はそれぞれ次のように近似される。

$$\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial}{\partial \rho^*} \left(\rho^* \frac{\partial \psi^*}{\partial \rho^*} \right) + \frac{1}{\rho^{*2}} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \theta^{*2}} = 0 \quad \dots\dots\dots(49)$$

$$\varepsilon \frac{\partial v_r^*}{\partial z^*} = -\frac{\partial}{\partial \rho^*} \left[\psi^* + \frac{1}{8}\varepsilon N_a \rho^{*2} G^*(z^*) \cos 2\theta^* \right] \quad \dots\dots\dots(50)$$

$$\varepsilon \frac{\partial s'^*}{\partial z^*} = v_r^* \quad (\rho^* = 1) \quad \dots\dots\dots(51)$$

なお、式(51)の誘導に際して、式(41)を境界 s^* の方程式と考え、式(41)の右辺第2項は式(47)より微小項として省略し、左辺はそのまま残した。結局、上式が近似解を導出する際の方方程式となる。

式(45)~(48)より ψ^* の境界条件として次式を得る。

$$\psi^* = -\frac{1}{W_a} (s'^* + s_\theta^{*2} \theta^*) + \frac{1}{4}\varepsilon N_a G^*(z^*) s'^* \quad (\rho^* = 1) \quad \dots\dots\dots(52)$$

ここで、式(49)~(51)の解を次のように置く。

$$\begin{aligned} \psi^* & = f_{\psi 1}^*(\rho^*) g_{\psi 1}^*(z^*) \cos \theta^* + f_{\psi 2}^*(\rho^*) g_{\psi 2}^*(z^*) \\ & \times \cos 2\theta^* + \dots + f_{\psi n}^*(\rho^*) g_{\psi n}^*(z^*) \cos n\theta^* \\ & + \dots\dots\dots(53) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_r^* & = f_{v 1}^*(\rho^*) g_{v 1}^*(z^*) \cos \theta^* + f_{v 2}^*(\rho^*) g_{v 2}^*(z^*) \\ & \times \cos 2\theta^* + \dots + f_{v n}^*(\rho^*) g_{v n}^*(z^*) \cos n\theta^* \\ & + \dots\dots\dots(54) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s'^* & = g_{s 1}^*(z^*) \cos \theta^* + g_{s 2}^*(z^*) \cos 2\theta^* + \dots \\ & + g_{s n}^*(z^*) \cos n\theta^* + \dots\dots\dots(55) \end{aligned}$$

式(49)に式(53)を代入すると次式を得る。

$$\frac{1}{\rho^*} \frac{d}{d\rho^*} \left(\rho^* \frac{df_{\psi n}^*}{d\rho^*} \right) - \frac{n^2}{\rho^{*2}} f_{\psi n}^* = 0 \quad (n \geq 1) \quad \dots\dots\dots(56)$$

$\rho^* = 0$ において $f_{\psi n}^*$ は有界であるから上式の解は次のようになる。

$$f_{\psi n}^* = A_n \rho^{*n} \quad \dots\dots\dots(57)$$

式(52)に式(53), (55), (57)を代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned} A_n g_{\psi n}^*(z^*) & = \left\{ \frac{1}{W_a} (n^2 - 1) + \frac{1}{4}\varepsilon N_a G^*(z^*) \right\} \\ & \times g_{s n}^*(z^*) \quad (n \geq 1) \quad \dots\dots\dots(58) \end{aligned}$$

また、式(50), (51)に式(53)~(55)および式(57)を代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \varepsilon f_{v n}^*(\rho^*) \frac{dg_{v n}^*(z^*)}{dz^*} & = -n A_n \rho^* g_{\psi n}^*(z^*) \\ & - \frac{1}{4}\varepsilon N_a \delta_{2n} \times \rho^* G^*(z^*) \quad \dots\dots\dots(59) \end{aligned}$$

$$\varepsilon \frac{dg_{s n}^*(z^*)}{dz^*} = f_{v n}^*(1) g_{v n}^*(z^*) \quad \dots\dots\dots(60)$$

ここで、 $\delta_{ij} = 0 (i \neq j)$, $\delta_{ij} = 1 (i = j)$ である。式(58)

～(60)より, 境界の変動成分 s^* を決定する $g_{sn}^*(z^*)$ の方程式として次式を得る.

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 g_{sn}^*(z^*)}{dz^{*2}} = -\frac{1}{W_a} n(n^2-1) g_{sn}^*(z^*) - \frac{1}{4} \varepsilon N_a \{ \delta_{2n} + n g_{sn}^*(z^*) \} \cdot G(z^*) \dots (61)$$

上式の右辺第1項は表面張力項, 第2項は電磁力項である. 電磁力が働かない場合 ($N_a=0$), $g_{sn}^*(z^*)$ は次のような振動解をもつ.

$$g_{sn}^*(z^*) = D_n R_n [e^{i(\omega_n^* z^* + \varphi_n)}] \dots (62)$$

ここで, D_n, φ_n は任意定数であり, ω_n^* は次式で与えられる無次元角振動数である.

$$\omega_n^* = \sqrt{\frac{n(n^2-1)}{\varepsilon^2 W_a}} \dots (63)$$

波長 λ_n は次式で与えられる.

$$\lambda_n = 2\pi a \sqrt{\frac{W_a}{n(n^2-1)}} \dots (64)$$

上式は Rayleigh⁽²⁾による解析結果と一致しており n モードの形状かく乱をもつジェットの断面形状は上式で与えられた波長 λ_n で流れ方向に振動する.

変形は小さいと仮定しているが $|g_{sn}^*(z^*)| \ll 1$, さらに変動成分 s^* の θ 方向偏微係数も小さいものと仮定すると次式が成立する.

$$|n g_{sn}^*(z^*)| \ll 1 \dots (65)$$

上式が成立する比較的滑らかな変形範囲内では式(61)の電磁力項のうち $n=2$ モードの変形が重要となる. このことは, 電磁力による変形が渦電流に基づいていることからもうなずける. したがって, 以下の円形ジェットの電磁力による変形では $n=2$ モードの変形を考える. 式(65)を考慮すると, 電磁力によるジェット断面形状の変化を表す方程式として式(61)より次式を得る.

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 g_{s2}^*(z^*)}{dz^{*2}} = -\frac{6}{W_a} g_{s2}^*(z^*) - \frac{1}{4} \varepsilon N_a G^*(z^*) \dots (66)$$

ここで, 次のような負のこう配をもつ印加磁場を考える (図2).

$$B_0^{*2}(z^*) = \frac{1}{2} \left(1 - \tanh \frac{L}{L_m} z^* \right) \dots (67)$$

ここで, L_m は磁場こう配の代表長さである. $G^*(z^*) = dB_0^{*2}(z^*)/dz^*$ であるから, 上式を式(66)に代入すると次式を得る.

$$\left(\frac{d^2}{dz^{*2}} + \frac{6}{W_a} \right) g_{s2}^*(z^*) = \frac{\varepsilon_m N_a}{8} \frac{1}{\cosh^2(\varepsilon_m z^*)} \dots (68)$$

ここで, $\varepsilon_m = a/L_m$, $z'^* = z^*/\varepsilon$ である. 上式を $g_{s2}^* = dg_{s2}/dz'^* = 0 (z'^* \rightarrow -\infty)$ の境界条件のもとに解くと

解として次式を得る.

$$g_{s2}^*(z'^*) = \beta \sin(\alpha z'^*) \int_{-\infty}^{z'^*} \frac{\cos(at)}{\cosh^2(\varepsilon_m t)} dt - \beta \cos(\alpha z'^*) \int_{-\infty}^{z'^*} \frac{\sin(at)}{\cosh^2(\varepsilon_m t)} dt \dots (69)$$

ここで, $\alpha = \sqrt{6/W_a}$, $\beta = \varepsilon_m N_a / 8\alpha$ である. 上式が式(67)の印加磁場分布による形状変化の近似解である. 表面張力の影響が無視できる場合には, 式(68)の左辺第2項は省略できる. 表面張力項を省略し, 同様の境界条件のもとに解くと解として次式を得る.

$$g_{s2}^*(z'^*) = \frac{N_a}{8} \left\{ z'^* + \frac{1}{\varepsilon_m} \log(e^{\varepsilon_m z'^*} + e^{-\varepsilon_m z'^*}) \right\} \dots (70)$$

上式で $z'^* \gg 1$ の場合, 上式は次のように近似される.

$$g_{s2}^*(z'^*) = N_a z'^* / 4 \dots (71)$$

以上から, 変形が小さく緩やかな場合, 円形ノズルから噴出される液体金属ジェットは, 負の磁場こう配によって $\cos 2\theta^*$ モードの変形を受け, ジェットは横長になることがわかる. また, 変形量はスチュアート数 N_a に比例することもわかる.

また, 式(72)のような正のこう配を有する印加磁場分布を考えると, 解の符号は反転し, 式(69)～(71)に対応する解はそれぞれ, 式(73)～(75)のようになる.

$$B_0^{*2}(z'^*) = \frac{1}{2} (1 + \tanh \varepsilon_m z'^*) \dots (72)$$

$$g_{s2}^*(z'^*) = -\beta \sin(\alpha z'^*) \int_{-\infty}^{z'^*} \frac{\cos(at)}{\cosh^2(\varepsilon_m t)} dt + \beta \cos(\alpha z'^*) \int_{-\infty}^{z'^*} \frac{\sin(at)}{\cosh^2(\varepsilon_m t)} dt \dots (73)$$

$$g_{s2}^*(z'^*) = -\frac{N_a}{8} \left\{ z'^* + \frac{1}{\varepsilon_m} \log(e^{\varepsilon_m z'^*} + e^{-\varepsilon_m z'^*}) \right\} \dots (74)$$

$$g_{s2}^*(z'^*) = -N_a z'^* / 4 \dots (75)$$

図2 印加磁束密度分布

3・5 解析結果の検討 解(69), (73)は N_a , W_a , ϵ_m の計3個の無次元パラメータによって支配されている。スチュアート数 N_a は電磁力項と慣性項の比を表す無次元数で、電磁力の大きさを代表するパラメータである。ウェーバ数 W_a は動圧と表面張力の比を表す無次元数で、ウェーバ数が小さくなると表面張力の影響が強くなる。また、 ϵ_m はジェットの出口半径 a と磁場こう配の代表長さ L_m の比で、磁場こう配の長さを代表するパラメータである。以下の解析結果では負の磁場こう配について示す。

3・5・1 無次元パラメータの影響 まず、スチュアート数 N_a の影響を調べる。計算は、 $W_a=400$, $\epsilon_m=0.1$ と一定に保ち、スチュアート数 N_a を $0.1 \sim 0.5$ まで変化させて行った。図3に計算より求めたジェットの幅 b_j の変化を示す。図3から磁場の印加によってジェットの幅が増加しており、この傾向はスチュアート数 N_a が大きくなるにつれて強くなることわかる。

次に、表面張力の影響を調べるため、 $N_a=0.2$, $\epsilon_m=0.1$ と一定に保ち、ウェーバ数 W_a を変化させて計算を行った。図4から、ウェーバ数 W_a の増加につれ

図3 スチュアート数 N_a の影響
($W_a=400$, $\epsilon_m=0.1$)

図4 ウェーバ数 W_a の影響
($N_a=0.2$, $\epsilon_m=0.1$)

て変形量が大きくなっていることがわかる。 $W_a=\infty$ を除いていずれの場合も、下流に行くといったん広げられたジェットが表面張力によって復元され、幅は下流方向に増減を繰返し振動している。この波長はウェーバ数 W_a が大きくなると長くなっている。

図5に、磁場分布の影響を調べるため、 $N_a=0.2$, $W_a=400$ と一定に保ち、 ϵ_m を変化させて計算を行った結果を示す。図5より、変形量の小さな領域では ϵ_m の小さなもののほうが変形量が大きい、下流では逆に ϵ_m の大きなほうが大きくなっていることがわかる。これは、 ϵ_m が小さいと電磁力による変形領域は長くなるが、電磁力そのものは弱くなり、表面張力の影響を受けながら緩やかに変形し、全体的に表面張力によって変形が抑制され小さくなったものと考えられる。

3・5・2 実験結果との比較 まず、表面張力のみによるジェットの変形効果を見るため、磁場のない場合のく形ノズルから水平方向に噴出されたジェットの変形を考える。く形ノズルを面積の等しい円から変形したものと考え、円形ジェットに換算したく形ノズルのウェーバ数 W'_a を次式で与える。

$$W'_a = \frac{\rho_f \omega_0^2}{\sigma} \sqrt{\frac{b_n h_n}{\pi}} \quad (76)$$

ここで、 b_n , h_n はそれぞれく形ノズルの幅および高さである。図6にく形ノズルの実験結果と円形ジェットに置き換えて計算した結果を示す。計算条件は $g_{s2}^* = 0.33$, $W'_a = 175$ である。計算結果は表面張力による断面形状の振動の様子を良く表しており、実験結果との一致は良好である。

次に磁場作用下での変形を考える。まず、実験に使用した電磁石の印加磁束密度分布 B_0 を式(67)で近似した(図2)。図7に水銀を用いて行った実験結果と実験条件と同一のウェーバ数 $W_a=496$, スチュアート

図5 磁場こう配のパラメータ ϵ_m の影響
($N_a=0.2$, $W_a=400$)

図6 磁場が作用しない場合のく形ノズルから噴出する液体金属ジェットの断面形状の変化
($b_n=10$ mm, $h_n=5$ mm, $B_{0u}=0$ T, $w_0=1.25$ m/s)

図7 磁場作用下での、円形ノズルから噴出する液体金属ジェットの幅 b_j の変化
($d=8$ mm, $B_{0u}=1.41$ T, $w_0=2.10$ m/s)

数 $N_a=0.29$, $\varepsilon_m=0.645$ を用いて計算したジェットの幅 b_j の分布を示す。また、図8に断面形状の変化を示す。幅については計算結果と実験結果の一致は良好で、電磁力によっていったん広げられたジェットが表面張力によって復元される様子を良く示している。実験より求めた断面形状は重力の影響を受けて上下非対称になっているものの計算結果と定性的には一致しており、電磁力によって $\cos 2\theta^\circ$ モードの変形が生じていることが明らかである。

4. 結 論

円形ノズルから噴出する液体金属ジェットの磁場こう配における断面形状の変化について、変形量が小

図8 磁場作用下での、円形ノズルから噴出する液体金属ジェットの断面形状の変化

さな範囲での近似解析を行い、実験結果との比較検討を行った結果次のような結論を得た。

(1) 円形ノズルから噴出する液体金属ジェットは垂直磁場こう配下で $\cos 2\theta^\circ$ モードの変形を受ける。負の磁場こう配下ではジェットの幅は広がり横長に変形し、正の磁場こう配下では縦長に変形する。電磁力によっていったん変形したジェットは表面張力により復元され、さらに下流では流れ方向にほぼ周期的に変動する。

(2) ジェットの変形に対しては、スチュアート数 N_a , ウェーバ数 W_a , 磁場こう配の長さを代表する無次元パラメータ ε_m が重要な役割を果たす。

(i) 同一 W_a 数, 同一 ε_m の場合, N_a 数の増加とともに変形は顕著になる。

(ii) 同一 N_a 数, 同一 ε_m の場合, W_a 数の増加とともに変形は顕著になる。

(iii) ε_m の影響は顕著には現れないが, ε_m の小さいほうが全体的に変形が小さくなる傾向がある。

文 献

- (1) 大島・ほか3名, 本論文集の2888ページ。
- (2) Rayleigh, L., *Proc. R. Soc.*, **29** (1879), 71.
- (3) Weber, C., *Z. Angew. Math. Mech.*, **11** (1931), 136.
- (4) Taylor, G., *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, **259** (1960), 1.
- (5) Clarke, N. S., *J. Fluid Mech.*, **31-3** (1968), 481.
- (6) Longuet-Higgins, M. S., *J. Fluid Mech.*, **55-3** (1972), 529.
- (7) Tuch, E. O., *J. Fluid Mech.*, **76-4** (1976), 625.
- (8) Green, A. E., *Acta. Mech.*, **26-2** (1977), 171.
- (9) Geer, J. F., *Phys. Fluids*, **20-10** (1977), 1613.
- (10) Geer, J. F., *Phys. Fluids*, **20-10** (1977), 1622.
- (11) Shercliff, J. A., *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, **375** (1981), 455.

討 論

〔質問〕 須藤 浩三〔広島大学工学部〕

(1) 式(6), (13)の右辺を明記していただきたい。

(2) $\varepsilon \ll 1$ より, なぜ ϕ^* が式(25)のように表せるのか, また式(32)が成立するのかご説明願いたい。

(3) 2901ページ左欄23, 24行「このことは, …うなずける」をもう少し詳しくご説明いただきたい。

(4) a/L は非一様磁場の特性を表す量と考えられる。磁場のこう配が噴流の挙動に及ぼす効果という点から見て, a/L という量をどのように解釈すればよいのか。

〔回答〕 (1) 磁束密度 B および電流密度 J はそれぞれ次式のように置くことができる。

$$B = B_0 + B'$$

$$J = J_0 + J'$$

ここで, B_0 は印加磁束密度, B' は誘導磁束密度, J_0 は励磁電流密度, J' は誘導電流密度である。また, B と J は次式で関係づけられる。

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times B = J$$

ここで, μ は透磁率である。上式より次式が成立する。

$$\left(\frac{1}{\mu} \nabla \times B_0 - J_0 \right) + \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times B' - J' \right) = 0$$

印加磁束密度 B_0 と励磁電流は流れと関係がないことから, 上式の左辺第1項と第2項は各々0となる。したがって次式が成立する。

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times B_0 = J_0$$

励磁電流は電磁石内で流れ, 液体金属内では流れていないことから, 液体金属内で次式が成立する。

$$\nabla \times B_0 = 0, \nabla' \times B_0' = 0 \cdots \cdots \text{本文式(6), (13)}$$

(2) ϕ^* が無次元電場ポテンシャル ϕ^* の零次の項に相当し, ϕ^* が ε に無関係であることから漸近展開の意味で式(25)のように表した。

式(32)は式(31)の主流方向に作用する電磁力と断面方向に作用する電磁力のオーダ評価より $\varepsilon \ll 1$ と仮定すると両者の比が小さくなることから, 成立するものと考えた。

(3) 導電性流体が非一様磁場下を流れると印加磁場方向に軸を持つ渦電流が発生する。ジェットの右半面と左半面では軸方向に流れる電流の向きは逆で, 電磁力は右半面では右, 左半面では左向きに働き, ジェットの断面は図8のように横に広がる。このことより $n=2$ モードの変形が優性になるものと考えられる。

(4) L はジェットの主流方向の代表長さである。表面張力が作用する場合, ジェットの断面形状は主流方向に振動するが, この波長を λ で表すと λ が L に相当するものと考えられる。したがって a/L は無次元波長の逆数に相当する。磁場こう配の代表長さは L_m で, 渦電流の長さはこれと等しいオーダを持つものと考えられ, a/L_m は渦電流の幅と主流方向の長さの比に相当するものと考えられる。