旋回成分を持つ軸流中におかれた静止物体上の境界層の相似解*

中村育雄**, 渡辺 崇**, 伴 康弘***

Similar Solutions for Boundary Layers on Bodies of Revolution
in Swirling Axial Streams

Ikuko NAKAMURA, Takashi WATANABE, and Yasuhiro BAN

The equation derived by Falkner and Skan has similar solutions for two-dimensional laminar boundary layer. It has received considerable attention and the existence and uniqueness of its solution have been investigated numerically and analytically. In this paper, similar solutions of the boundary layer which develops on stationary axisymmetric bodies of revolution in swirling axial streams are investigated. The meridional equation is the same as the Falkner-Skan equation except for the term representing the component of centrifugal force. The effect of rotation largely influences the solutions for equations. The existence of solution and branches similar to those in the Falkner-Skan equation are shown.

Key Words: Boundary Layer, Fluid Mechanics, Numerical Analysis, Falkner-Skan Equation, Similar Solution, Rotating Flow, Solution Branches

1. 緒 論

物理問題における相似性の発見は、その現象の理解、整理を助け、結果のより広範囲な適用を促すものと期待されており、相似性のより進んだ応用も試みられている⁽¹⁾。そして境界層においても支配方程式に基づき、二次元物体上⁽²⁾、三次元物体上⁽³⁾、軸対称物体まわり^{(4)~(6)}について、さらには高次境界層⁽⁷⁾において相似性の存在などが調べられてきた。

このうち、二次元非圧縮境界層の相似解を与える方程式(Falkner-Skan方程式)ははやくから注目され、数学的見地からも、その解の存在性、一意性や分枝について研究がなされてきた。この方程式は非線形で解析的な取扱いが困難であり、その解明には数値的解析も大きな役割を果たしてきた。そして層外主流速度により決定されるパラメータの値により変化する性質が明らかにされている。

この Falkner-Skan 方程式の直接の拡張として、旋回成分を持つ軸流中におかれた、静止軸対称物体上の流れの相似解を与える方程式が提唱されている⁽⁵⁾。こ

の運動方程式において子午線方向の式は遠心力の分力としての項を含み、回転の効果がない場合には Falkner-Skan 方程式と一致する。回転の効果がある時、この方程式が、Falkner-Skan 方程式において Stewartson⁽⁸⁾が見出した形と同様な解の分枝を持つことは、著者ら⁽⁹⁾がすでに示した。本研究ではこの方程式の数値的解析をさらにすすめ、回転の効果が方程式の性質に及ぼす影響について解明する。

2. 基礎方程式

図1にここで取り上げた流れの模式図を示す。ここで x, y, z はそれぞれ子午線方向距離、周方向方位角および壁面からの距離を表す座標である。 x, y, z 方向の速度成分を U, V, W で、そして実際の計算に際し無限遠とみなした位置、境界層外縁および壁面上での値をそれぞれ下付添字 ∞, e, w を付けて表すことにする。境界層外縁の流れは子午線方向成分 U_e に加え、周方向成分 V_e を持つ。境界層厚さを物体半径と比べて薄いとした場合の連続の式、境界層方程式および境界条件は次式となる。

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{U}{R} \frac{dR}{dx} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

* 昭和61年10月7日 第64期全国大会講演会において講演、原稿受付 昭和61年3月24日。

** 正員、名古屋大学工学部 (〒464 名古屋市千種区不老町)。

*** 学生員、名古屋大学大学院。

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + W \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{V^2}{R} \frac{dR}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \dots\dots\dots (2)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + W \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{UV}{R} \frac{dR}{dx} = \nu \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \dots\dots\dots (3)$$

$$z=0: U=V=W=0$$

$$z \rightarrow \infty: U \rightarrow U_e(x), V \rightarrow V_e(x) = \frac{\Gamma}{2\pi R}, \Gamma: \text{定数} \dots\dots\dots (4)$$

ここで $R(x)$ は局所の物体半径, P は圧力, ρ, ν はそれぞれ流体の密度, 動粘度であり, 層外周方向速度成分は自由渦で与えられる. この流れの相似解を得るため次の変数を用い変数変換を行う.

$$\left. \begin{aligned} \xi = \frac{x}{L}, \eta = \sqrt{\frac{U_m L}{\nu}} \frac{z}{Lg(x)} \\ U = U_e(\xi) \frac{dF(\eta)}{d\eta}, V = V_e(\xi) G(\eta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

式中, L は基準長さ, U_m は基準主流速度, $g(x)$ は相似スケールである. W を連続の式から見積もり, 境界層方程式および境界条件は次式に変換される⁽⁵⁾.

$$F''' + FF'' + \beta(1 - F'^2) + \gamma(G^2 - 1) = 0 \dots\dots\dots (6)$$

$$G'' + FG' = 0 \dots\dots\dots (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \eta=0: F=F'=G=0 \\ \eta \rightarrow \infty: F', G \rightarrow 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

ここでダッシュは η についての微分を示し, β は境界層外の子午線方向速度の変化割合を表すパラメータ, γ は軸に対する壁面の傾きにより生ずる遠心力の子午線方向分力の寄与を表すパラメータである. 境界層外での値で無次元化した子午線方向速度成分は F' で与えられる. 回転の効果が無い $\gamma=0$ の場合には, 次(6)は Falkner-Skan 方程式となり, 境界条件式(8)とともに吹出しのない二次元固定壁面上の境界層の相似解を与える.

本研究では式(6), (7)および式(8)よりなる2点境界値問題を, 計算上 $\eta \rightarrow \infty$ の表現を $\eta = \eta_\infty$ と有限

図1 軸対称物体上の旋回成分を持つ流れの模式図

の範囲で表し, 四次のアダムス-モルトンの積分法を用いたねらい打ち法により解析した. つまり, F_w'', G_w' を仮定したうえで, Newton 法を併用し解を求めた. 計算は倍長精度で行い, 反復計算の収束判定は F_w'' および G_w' の修正量が 10^{-15} 未満となることより見積もった. 未知の解の分枝の発見は試行錯誤的な F_w'' と G_w' の代入によるところが多い. ある分枝上の一点で解が得られた場合, β の値を変化させてその分枝上の一連の解を求めた. この際, わずかに変化させた β の値に対する計算の F_w'', G_w' の初期値は, 式(6)~(8)全体を β で微分した変分方程式を解くことにより収束した解からの線形近似で予測することができる. なお, このねらい打ち法により得られた解を初期値とし, 差分法の一つである Box 法⁽¹⁰⁾を用い計算を行うと, 計算精度の範囲内で同一の値に収束した. このため求められた解は本計算の範囲では安定した解であると考えられる.

3. 計算結果

3.1 回転の効果が無い場合 ($\gamma=0$) まず, 従来から求められてきた Falkner-Skan 方程式の解と比較しつつ, 回転の効果が無い場合に得られた結果について示す. 図2は, $\eta_\infty=10$ とした場合に本計算で求めた全ての解について子午線方向壁面速度こう配 F_w'' の β による変化を示す. $\beta < 0$ の場合には, 境界条件式(8)を満たす Falkner-Skan 方程式の解は不定となる⁽²⁾. このため Hartree⁽⁹⁾は $\beta > 0$ における解からの連続性および最もはやく $\eta \rightarrow \infty$ での境界条件へ漸近することを条件に, 境界層断面にわたり $0 < F' < 1$ の速度分布を持つ図2中(A)の解を得ている. Stewartson⁽⁸⁾は $F_w'' < 0$ であり, かつ $|F'| < 1$ の速度分布を持つ解を付加条件を用いて一意⁽¹²⁾に決定し, 図2中(B)

図2 回転の効果が無い場合の全域の β における F_w'' の変化 ($\gamma=0$)

の結果を求めた。これらの解はいずれも $\eta \rightarrow \infty$ の境界条件で指数的な漸近を示す⁽²⁾。Stewartson⁽⁸⁾は解 (A), (B) が与えられる箇所より小さな β の範囲では $1 < F'$ と速度超過を含む解となることを示し、物理的には受け入れられないものとした。これに対して Libby ら⁽¹³⁾は β が負の時の主流速度の前縁での特異性を考慮し、速度超過の原因が漸近的な速度分布が得られる前縁からの距離にあるとして、図 2 中 (C) ~ (F) に相当する解の分枝を得ている。このうち (C) の解は Steinheuer⁽¹⁴⁾によっても詳細に調べられた、本研究ではさらに (G), (F) の解を得た。これらの分枝では β が小さくなるほど速度分布に現れる極値の数が増大する。表 1 は (C) ~ (H) について $F_w'' = 0$ となる β の値を示す。この $\beta < 0$ の領域に現れる分散的な解の存在については Troy⁽¹⁵⁾が示しており、さらに β

 表 1 $F_w'' = 0$ となる β の値

	$\gamma = 0$		$\gamma = 1$
(C)	-1.3478	(c)	-1.4396
(D)	-2.4144	(d)	-2.5003
(E)	-3.3743	(e)	-3.4350
(F)	-4.3562	(f)	-4.4047
(G)	-5.3399	(g)	-5.3811
(H)	-6.3253	(h)	-6.3617

 表 2 各 β における F_w'' の値 ($\gamma = 0$)

β	(A)	(I)	(J)	(K)
2	1.6782	1.6598	1.5916	1.5910
3	2.0399	2.0318	1.9358	1.9356
4	2.3412	2.3329	2.2296	2.2293
5	2.6074	2.5990	2.4890	2.4887
6	2.8483	2.8398	2.7236	2.7231
7	3.0699	3.0613	2.9391	2.9386
8	3.2761	3.2672	3.1396	3.1389
9	3.4696	3.4605	3.3276	3.3268

 図 3 正の β における分岐点近くの F_w'' の変化 ($\gamma = 0$)

$= -1$ 近傍での分岐点の数値的解析は Oskam ら⁽¹⁶⁾により行われている。

さて、 β が正の場合には子午線方向速度分布が逆流域を持たない解は一意に定まる⁽¹⁷⁾。 β が正の範囲で得られた解の差異を明確にするため、図 2 内の点線で囲われた部分の拡大を図 3 に、そしていくつかの β に対し各 F_w'' の値を表 2 に示す。Craven ら⁽¹⁸⁾は逆流域を持ち、かつ速度成分 F' の極大値が正である (J), (K) に相当する一群の解を得た。解の分枝 (J), (K) は同じ β の値に対し F_w'' の値の差が極わずかしがなく、図 2 では区別できない。これらの解は F' が -1 以下となる領域の数で分類できる⁽¹⁹⁾。表 2 の (I) は Craven らの結果とは異なる、本研究で得られた F' が負の極大値を持つ解であり、これは分枝 (A) に近い F_w'' の値をとる。この時の速度分布を図 4 に示す。これより Craven らの結果から類推し、 F' が負の極大値を持ちかつ F' が -1 以下となる領域の数で区別できる一群の解の存在することが予測される。

これら β が正で、 F' が負となる (I), (J), (K) の解は、 β が次第に小さくなるに従い、 η 方向への計算範囲の上限 $\eta = \eta_\infty$ における子午線方向速度こう配の値が増加する。図 2, 3 は η_∞ を 10 とみなした場合の

 図 4 $\beta = 5$ で F' が負の極大値を持つ速度分布 ($\gamma = 0$)

 図 5 η_∞ を 10 とした場合の正の β における F_w'' の変化 ($\gamma = 0$)

結果であり、このときの β に対する F_w'' の変化を図 5 に示す。各変化において、ある一定値の β が存在し、その値に近づくに従い F_w'' の値が増大する様子を示すものと思われる。 η_∞ の値を置き換えると F_w'' の立ち上がりの様子は変化する。図 6 は分枝 (I) については $\eta_\infty=30$ 、分枝 (J), (K) については $\eta_\infty=20$ とした場合の結果である。分枝 (I) の変化で $\eta_\infty=10$ の場合の漸近値が異なるとともに、各変化とも立ち上がりは急激になる。同様な F_w'' の急激な変化は、図 2 の β , F_w'' とともに負の領域で、 F_w'' の β に対する変化が緩やかになるところでも見られた。この際には、 β が大きくなるにつれて F_w'' の値が増大した。このように、解の分岐点近くや分枝が近接するところでは、 η_∞ の選択も問題になるものと思われる。

なお、図 4 で見られるように、 $\gamma=0$ の時の本計算の範囲では周方向速度分布は比較的単調な形であった。

3.2 回転の効果のある $\gamma=1$ の場合 次に、回転の効果を加えた場合の結果について示す。図 7 は $\gamma=1$ の場合に $\eta_\infty=10$ として得られたすべての解について F_w'' の β による変化を示したものである。各分枝 (a)

図 6 η_∞ を 30 あるいは 20 とした場合の正の β における F_w'' の変化 ($\gamma=0$)

図 7 回転の効果がある場合の全域の β における F_w'' の変化 ($\gamma=1$)

～(k) はそのまま $\gamma=0$ の場合の (A)～(K) に対応し、同様な特徴を持つ解が得られる。ただし、(a) の $F_w'' < 0$ なる方向への延長である (b) は、この $\gamma=1$ の場合には先の図 2 の $\gamma=0$ の (B) とは異なり、 β が大なる端点近傍で $F_w'' > 0$ となり (k) と連続的に交わる。

図 8 は (c)～(e)、図 9 は (f)～(h) の β が負の領域内の分枝における $F_w''=0$ となる解の子午線方向速度分布である。図 9 の上部は境界層外縁近くで F' 軸を拡大して表した分布である。このときの β の値は表 1 に示すとおりである。図 8, 9 において $1 < F'$ なる部分が存在し、 η が増加するとともに F' は 1 へ振動しつつ漸近する形をとる。そして $\gamma=0$ の Libby ら⁽¹³⁾ の結果と同様に、(c) から (h) へと順に F' の極値数は一つずつ増加する。このことからさらに多くの極値を持つ解の存在が予見できる。

図 8 負の β で $F_w''=0$ となる F' の分布 (その 1) ($\gamma=1$)

図 9 負の β で $F_w''=0$ となる F' の分布 (その 2) ($\gamma=1$)

表 3 各 β における F_w'' の値 ($\gamma=1$)

β	(a)	(i)	(j)	(k)
2	1.1341	1.0905	0.9558	0.9644
3	1.5827	1.5731	1.4320	1.4331
4	1.9423	1.9077	1.7983	1.7975
5	2.2500	2.2121	2.1066	2.1038
6	2.5229	2.4898	2.3767	2.3275
7	2.7703	2.7412	2.6198	2.6145
8	2.9983	2.9718	2.8425	2.8362
9	3.2105	3.1860	3.0493	3.0421

 図 10 正の β における分岐点近くの F_w'' の変化 ($\gamma=1$)

β が正の時の、 β に対する F_w'' の値を表 3 に、また図 7 で点線で囲った領域を図 10 に示す。この $\gamma=1$ の場合にも $\gamma=0$ の場合と同様な F_w'' の増大が見られた。図 7 で、分枝 (a)、(b) は $\beta=0.635$ 近傍で F_w'' 軸と交わる。図 11 は図 7 (a)、(i)~(k) の分枝に対する、 $\beta=5$ における F' の分布である。各分枝において明確な相違がみられる F' の分布の特徴は以下のとおりであり、 $\gamma=0$ の場合と一致する。

- (a) : 単調増加
- (i) : 逆流域は 1 箇所、 F' は負の極大値を持つ
- (j) : 逆流域は 2 箇所、 F' の極大値はすべて正となる
- (k) : 逆流域は 1 箇所、 F' の極大値はすべて正となる

また、本図で見られるように、 $\gamma=1$ の時にも本計算の範囲では周方向速度成分の分布はすべての分枝において極値や逆流部を持たなかった。

4. 結 論

Falkner-Skan 方程式の拡張と考えられる、旋回成分を持つ軸流中の静止軸対称物体上の境界層の相似解

 図 11 $\beta=5$ における速度分布 ($\gamma=1$)

を与える方程式の性質を数値的に解析した。その結果、回転の効果を加えた場合にも、Falkner-Skan 方程式について報告されているいくつかの多重解に相当する解の分枝を見出した。このような解の分枝はたとえば Taylor 渦⁽²⁰⁾で見られるような、実際の流れの安定性、複数モードを反映しているものと考えられ、今後のさらにすすんだ解析的あるいは実験的研究が期待される。

文 献

- (1) Kutateladze, S.S., *Wärme Stoffübertrag.*, 16(1982), 3.
- (2) Rosenhead, L. d., *Laminar Boundary Layers*, (1963), 243, Oxford, Clarendon Press.
- (3) Hansen, A. G., *Trans. ASME*, 80-7(1958), 1553.
- (4) Geis, Th. eds. Gortler, H. and Tollmein, W., in *50 Jahre Grenzschicht-forschung*, (1955), 294, Vieweg, Braunschweig.
- (5) 石沢, 機論, 28-195(昭 37), 748.
- (6) Leblanc, R., *AIAA J.*, 22-6(1984), 748.
- (7) Werle, M. J. and Davis, R. T., *J. Fluid Mech.*, 40-2(1970), 343.
- (8) Stewartson, K., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 54-3(1954), 454.
- (9) 中村・渡辺, ながれ, 3-4(昭 59), 343.
- (10) Cebeci, T. and Bradshaw, P., *Momentum Transfer in Boundary Layers*, (1977), 213, Hemisphere Pub.
- (11) Hartree, D. R., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 33-2(1937), 223.
- (12) Hasting, S.P., *SIAM J. Appl. Math.*, 22-2(1972), 329.
- (13) Libby, P. A. and Liu, T. A., *AIAA J.*, 5-5(1967), 1040.
- (14) Steinheuer, J., *AIAA J.*, 6-11(1968), 2198.
- (15) Troy, W. C., *Q. Appl. Math.*, 37(1979), 157.
- (16) Oskam, B. and Veldman, A. E. P., *J. Eng. Math.*, 16(1982), 295.
- (17) Iglisch, R., *Z. Angew. Math. Mech.* 34-12(1954), 441.
- (18) Craven, A. H. and Peletier, L. A., *Mathematica*, 19-37(1972), 135.
- (19) Hasting, S. P. and Troy, W., *Proc. R. Soc. Lond., Ser. A*, 397-1813(1985), 415.
- (20) Benjamin, T. B. and Mullin, T., *Proc. R. Soc. Lond., Ser. A*, 377-1607(1981), 221.