遠心羽根車内ポテンシャル流れのパネル法による
完全三次元解析*三宅 裕**, 板東 潔**
倍田 芳男***, 永松 茂隆****Three-Dimensional Analysis of Potential Flow in a
Centrifugal Impeller by Panel MethodYutaka MIYAKE, Kiyoshi BANDO,
Yoshio MASUDA, and Shigetaka NAGAMATSU

A panel method of obtaining accurate three-dimensional incompressible potential flow in a centrifugal impeller is presented. The basic equation is the surface integral representation for velocity potential based on Green's identity, which reduces to a set of linear equations by discretization procedure. Numerical calculations are performed at flow rates 100 % and 75 % for an impeller designed by the conventional method. The one-dimensional flow obtained by a simple one-dimensional theory, a two-dimensional calculation and the present three-dimensional one are compared to clarify the degree of approximation of each flow. The three-dimensional characteristics are investigated examining the pressure distribution along the blade elements on the hub, mid and shroud stream surfaces, the pressure contour and the relative velocity vector on the pressure and suction surfaces of the blade, the head distribution at the impeller outlet surface, and so on.

Key Words: Turbomachine, Centrifugal Impeller, Three-Dimensional Flow, Potential Flow, Panel Method

1. ま え が き

ターボ機械羽根車内の流れを解析する場合、設計点に関しては準三次元解法で実用上十分な精度が得られることが多い⁽¹⁾⁽²⁾。しかし近年ターボ機械の高性能化に対する要請により、非設計点をも含む高精度な流れの解析が必要となっている。このためには羽根車内の流れを完全な三次元流れとして解析することが不可欠であるが、大形計算機の急速な進歩により、最近では完全三次元解析に関する報告が数多くみられるようになっている。

三次元の非粘性流れについての報告は、有限要素法によるもの^{(3)~(5)}、時間進行法によるもの^{(6)~(9)}がある。一方特異点法による解析は極めて少なく、軸流羽根車に対する報告⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾があるのみである。しかし文献(10)、(11)はともに揚力線理論を発展させた解法であり、翼厚は考慮できるが、環状流路内の径向き要素羽根で、自由渦流れしか扱えないという欠点がある。一般の翼型を扱える解法として、航空機など外部流れの

解析によく用いられるパネル法⁽¹²⁾があるが、この方法を低次の特異性で内部流れに適用した場合、標点以外の部分からの流量のもれにより精度のよい解が得られないということが知られており⁽¹³⁾、パネル法の内部流れに対する適用例としてはナセル内の流れ⁽¹⁴⁾など簡単な流れにとどまっている。

本報は遠心羽根車内の三次元非粘性非圧縮性流れをパネル法を用いて精度よく解析するための手法とその結果に対する報告である。本方法は著者らがすでに報告した軸流羽根車に対するパネル法⁽¹⁵⁾を改良し、より複雑な流れである遠心羽根車に対して拡張適用したものである。

計算例を示すため通常行われる設計法に基づいて遠心羽根車を設計し、その羽根車に対するパネル法による三次元解、翼間流れ計算による二次元解および設計時に得られた一次元解とを比較し、各解法の近似度を示すとともに、遠心羽根車内に現れる流れの三次元性について明らかにする。

2. パネル法による解析

羽根車内の非粘性、非圧縮性三次元流れは速度ポテンシャル ϕ を有する。この ϕ を次式におく。

$$\phi = \phi + \phi' \dots\dots\dots (1)$$

* 昭和61年10月6日 第64期全国大会講演会において講演、原稿受付 昭和61年3月31日。

** 正員、大阪大学工学部 (〒565 吹田市山田丘2-1)。

*** 学生員、大阪大学大学院。

**** 准員、トヨタ自動車(株) (〒471 豊田市トヨタ町1)。

ただし ϕ, ϕ' はともに調和関数であり、 ϕ' は ϕ の解を最良にするために導入する既知関数である。 $\nabla^2 \phi = 0$ に対してグリーンの公式を適用すると、 ϕ および $\mathbf{n} \cdot \nabla \phi$ を含む境界面積分方程式が得られる。ただし $\mathbf{n}$ は境界面で流体側へ向けた単位法線ベクトルである。

遠心羽根車の流路としては軸方向流入、半径方向流出として、羽根車から十分前方、後方にそれぞれ回転軸に垂直な入口面、半径方向に垂直な出口面を取る。このような場合、流れの境界条件は次式で与えられる。

$$V \equiv \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = \begin{cases} 0 & : \text{羽根面, ハブ面, シェラウド面} \\ C_z (= \text{const.}) & : \text{入口面} \\ -C_r & : \text{出口面} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ただし $\mathbf{w}$ は羽根車に対する相対速度ベクトル、 C_z と C_r はそれぞれ絶対速度の軸方向と半径方向成分を示す。 C_z は流量 Q より定まる。 C_r は周方向には一定であるが軸方向には変化するものとし、次の二式を満足するように定める⁽⁵⁾。

$$\frac{\partial C_r^2}{\partial z} = \frac{\omega}{\pi} \frac{\partial \Gamma}{\partial z} - \frac{1}{(2\pi r)^2} \frac{\partial \Gamma^2}{\partial z} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$2\pi \int_{\text{Shroud}}^{\text{Hub}} r C_r dz = Q \quad \dots\dots\dots (4)$$

ただし ω は羽根車の回転角速度、 $\Gamma = 2\pi r C_\theta$ は循環量である。 $\mathbf{w}$ と絶対速度ベクトル $\mathbf{C}$ には

$$\mathbf{w} = \mathbf{C} - \omega \mathbf{r} \mathbf{e}_\theta \quad \dots\dots\dots (5)$$

の関係がある。ただし $\mathbf{e}_\theta$ は周方向単位ベクトルである。したがって式(1)～(5)より境界面上の $\partial \phi / \partial n$ は次式により求められる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \omega \mathbf{r} \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{n} + V - \frac{\partial \phi'}{\partial n} \quad \dots\dots\dots (6)$$

後流渦面は次式で仮定する羽根車後方の平均流上におく。

$$w_r = \frac{Q}{2\pi r B}, \quad w_\theta = \frac{K}{r} - \omega r, \quad w_z = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

ただし B は平行壁ディフューザの幅である。また $K = r C_\theta$ は流線に沿って一定値を保ち、羽根後縁における次の値を用いる。

$$K = r(\omega r - w_r \cot \beta) \quad \dots\dots\dots (8)$$

ただし β は羽根角である。後流渦面上では $\partial \phi / \partial n$ は零であり、またポテンシャル差 $\Delta \phi_w$ は式(7)で与えられる流線に沿って一定値を保ち、その値はクッタの条件

$$\Delta \phi_w = \Delta \phi_t \quad \dots\dots\dots (9)$$

より定まる。ただし添字 t は羽根後縁を示す。したがって $\Delta \phi_w$ は羽根面上のポテンシャルで表される。

パネルの形状、パネル内での ϕ と $\partial \phi / \partial n$ の分布、計算手順は既報⁽¹⁵⁾のとおりであり、線形連立方程式の解として ϕ が求まる。

流路表面上の標点における流速、圧力はそれぞれ次式より計算する。

$$\mathbf{w} = \nabla \phi - \omega \mathbf{r} \mathbf{e}_\theta \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$p = p_{st} + \frac{\rho}{2} (\omega^2 r^2 - w^2) \quad \dots\dots\dots (11)$$

ただし ρ は密度、添字 st は羽根車前方のよどみ点を示す。流路内部における流速の計算には次式を用いる。

$$4\pi C = \sum_{m=1}^N \iint_{A_m} \left\{ \frac{\mathbf{n}}{R^3} - \frac{3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{R})\mathbf{R}}{R^5} \right\} \phi ds + \sum_{m=1}^N \iint_{W_m} \left\{ \frac{\mathbf{n}}{R^3} - \frac{3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{R})\mathbf{R}}{R^5} \right\} \Delta \phi_w ds - \sum_{m=1}^N \iint_{A_m} \frac{\mathbf{R}}{R^3} \frac{\partial \phi}{\partial n} ds \quad \dots\dots\dots (12)$$

ただし N は羽根枚数、 A_m と W_m はそれぞれ境界面と後流渦面の1ピッチ、 R は計算点と積分点間の距離である。上式は前述の積分方程式のこう配を解析的に取扱った式であり、数値微分を必要とせず精度的に有利である。この場合も誘起ポテンシャルの計算の場合と同様にパネルをサブ・パネルに分割し、サブ・パネル上で特異性の強さを一定にすれば、サブ・パネルからの速度影響係数は解析的に求められる⁽¹²⁾。

3. 二次元羽根車に対する適用例

本計算の数値精度を確かめるために、二次元羽根車とみなしうる羽根車に対して、本三次元計算法を適用し、二次元羽根車に対する厳密解と比較した。用いた羽根車を図1に示す。ここに羽根車入口径0.16 m、出口径0.3 m、回転数2000 rpm、流量0.2 m³/s、羽根中心線は羽根角30.7 degの対数らせん、三次元計算における翼幅0.04 m、パネルの総数は464枚である。計算結果を図2, 3に示す。図2は翼素まわりの圧力分布であり、圧力係数 C_P は次式で与えられる。

図1 二次元羽根車の断面形状

$$C_p = \left(\frac{r}{r_t}\right)^2 - \left(\frac{w}{\omega r_t}\right)^2 \quad \dots\dots\dots (13)$$

図で H は翼素の前縁から翼面に沿う長さである。二次元特異点法による解は標点を十分多く取っており、ほぼ厳密解と考えてよい。パネル法による三次元解は翼幅方向に変化せず、また二次元解とよく一致している。次に羽根間にいくつかの断面を設け、各断面を通過する流量を計算し、規定値と比較したものを図3に示す。図中の LE, TE はそれぞれ羽根前縁、後縁を示す。以上の結果より本パネル法計算によれば、純ふく流の遠心羽根車に対して精度の高い解が得られ、本三次元計算法に不都合がないことがわかる。

4. 遠心羽根車内の三次元流れ

4.1 遠心羽根車の設計 本パネル法を用いて得られる三次元流れと従来の一次元計算、二次元計算による結果との比較を示すため、計算の対象とする遠心羽根車を次のように設計した。

図2 翼素まわりの圧力分布

図3 羽根間断面流量

図4 負荷分布モード関数

羽根車の子午面形状を与え、これをいくつかの部分羽根車に分割する。いま羽根両面の圧力差 Δp を

$$\Delta p = k_p f_p \quad (0 \leq f_p \leq 1) \quad \dots\dots\dots (14)$$

とおく。ただし k_p は定数であり、所要のヘッドを満足するように決まる。 f_p は負荷分布のモードを示す関数で図4のように与えた。図中の s は子午面内長さを示す。いま流量 Q 、ヘッド H 、羽根枚数 N 、回転角速度 ω 、予旋回の強さ $\lambda = rC_\theta$ 、式(14)の f_p を与えると、羽根車が与える力のモーメントと角運動量の釣り合いより、 $\bar{C}_\theta$ すなわち絶対速度の周方向成分の周方向平均値が求まる。羽根厚みは十分小であり、平均流は羽根中心線に沿って流れるとすれば、子午面内速度の周方向平均値 $\bar{C}_s$ が求まる。これらの $\bar{C}_\theta$ 、 $\bar{C}_s$ から羽根角の前縁から後縁までの分布が求まり、羽根車形状が決定される。羽根厚み t_n と羽根角 β の分布を図5、6に示す。さらに $\bar{C}_\theta$ 、 $\bar{C}_s$ 、 β 、 Δp および相対流れに対するベルヌーイ式より、羽根両面の流速、圧力が計算される。

羽根車の子午面は図8のように、また仕様は次のように与えた。羽根車外径 0.3 m、流量 0.201 m³/s、ヘッドは翼幅方向に一定で 594.6 Pa、羽根枚数 8 枚、回転数 2 000 rpm、予旋回なし、後縁レーキ角は零。

以上のような条件で設計した遠心羽根車のパネル分割状態を図7に示す。図中の番号はそれぞれ次の面を示す。①入口面、②出口面、③羽根車前方ハブ面、④羽根車前方シュラウド面、⑤羽根間ハブ面、⑥羽根間シュラウド面、⑦羽根車後方ハブ面、⑧羽根車後方シュラウド面、⑨羽根面の圧力側、⑩羽根面の負圧側、⑪

図5 羽根厚み分布

図6 羽根角分布

後流渦面。パネルの総数は 765 枚である。

4.2 パネル法解析 流れ計算は設計流量（流量 100 %）および部分流量（流量 75 %）の場合について行った。

図 8 に示すように羽根間にいくつかの軸対称面を設け、ここを通過する流量を計算した結果を図 9, 10 に示す。これらより連続の条件が満足された精度のよい解が得られていることがわかる。

図 11, 12 はハブ面、シュラウド面および軸対称ポテンシャル流れの中央流面上の翼素まわりの圧力分布である。一点鎖線は羽根車設計時に得られた一次元解、実線は軸対称ポテンシャル流面上での翼間流れ計算⁽¹⁰⁾による二次元解、黒丸印はパネル法による三次元解である。一点鎖線の設計圧力分布の圧力差は、ハブからシュラウドに向かって大きくなっているが、この向きに翼素の子午面内長さが小となり、また流速が大きくなっているため設計ヘッドは翼幅方向に一定となる。ハブ面上では二次元解と三次元解が非常によく一致している。これは三次元流れにおいてハブ面が代表する部分羽根車の形状が、軸対称ポテンシャル流れの

それとほぼ一致していることによる。またこの形状は羽根前縁で衝突が起こっても、その大きさがわずかであればほとんど変化しないということが流量 75 % の場合の図 12(a) よりわかる。設計では流れは羽根中心面に沿って流れるとしているので、図 11(a) の実線と一点鎖線の差は流体のすべりに起因している。そしてその量は羽根後縁に向かって増加していることがわかる。中央流面、シュラウド面では設計点において衝突が起こっているが、これは前縁の設計羽根角がシュラウド側で過大となっているからである。しかし中央流面では衝突の大きさは小さく、二次元解と三次元解はかなりよく一致している。シュラウド面では中央流面よりさらに大きな衝突が起こっている。このため三次元解で前縁付近の大きな逆流および大きな翼幅方向への流れのために、二次元解と三次元解は大きく異なっている。しかし衝突は局所的なものであり、両者の解は圧力面上で前縁付近を除いてかなりよく一致している。

羽根圧力面、負圧面上の等圧力係数線を図 13, 14 に、相対速度ベクトルを図 15, 16 に示す。これらの図より圧力面のシュラウド側で衝突、逆流および翼幅方向への流れが生じていることがわかる。また図 13, 14 より圧力上昇には遠心効果が主要な部分を占めていることがわかる。

羽根間にとった図 8 に示すような軸対称面上で、面に垂直な方向の相対速度成分の等速線のうち、羽根前

図 7 遠心羽根車一周境界のパネル分割図

図 8 羽根車の子午面形状および羽根間断面位置

図 9 羽根間断面流量（流量 = 100 %）

図 10 羽根間断面流量（流量 = 75 %）

縁直後 ($k=1$) に対するものを図 17 に示す。四辺の右、左、上、下はそれぞれ圧力面、負圧面、シュラウド面、ハブ面に対応する。破線は子午面内での逆流を示す。図より圧力面で衝突が起こり、そこで逆流が生じていることがわかる。ただし図 6 に示されるようにこの羽根車の羽根角は小さく、羽根は大きく後方へわん曲しているため、岐点付近で流れが羽根に沿う向きから羽根に対向する向きに流れの方向を変える時に、子午面内では実際の逆流より早く逆流が始まる。したがって実際の逆流部は図 17 に示される部分よりさらに小さいものとなる。

図 18 は流量が 100 % の場合のハブ面とシュラウド面上の翼間の等圧力係数線である。

図 19 は羽根車出口面の翼幅方向のヘッド分布である。 T はシュラウドからハブ方向への長さを示す。 Ψ は揚程係数であり次式で与えられる。

$$\Psi = h / \frac{(\omega r_t)^2}{2g} \dots\dots\dots (15)$$

ただし g は重力加速度、 h は局所ヘッドであり羽根車出口面における速度分布より次式で計算される。

(a) ハブ面

(b) 中央流面

(c) シュラウド面

図 11 翼素まわりの圧力分布 (流量=100 %)

(a) ハブ面

(b) 中央流面

(c) シュラウド面

図 12 翼素まわりの圧力分布 (流量=75 %)

図 13 羽根面上等圧線 (流量=100%)

図 15 羽根面上相対速度ベクトル (流量=100%)

図 14 羽根面上等圧線 (流量=75%)

図 16 羽根面上相対速度ベクトル (流量=75%)

(a) 流量=100 %

(b) 流量=75 %

図 17 羽根前縁直後の羽根間断面内の w_n の分布

(a) ハブ面

(b) シュラウド面

図 18 翼間流路内等圧線 (流量=100 %)

(a) 流量=100 %

(b) 流量=75 %

図 19 羽根車出口面上の翼幅方向ヘッド分布

$$h = \frac{\omega r_t}{g} \frac{\overline{C_r C_\theta}}{\overline{C_r}} \dots\dots\dots (16)$$

一点鎖線は設計値、実線は二次元解法による値、黒丸印はパネル法による計算値である。一点鎖線と実線との差は流体のすべりを示しており、ハブからシュラウドに向かって大きくなっている。また三次元計算によるヘッド分布は、二次元計算によるヘッド分布が緩和された傾向になっていることがわかる。

5. 結 言

パネル法を用いて遠心羽根車内の非粘性、非圧縮性三次元流れを精度よく解析する方法を示した。本解法は境界条件のわずかな変更により軸流、斜流羽根車に適用することが可能であり、一般的な形状の羽根車に対して適用可能な解法である。遠心羽根車に本解法を適用した結果、羽根車前縁付近の衝突による逆流が大きければ三次元解法は不可欠であるが、一方その影響は局限されており、二次元解法でもかなりの程度の流れの予測は可能であることが明らかになった。また翼

幅方向の三次元解法によるヘッド分布は、二次元解法より得られるヘッド分布が緩和された傾向をもっている。

文 献

- (1) Adler, D. and Krimmerman, Y., *Performance Prediction of Centrifugal Pumps and Compressors*, (1979), 19, ASME.
- (2) Jennions, I. K. and Stow, P., *Trans. ASME, Ser. A*, 107-2(1985), 308.
- (3) Laskaris, T. E., *AIAA J.*, 16-7(1978), 717.
- (4) Nagafuji, T. and Morii, H., *Proc. IAHR 10 th Symp.*, 1 (1980), 583.
- (5) 大宮司, 機論, 49-437, B(昭58), 11.
- (6) Sarathy, K. D., *Trans. ASME, Ser. A*, 104-2(1982), 394.
- (7) Singh, U. K., 文献(6)の510ページ.
- (8) Hove, W. V., *Trans. ASME, Ser. A*, 106-2(1984), 430.
- (9) Homes, D. G., and Tong, S. S., *Trans. ASME, Ser. A*, 107-2(1985), 258.
- (10) Tamura, A. and Lakshminarayana, B., *Trans. ASME, Ser. I*, 98-2(1976), 163.
- (11) Howells, R. and Lakshminarayana, B., *Trans. ASME, Ser. I*, 99-1(1977), 167.
- (12) 例えば, Johnson, F. T., *NASA CR-3079*, (1980).
- (13) 例えば, Bristow, D. R. and Grose, G. G., *NASA CR-3020*, (1978).
- (14) Clark, D. R., Maskew, B. and Dvorak, F. A., *AIAA paper*, 84-0122(1984).
- (15) 三宅ほか3名, 機論, 50-457, B(昭59), 2143.
- (16) Murata, S. ほか3名, *TR of Osaka Univ.*, 30-1575 (1980), 519.