磁性流体のレオロジー特性に関する研究*

神山新一**, 小池和雄**, 王之珊***

Rheological Characteristics of Magnetic Fluids

Shinichi KAMIYAMA, Kazuo KOIKE, and Zhi-Shan WANG

Study of the rheological property of water, hydrocarbon and diester based magnetic fluids is done with and without magnetic field. Experimental study is made using the concentric cylinder type rotating viscometer which is operated within the strong magnetic field to clarify the effects of magnetic field, temperature and shear rate on the rheological characteristics of the magnetic fluids. The above magnetic fluids are Newtonian in the case of no magnetic field. In the case of applied magnetic field, the observed flow curve for hydrocarbon based fluid is still Newtonian. On the otherhand, the water based and diester based fluids show pseudoplastic behaviour. Empirical formulae based on the theoretical consideration of the laminar flow between rotating concentric cylinders are obtained.

Key Words: Non-Newtonian Fluid, Magnetic Fluid, Viscosity, Magnetic Field, Experimental Study

1. 緒 言

磁性流体は磁石に反応する流体としての特質をいかして、軸封装置、比重選別装置、エネルギー変換装置などさまざまな分野で、その応用機器開発のための研究が進められている。これらの応用機器の開発実用化のためには磁場下での磁性流体の諸特性の解明が重要であり、これに関連する基礎研究としてこれまでもそのレオロジー特性^{(1)~(6)}や管内流動特性に関する検討が行われてきており、チキソトロピー効果⁽⁷⁾や垂直磁場の作用する水ベース磁性流体の管内流における異常な圧力損失の増大⁽⁸⁾なども報告されている。しかしながら、磁性流体の磁場下でのレオロジー特性については、より広い作動条件下で、しかも十分な精度で測定されているとはいえず、さらに詳細な検討が必要であると考えられる。

よって本報では、磁性流体のレオロジー特性、特に磁場下でのレオロジー特性について、水ベース、ハイドロカーボンベースおよびジエステルベースの3種類

の磁性流体の場合に、磁場内で作動できるように改良した同心円筒形回転粘度計を用いて、印加磁場、磁性流体の液温およびずり速度を変えて実験的に検討を行った。さらに、磁場の印加による有効粘度の増加に対する理論的考察に基づいてレオロジー特性の実験式を導いた。

主 な 記 号

- a : 粒子の半径
- B : 磁束密度
- D : ズり速度
- H : 磁場の強さ
- H_0 : 印加磁場の強さ
- H_e : 磁場の強さの実効値
- i : 電磁石への供給電流
- I : 単位体積当たりの粒子の慣性モーメントの合計
- k : ボルツマン定数
- L : ランジュバン関数
- m : 粒子の磁気モーメント
- M : 磁化の強さ
- n : ロータの回転数
- N : 粒子の数密度

* 昭和61年8月18日 第937回講演会において講演、原稿受付 昭和61年2月8日。

** 正員、東北大学高速力学研究所 (〒980 仙台市片平2-1-1)。

*** 北京航空学院第二基礎部 (北京市学院路37, 中国)。

N_a : 反磁場係数
 p : 流体静圧
 (r, θ, z) : 円筒座標系
 R_i : 回転粘度計の内半径
 R_o : 回転粘度計の外半径
 $\underline{S}$: 内部角運動量
 T : 液温
 T_a : テイラー数
 $\underline{v}$: 流体の速度
 V : 粒子の体積
 η : 粘度 (η_0 : 溶媒の粘度)
 μ_0 : 真空の透磁率
 ρ : 磁性流体の密度
 ρ_s : 粒子の密度
 τ : セン断応力
 τ_s : 流体密度に基づく粒子の回転運動の緩和時間
 τ_B : ブラウン運動の緩和時間
 ϕ : 粒子の体積濃度
 ω : 回転円筒の角速度
 $\underline{\Omega}$: 流体の回転角速度
 ただし、諸量の下線 () はベクトル量を表す。

2. 理論的考察

2.1 基礎式 回転粘度計内の磁性流体の流れを記述する基礎式として、Shliomis の誘導した内部角運動量の保存則を考慮した方程式系を考える⁽⁹⁾。

運動方程式:

$$\rho \frac{D\underline{v}}{Dt} = -\underline{\nabla} p + \eta \Delta \underline{v} + \mu_0 (\underline{M} \cdot \underline{\nabla}) \underline{H} + \frac{1}{2\tau_s} \underline{\nabla} \times (\underline{S} - I \underline{\Omega}) \quad (1)$$

内部角運動量の式:

$$\frac{D\underline{S}}{Dt} = \mu_0 (\underline{M} \times \underline{H}) - \frac{1}{\tau_s} (\underline{S} - I \underline{\Omega}) \quad (2)$$

磁化の強さ $\underline{M}$ に関する式:

$$\frac{D\underline{M}}{Dt} = \frac{1}{I} (\underline{S} \times \underline{M}) - \frac{1}{\tau_B} \left(\underline{M} - M_0 \frac{\underline{H}}{|\underline{H}|} \right) \quad (3)$$

ここに,

$$\tau_B = 3V\eta_0/kT, \quad \tau_s = a^2\rho_s/15\eta_0, \quad I = 8\pi a^5\rho_s N \quad (4)$$

また、平衡磁化の強さ M_0 はランジュバンの公式により表されるものとする。すなわち,

$$M_0 = NmL(\xi), \quad L(\xi) = \coth \xi - \xi^{-1} \quad (5)$$

$$\xi = \mu_0 mH/kT$$

2.2 解法 以上の基礎式を図1のような円筒の回転軸方向に垂直に磁場 H が作用する円筒形回転

粘度計内の磁性流体の層流の流れに適用する。

2.2.1 $\Omega\tau_B \ll 1$ の場合 ずり速度が小さく、 $\Omega\tau_B \ll 1$ と仮定しうるときには、管内定常流の場合⁽¹⁰⁾と同様に、磁場の印加により有効粘度が $\eta_e = \eta + \Delta\eta$ に増加した場合のニュートン流体の流れとなることが示される。ここに,

$$\Delta\eta = \frac{A}{4(1+A)} \frac{I}{\tau_s} = \frac{3}{2} \phi \eta_0 \frac{A}{(1+A)} \quad (6)$$

$$\phi = \frac{4}{3} \pi a^3 n, \quad A = \frac{\mu_0 \tau_s \tau_B M_0 H}{I} = \frac{\xi L(\xi)}{2} \quad (7)$$

周速度 v_θ は、境界条件として $r=R_i$ で $v_\theta = R_i \omega$, $r=R_o$ で $v_\theta = 0$ を用いると、次式で与えられる。

$$v_\theta = \left(\frac{R_o^2}{r} - r \right) \left(\frac{\omega R_i^2}{R_o^2 - R_i^2} \right) \quad (8)$$

2.2.2 $\Omega\tau_B \geq 1$ の場合 この場合には基礎方程式系を一般的に解くことは困難であるが、ここでは管内定常流の場合⁽¹⁰⁾と同様の考察に基づく近似解法による解析を試みる。いま平衡磁化の強さ M_0 に対する印加磁場方向の磁化の強さ M_x の比を $\delta (=M_x/M_0)$ で表すと,

$$M_y = M_0 \delta \Omega \tau_B / (1 + A \delta) \quad (9)$$

および δ に関する次の式が得られる。

$$(\Omega \tau_B)^2 \delta = (1 - \delta)(1 + A \delta)^2 \quad (10)$$

したがって、この場合の粘度の増加量 $\Delta\eta$ は次式のような形で近似することができるものと考えられる。

$$\Delta\eta = \frac{3}{2} \phi \eta_0 \frac{A \delta}{(1 + A \delta)} \quad (11)$$

$$\cong F(A \delta) = F\left(\frac{\mu_0 m H}{kT}, \frac{\eta_0 D}{\mu_0 M H}\right) \quad (11)'$$

3. 実験的研究

3.1 実験装置および供試磁性流体 図2にその概略を示すような磁場の作用域で使用できるように改良した同心円筒形回転粘度計を用いて各種磁性流体のレオロジー特性に及ぼす印加磁場、ずり速度および液温の影響について検討を行った。すなわち、内筒(ロータ)は直径 40.10 mm、高さ 60 mm のフェノール樹脂

図1 円筒形回転粘度計内の流れ

製で、ロータとトルク検出部との連結にはアクリル製のシャフトを用いた。さらに、トルク検出部へ漏れ磁場の影響が及ばないように、磁気遮蔽板をトルク検出部と電磁石の間に設置した。また、試料容器はステンレススチール製で、この外側の保温容器と外部の温度コントローラにより試料容器内の磁性流体の温度を0～85℃の範囲で一定に保つことができる。本実験においては実験中の磁性流体の温度を試料容器底部にうめこまれた熱電対により常時観測している。電磁石は供給電流を変えることにより最大 $B=0.4\text{T}$ の磁場を印加することができる。

回転粘度計内の磁束密度分布はあらかじめガウスメータにより測定を行い、ロータの有効作動域の高さ方向および周方向の分布を求め、実験値を整理する際の磁場の強さ H_0 としてはそれらの平均値を用いた。また、実験で使用した磁性流体は東北金属製フェリコロイド W-35 (水ベース)、HC-50 (ハイドロカーボンベース) および DES-40 (ジエステルベース) および松本油脂製薬製マーボマグナ FN-40 (ハイドロカーボンベース) である。

3.2 実験結果と考察 電磁石への供給電流 i を3～20 Aの範囲で調節して印加磁場を変え、ハイドロカーボンベースおよびジエステルベース磁性流体の場合には液温20, 40℃および60℃、また、水ベースの場合

合には液温20℃および40℃の実験条件下でロータの回転数を種々に変えて測定を行った。

測定結果の一例として液温20℃の場合の流動曲線を図3に示す。図3から磁場が作用しないときのせん断応力はずり速度の増加とともに直線的に増加しており、いずれの磁性流体もニュートン流体としての流動特性を示すことがわかる。しかしながら、磁場の作用下ではその挙動は異なり、ハイドロカーボンベース磁性流体はやはりニュートン流体としての特性を示すが、水ベースおよびジエステルベース磁性流体は見掛けのずり速度の変化によっても有効粘度の増加量が異なり、いわゆる擬塑性流体としての流動特性を示すことがわかる。特に、水ベース磁性流体の場合には見掛けのずり速度が小さいところで有効粘度は異常な増加を示すことがわかる。これは磁場が作用する円管内の水ベース磁性流体の流れでみられる異常な圧力損失の増大と密接に関連するものと考えられる。

また、粘度特性の測定においては、磁場を印加しない場合の粘度を用いて求めたテイラー数 T_a はハイドロカーボンベース HC-50 の場合で液温40℃および60℃、回転数400 rpm 以外の場合には $T_a < 40$ であり、テイラー渦の発生しない安定条件内($T_a < 41.3$)にある。ここでの測定では静止状態から設定した回転数まで連続して回転数を変化させ、せん断応力との関係を求めており、ハイドロカーボンベース HC-50 の

図2 実験装置概略図

 図3 流動曲線 ($T=20^\circ\text{C}$)

液温 40°C および 60°C, 回転数 400 rpm の場合でも低い回転数のところから $\Delta\eta/\eta$ は常に一定でありテイラー渦による影響は観測されなかった。したがって、測定値へのテイラー不安定性の影響はこの場合にも無視しうるものと考えられる。

それぞれの磁性流体の実験結果に対し、先の理論的考察に基づき粘度特性に及ぼす諸因子の影響の検討を試みた。すなわち、

ハイドロカーボンベースの場合には式(6)より

$$\frac{\Delta\eta}{\eta} = \frac{3}{2} \phi \frac{\eta_0}{\eta} \frac{\xi L(\xi)}{2 + \xi L(\xi)}, \quad \xi = \mu_0 m H_e / kT \quad \dots\dots\dots (12)$$

を用い、水ベースおよびジエステルベースの場合にはずり速度の影響をも考慮して、式(11)'より

$$\frac{\Delta\eta}{\eta} = C \left(\frac{\mu_0 m H_e}{kT} \right)^{b_0} \left(\frac{\eta_0 D}{\mu_0 M H_e} \right)^{b_1} \quad \dots\dots\dots (13)$$

の実験式を用いた。ここで、 $H_e = H_0 - N_a M$ であり、無限に広い薄板に直角方向に磁化させた場合とのアナロジーから反磁場係数は $N_a = 1$ とした。

図4にはハイドロカーボンベース磁性流体 FN-40 の場合の結果を示す。図4から明らかなように、この場合の有効粘度の増加率は先に示した理論解析から得られた値 (η_0 としては溶媒のみの粘度を使用) とほぼ一致している。また、HC-50 の場合の結果を図5に示す。図5の理論値は η_0 として溶媒(ケロシン)のみの粘度をとった場合とケロシン中に重量濃度 30 % のオレイン酸が含まれている場合の粘度をとった場合との両方の結果が示されている。すなわち、HC-50 の場合にはオレイン酸(界面活性剤)の添加により溶媒の粘度が大きく変わり、ベース液としてケロシンのみを考慮した場合に比べて、実際に含まれているオレイン酸の影響を考慮することにより、実験値とほぼ一致する

結果が得られることを示している。一方、FN-40 の場合には溶媒として用いられている炭化水素の粘度が高く、界面活性剤の添加による溶媒の粘度への影響は小さいものと考えられる。

つぎに、水およびジエステルベース磁性流体の場合の結果をそれぞれ図6および図7に示す。この場合の有効粘度の増加率に対する測定結果は式(13)の実験式により比較的よく整理できることがわかる。ここで、得られた実験式(13)の係数は水ベース磁性流体の場合には $C = 1.218 \times 10^{-2}$, $b_0 = -0.02655$, $b_1 = -0.6305$ である。さらに、図6から水ベース磁性流体の場合にはずり速度の小さいところで粘度は磁場の印加により異常な増加を示すことがわかる。また、ジエステルベース磁性流体の場合には $C = 8.247 \times 10^{-2}$, $b_0 = 0.2099$, $b_1 = -0.1153$ である。しかしながら、水およびジエステルベース磁性流体の場合に式(11)より直接求めた理論値は $\Delta\eta/\eta < 10^{-1}$ であり実験値よりかなり低い値となる。

この磁性流体の種類により磁場下でのレオロジー特性が異なる原因の一つとして、界面活性剤と溶媒間の親和性の相違が考えられる。すなわち、その組成が知られているハイドロカーボンベース磁性流体 HC-50 と水ベース磁性流体 W-35 の場合について比較すると、HC-50 では溶媒としてケロシン、マグネタイト粒子に吸着する界面活性剤としてはオレイン酸が用いられているのに対し、W-35 では溶媒として水、界面活性剤としてマグネタイトに吸着するオレイン酸に加え SDBS (ドデシルベンゼンスルホン酸ナトリウム) が安定な分散を得るために用いられている。オレイン酸はケロシンとはよく混ざりあうことから、HC-50 の場合には、マグネタイト粒子に吸着しているオレイン酸は溶媒のケロシンに対しマグネタイト粒子が存在しな

図4 有効粘度の増加率 (FN-40)

図5 有効粘度の増加率 (HC-50)

い場合とほぼ同様に振舞っているものと考えられる。したがって、磁場の印加によりマグネタイト粒子が磁力線方向に配向した場合でも、オレイン酸の吸着層による溶媒(ケロシン)の流動への干渉は小さく、界面活性剤の吸着層の影響を有効径として考慮することにより、その挙動を十分に説明することができたものと考えられる。一方、W-35の場合にも第2層めの界面活性剤のSDBSと溶媒の水はHC-50の場合の溶媒と界面活性剤と同様な挙動をとるものと考えられる。しかしながら、磁場印加時に磁力線方向に配向したマグネタイト粒子に吸着しているオレイン酸の吸着層の疎水性は粒子の回転に対して大きな抵抗となり、したがって、回転トルクの著しい増大を生み出すものと考えられる。このことは、W-35とその製法が同様で、溶媒としてオレイン酸とわずかに混ざりあう性質を持つジエステルを用いたDES-40の場合に、W-35と同様な特性を示すが、パラメータへの依存性、特に、ずり速度への依存性がかなり小さくなることから裏付けられる。さらに、ハイドロカーボンベース磁性流体FN-40の場合にも構成成分の物性値は異なるが溶媒と界面活性剤は親和性を持つことが知られており、HC-50の場合と同様に振舞っていることが推察できる。

また、磁性流体のチキソトロピーいわゆる時間依存的挙動についても検討を行ったが、今回の実験では磁場の印加時、除去時ともにチキソトロピー的挙動は観測されなかった。

4. 結 論

磁性流体のレオロジー特性、特に磁場下でのレオロ

図 6 有効粘度の増加率 (W-35)

ジー特性について検討を行った。得たる結論を要約すると次のようになる。

(1) ハイドロカーボンベース磁性流体の有効粘度は磁場を印加することにより増大するが、ずり速度による影響は観測されない。すなわち、磁場の作用下でもニュートン流体としての流動特性を示す。この場合の粘度の増加率は理論的考察に基づく次式により記述することができる。

$$\frac{\Delta\eta}{\eta} = \frac{3}{2} \phi \frac{\eta_0}{\eta} \frac{\xi L(\xi)}{2 + \xi L(\xi)}, \quad \xi = \mu_0 m H_e / kT$$

(2) 水ベースおよびジエステルベース磁性流体は磁場の作用しない場合にはいずれもニュートン流体としての流動特性を示すが、磁場の作用下ではその有効粘度は磁場の強さのみならず、ずり速度によってもその増加量が異なり、いわゆる擬塑性流体としての流動特性を示す。特に、水ベース磁性流体の場合にはずり速度が小さいところで粘度の増加率は磁場の印加により異常な増加を示す。この場合の粘度の増加率に関する実験結果を整理するとそれぞれ次のような実験式で表すことができる。

水ベース磁性流体：

$$\frac{\Delta\eta}{\eta} = 1.218 \times 10^{-2} \left(\frac{\mu_0 m H_e}{kT} \right)^{-0.02655} \times \left(\frac{\eta_0 D}{\mu_0 M H_e} \right)^{-0.6305}$$

ジエステルベース磁性流体：

$$\frac{\Delta\eta}{\eta} = 8.247 \times 10^{-2} \left(\frac{\mu_0 m H_e}{kT} \right)^{0.2099} \left(\frac{\eta_0 D}{\mu_0 M H_e} \right)^{-0.1153}$$

(3) 本実験で用いた各種磁性流体においては磁場の有無によらずチキソトロピーいわゆる時間依存的挙動は認められない。

終わりに、実験には東北大学高速力学研究所 小山

図 7 有効粘度の増加率 (DES-40)

忠正助手, 図面作成には佐藤武志技官, 実験装置の改良には同研究所付属工場 大泉浩技官の助力を得た。また, 東北金属工業(株)ならびに松本油脂製薬(株)関係各位には種々のご支援をいただいた。ここに付記して謝意を表する。

文 献

- (1) Rosensweig, R. E., Kaiser, R. and Miscołczy, G., *J. Coll. Interface Sci.*, **29**-4 (1969), 680.
- (2) McTague, J. P., *J. Chem. Phys.*, **51**-1 (1969), 133.
- (3) 中鉢・中塚・下飯坂, 粉体および粉末冶金, **23**-6 (昭 51),

- 211.
- (4) 下飯坂・中塚・吉田・山内, 粉体および粉末冶金, **24**-4 (昭 52), 118.
- (5) Shimoiizaka, J., Nakatsuka, K., and Chubachi, R., *Thermomechanics of Magnetic Fluids* (Ed. Berkovsky, B.), (1978), 67, Hemisphere Pub.
- (6) Maiorov, M. M., *Магн. Гидродин.*, **16**-4 (1980), 11.
- (7) Mehta, R. V., Prabhakaran, P. and Patel, H.I., *J. Magnet. Mag. Mater.*, **39**-1/2 (1983), 35.
- (8) Kamiyama, S., Koike, K. and Oyama, T., 文献(7)の23ページ.
- (9) Shliomis, M.I., *Sov. Phys., JETP*, **24**-1 (1967), 173.
- (10) 神山・小池・飯塚, 機論, **45**-400, B (昭 54), 1843.

討 論

〔質問〕 須 藤 浩 三〔広島大学工学部〕

質問者らが水ベース磁性流体を用いて行った実験によると(付1), 磁場が作用しない場合でも流体は擬塑性流体としての挙動を示した。このことから, 流体の非ニュートンの性質は流体の組成に関係するのではないかと思う。使用された流体の組成を教えてください。

〔回答〕 本文中にも一部示したが, ここで用いられた磁性流体は磁性粒子としてはマグネタイトが用いられており, 界面活性剤としては水ベース W-35 の場合はオレイン酸に加え SDBS, ハイドロカーボンベース HC-50 ではオレイン酸, FN-40 では不飽和脂肪酸と脂環式カルボン酸, ジエステルベース DES-40 では水ベースとほぼ同様な組合せになっている。

〔質問〕 棚 橋 隆 彦

〔慶応義塾大学理工学部〕

(1) 磁場の方向と流れの方向が場所によって大きく異なる場合, 内部角運動量の拡散が無視できないと思う。基礎式(2)で拡散項 $\gamma \nabla^2 \underline{S}$ を無視された理由をご教示願いたい。

(2) 磁性流体の極性効果を考える場合, みかけの粘度は二重円筒のすきま $\Delta R = R_o - R_i$ にも依存する(付2)と思う。この点についてのご意見をお聞かせ願いたい。

(3) 式(11)を式(11')で表すと, みかけの粘度が粒子の体積濃度および磁場の方向性に依存しなくなってしまう。したがって得られた実験式を誤って使用されるおそれはないか。

〔回答〕 (1) 磁性流体の粒子径を $a \sim 10^{-8}$ m のオーダーと仮定すると, $\tau_s \sim 10^{-11} \sim 10^{-12}$ s, $\tau_a \sim 10^{-5}$

$\sim 10^{-6}$ s となり, したがって, 内部角運動量の拡散係数 $\gamma \sim L^2/\tau_s$ であることから考察すれば, 基礎式(2)の第2項は

$$\frac{1}{\tau_s} (\underline{S} - I \underline{\Omega}) \geq O[(10^{11} \sim 10^{12}) \underline{S}]$$

となるのに対し, 省略した拡散項は

$$\gamma \Delta \underline{S} \leq O[(10^5 \sim 10^6) \underline{S}]$$

のオーダーであると考えられる。ただし, L : 代表寸法

したがって, ここでの条件の場合には拡散項は無視しうるものと考えられる。

(2) 本報における二重円筒のすきまは澤田ら(付2)による定義を用いると $x (= R_i/R_o) = 0.955$ であり, みかけの粘度のすきま ΔR への依存性は無視しうるものと考えられる。

(3) 式(11')による近似を用いた場合粒子の体積濃度の影響は定数 C の中に含まれることになる。また, 磁場の方向性に関しては今回の近似式の適用は流体の回転角速度が磁場の方向と直交する場合に限定されることになる。

〔質問〕 山 根 隆一郎〔東京工業大学工学部〕

円管内流れによる粘度測定と異なり, 磁性粒子の回転と流れの回転の関係の, 周方向非対称性を避ける巧妙な測定法を用いているため, 測定結果は非常に重要であり, 興味深く拝見した。

(1) 水ベースの場合粘度増加が理論値よりかなり大きくなることの理由として 3950 ページ右欄の説明は一つの考え方であると思われる。一方円管についての著者らの以前の研究では磁場が軸方向の場合には理論値を少し修正すれば抵抗増加を説明できるが, 垂直磁場の場合理論値よりかなり大きくなると報告されている。貴論文の考え方で両者の相違を説明できるのか。

(2) 磁場なしの場合にはいずれの流体もニュート

(付1) 須藤・ほか4名, 機論, **49**-440, B (昭 58), 818.

(付2) 澤田・棚橋, 機論, **47**-414, B (昭 56), 287 の式(23).

ン流体とみなせるとのことであるが、図3ではどの程度実験点が直線に乗っているのかわからない。例えば $\tau = KD^n$ としたとき n はどの程度1に近いのか。

〔回答〕 (1) 水ベース磁性流体のレオロジー特性が他の磁性流体の場合と異なる原因の一つとして界面活性剤と溶媒間の親和性の相違の説明を行ったが、これはまた、粒子が磁場方向に配列した場合の粒子間の連結を強める働きをするものと考えられる。したがって、水ベース磁性流体の場合には、単に粒子個々の回転トルクの増大のみならず、磁場方向への粒子の連鎖構造の形成が流れの抵抗に大きく関与してきており、

これが円管内の流れの場合の印加磁場方向の相違による抵抗増加の差をもたらしているものと考えられる。

(2) 本報で用いた実験装置ではロータの回転数の制約から例えば、水ベース W-35 やハイドロカーボンベース HC-50 の場合には実験条件はみかけのずり速度 $D < 940 \text{ s}^{-1}$ の場合に限られている。みかけのずり速度の小さいところでは記録紙からの読みとり誤差が大きくなることから回転数の比較的大きいところでの値についてここで得られた実験データをべき乗則 $\tau = KD^n$ として整理すると $n = 0.990 \sim 1.014$ の値となる。