混合/多重分割と双共役こう配法を用いた 効率的な流れの有限要素法解析*

江口 譲**, Laszlo Fuchs***, 矢川 元基****

An Efficient Finite Element Flow Analyses Applying the Biconjugate-Gradient Method and Hybrid/Multi-Level Meshes

Yuzuru EGUCHI, Laszlo FUCHS, and Genki YAGAWA

The biconjugate-gradient method is applied to the finite element analyses of the Navier-Stokes equations. The minimum storage requirement is realized by use of the hybrid mesh which is composed of the usual irregular elements and the regular elements, since the matrices emanating from the regular meshes have a regular structure and need not be stored entirely. The convergence of the iterative procedures is accelerated by the multi-level meshes which consist of several meshes of different mesh size. The flow in a driven cavity and the channel flow past a valve are computed to show the practicability of the proposed methodology.

Key Words: Finite Element Method, Navier-Stokes Equation, Hybrid Mesh, Multi-Level Mesh, Biconjugate Gradient Method

1. 緒 言

有限要素法によって得られる離散方程式は一般に不規則でしかも疎な行列方程式であるため、バンド行列やスカイライン行列などを用いる直接解法ではばく大な記憶容量を必要とする。特に Navier-Stokes 方程式を基礎方程式とする流体解析は通常の構造解析に比べてより多くの記憶容量を必要とする。その理由として Navier-Stokes 方程式の対流項の演算子が非対称であり、それに対応する行列も非対称行列になることと、Navier-Stokes 方程式は一種の移流-拡散方程式であるため、物理的に意味のある解を得るには十分細かな分割が必要なことの2点が挙げられる。

一方、差分法との比較においては、差分法から導かれる行列は規則的な構造を有しており、その行列をすべて記憶する必要はない。この方程式はSOR法⁽¹⁾、共役こう配法⁽¹⁾、Multi-grid法⁽²⁾などの反復解法によって効率的に解を求めることができる。有限要素法は複

雑な形状を近似するのに適しているが、流体力学問題の大部分の形状は構造問題で現れる形状ほど複雑ではなく、多くの場合差分法による解析が計算時間・記憶容量の経済性の点で優れている。その裏付けとして、商業用流体解析コードの大部分が差分法に基づいていることが挙げられる。

本論文の目的は、上に述べた有限要素法の多大な記憶所要量を大幅に低減化することである。その方法として、差分格子のような規則的な分割と不規則的な形状の分割を区別して利用する混合分割法を提唱する。規則的な分割から生じる全体行列は差分法で現れる行列と同様に、規則的な構造を有しており、その極一部のみを記憶するだけで十分である。不規則的な分割から生じる行列はすべて記憶する必要があるが、その数が小さければ、全体として記憶所要量を大幅に低減化することができる。このように記憶された行列方程式を解くには、行列に変形が加えられない反復解法を用いる必要がある。非対称行列に対する効率的な反復解法としては、共役残差法と双共役こう配法⁽³⁾が現在、注目を浴びているが、本論文では後者を用いた。双共役こう配法はLanczos法の変形であり、Fletcher⁽⁴⁾によってその数学的性質が検討されている。双共役こう配法を用いる場合、その収束を加速するために不完全

* 昭和61年8月19日 第937回講演会において講演、原稿受付 昭和62年1月6日。

** 准員、東京大学工学部 (〒113 東京都文京区本郷 7-3-1)。

*** ストックホルム王立工科大学 (S-10044 Stockholm, Sweden)。

**** 正員、東京大学工学部。

LU 分解などによる前処理を施すのが一般的であるが、本論文では記憶所要量の最小化という観点から、そのような前処理は施さない。それに代わる加速法として、ここでは多重有限要素分割を用いる。この手法は現在、差分法分野で盛んに研究・応用されている Multi-grid 法⁽²⁾における荒い差分格子から細かい差分格子に移行する過程と形式的に類似している。

2章では基礎方程式ならびに有限要素法定式化、3章では混合分割とそれから生じる行列の特性について説明する。また多重有限要素分割によって加速される双共役こう配法を4章で、数値解析例を5章で説明する。

2. 基礎理論

流体に対して、非圧縮性 Newton 流体を仮定し、流体運動は二次元定常層流流れに限定する。この運動を支配する方程式は以下の質量および運動量保存式 (Navier-Stokes 方程式) である。

$$u_{i,i} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$u_j u_{i,j} + p_{,i} - u_{i,j,j} / Re = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 u_i は i 方向の流速成分、 p は圧力を表し、各変数は代表長 L および代表流速 U によって無次元化されている。レイノルズ数 Re は動粘性係数 ν を用いて、 $Re = LU/\nu$ で定義される。また添字 i および j は、 x または y 成分に対応し 1 または 2 をとり、コンマは偏微分を表す。本論文の添字にはすべて総和規約が適用される。

式(1)および式(2)に対する境界条件として、次の2種の境界条件を仮定する。

$$u_i = \hat{u}_i \quad \text{on } \Gamma_1 \text{ (流速境界)} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$t_i = \hat{t}_i \quad \text{on } \Gamma_2 \text{ (表面応力境界)} \quad \dots\dots\dots (4)$$

ただし、式(4)の t_i は次式で定義される。

$$t_i = -pn_i + u_{i,j}n_j / Re \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 n_i は境界 Γ_2 上に立てた外向き単位法線ベクトルである。

式(1)および式(2)に対する弱形式として、著者らは Augmented Lagrangian⁽⁵⁾を用いた。この弱形式から有限要素解を求める方法として、Fortin ら⁽⁵⁾は次のような一般化された Uzawa アルゴリズムを提唱している。

Step 0: u_i^0, p^0 を初期推測値として与える。

Step 1: u_i^n, p^n を既知として、次の方程式を

$$\delta u_i^n \text{ について解く } (n \geq 0).$$

$$\begin{aligned} & u_j^0 \delta u_{i,j}^n + \delta u_j^n u_{i,j}^0 - r \delta u_{i,j,j}^n - \delta u_{i,j,j}^n / Re \\ & = -u_j^n u_{i,j}^n - p_i^n + u_{i,j,j}^n / Re + r u_{i,j,j}^n \quad \dots\dots (6) \end{aligned}$$

Step 2: u_i^{n+1}, p^{n+1} を次式により更新する。

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \delta u_i^n \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$p^{n+1} = p^n - r u_{i,i}^{n+1} \quad \dots\dots\dots (8)$$

(Step 1, 2 を収束または発散するまで繰返す。)

式(6)および式(8)の r は Uzawa アルゴリズムでの収束を加速するためのペナルティ係数であり、非圧縮性の条件を満たすためのペナルティ項ではない。したがって、このペナルティ係数 r はペナルティ法⁽⁶⁾のように非常に大きな正数である必要はなく、有限要素法定式化によって得られる全体行列の条件数を小さくすることができるため、反復法を用いる場合は有利である。

以上の説明は連続体体系において与えられたが、離散系においてもその手順は全く同一である。4 節点アイソパラメトリック要素によって領域を分割し、流速に対して双線形、圧力に対して区分定数の補間関数を用いると、式(6)は Galerkin 法によって次式のように離散化される。

$$\begin{aligned} & A_{\alpha\beta\gamma j} U_{\gamma j}^n \delta U_{\beta i}^n + B_{\alpha\beta\gamma j} U_{\gamma i}^n \delta U_{\beta j}^n + D_{\alpha\beta} \delta U_{\beta i}^n / Re \\ & + r C_{\alpha i} S^{-1} C_{\beta j} \delta U_{\beta j}^n = -A_{\alpha\beta\gamma j} U_{\gamma j}^n U_{\beta i}^n \\ & - r C_{\alpha i} S^{-1} C_{\beta j} U_{\beta j}^n - D_{\alpha\beta} U_{\beta i}^n + C_{\alpha i} P^n + F_{\alpha i} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここに、式(9)の各行列は以下の式で定義される。

$$A_{\alpha\beta\gamma j} = \int_{Q^e} \Phi_{\alpha} \Phi_{\gamma} \Phi_{\beta,j} dQ \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$B_{\alpha\beta\gamma j} = A_{\alpha\gamma\beta j} \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$C_{\alpha i} = \int_{Q^e} \Phi_{\alpha,i} dQ \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$D_{\alpha\beta} = \int_{Q^e} \Phi_{\alpha,j} \Phi_{\beta,j} dQ \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$F_{\alpha i} = \int_{\Gamma_2} \Phi_{\alpha} \hat{t}_i d\Gamma \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$S = \int_{Q^e} dQ \quad \dots\dots\dots (15)$$

なお Φ_{α} は流速の補間関数を、 α, β および γ は要素 e に属する節点の番号を表し、また $U_{\beta i}^n, \delta U_{\beta i}^n$ および P^n は式(6)の $u_i^n, \delta u_i^n$ および P^n の離散値にそれぞれ対応する。さらに、 Q^e は要素 e をおおう領域、 Γ はその境界である。式(9)のペナルティ項はペナルティ法⁽⁶⁾におけるペナルティ行列と形式的に同一であり、二次元空間において4節点アイソパラメトリック要素を用いる場合は、次の積分を次元低減積分したものと一致することが知られており、計算効率のうえでは有利である。

$$G_{\alpha\beta i j} = \int_{Q^e} \Phi_{\alpha,i} \Phi_{\beta,j} dQ \quad \dots\dots\dots (16)$$

ただし、式(16)は要素の辺が湾曲した高次のアイソパラメトリック要素では正しくないので注意を要する⁽⁶⁾。これは非圧縮性材料力学解析においても同様で

ある。

3. 混合分割と行列構造

本論文で提唱する混合分割とは差分格子のような規則的な分割と一般的な不規則形状の有限要素分割の混合を指す。図1に混合分割の一例を示す。この例では分割は規則分割群2個と不規則分割群1個から成っているが、一般にその数は任意である。いま、図1の混合分割の各節点にA, B, Cの順に節点番号を付けた場合、導出される全体行列の構造は図2に示すようなものである。図2の行列AおよびBは分割AおよびBの規則性のため、差分法で現れるような規則的な行列である。したがって、行列AおよびBをすべて記憶する必要はなく、その極一部のみを記憶するだけで十分である。行列Cは不規則分割Cから生じる行列で、不規則な疎行列である。本論文で用いる行列方程式の解法は反復法であり、行列はベクトルとの積の計算に現れるのみであるので、不規則行列Cは全体化せず、要素行列の形で記憶する。

次に、規則分割から生じる要素行列を導出する。規則分割の一つの要素が図3に示すような形状と傾きを有する場合、全体座標 (x, y) と局所座標 (ξ, η) は次の関係にある。

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} h_x \cos \theta & -h_y \sin \theta \\ h_x \sin \theta & h_y \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (17)$$

また、補間関数 ϕ_a は先に述べたように双線形関数であり、 (ξ_a, η_a) を節点 a における局所座標とすると、次式で表される。

$$\phi_a = (1 + \xi_a \xi) (1 + \eta_a \eta) / 4 \quad (18)$$

式(17), (18)より、補間関数の全体座標による微分は次式で与えられる。

$$\frac{\partial \phi_a}{\partial x} = \frac{\cos \theta}{2h_x} \xi_a (1 + \eta_a \eta) - \frac{\sin \theta}{2h_y} \eta_a (1 + \xi_a \xi) \quad (19)$$

$$\frac{\partial \phi_a}{\partial y} = \frac{\sin \theta}{2h_x} \xi_a (1 + \eta_a \eta) + \frac{\cos \theta}{2h_y} \eta_a (1 + \xi_a \xi) \quad (20)$$

図1 典型的な混合分割

また、全体座標における積分要素 $d\Omega$ は次式によって局所座標系に変換される。

$$d\Omega = (h_x h_y / 4) d\xi d\eta \quad (21)$$

式(18)~(21)を要素行列(10)~(16)に代入すると、以下の規則要素行列を得る。

$$A_{a\beta\gamma 1}^R = \frac{h_y \cos \theta}{32} \xi_a \left(1 + \frac{\xi_a \xi_\gamma}{3} \right) \times \left(1 + \frac{\eta_a \eta_\beta + \eta_\beta \eta_\gamma + \eta_\gamma \eta_a}{3} \right) - \frac{h_x \sin \theta}{32} \eta_a \times \left(1 + \frac{\eta_a \eta_\gamma}{3} \right) \left(1 + \frac{\xi_a \xi_\beta + \xi_\beta \xi_\gamma + \xi_\gamma \xi_a}{3} \right) \quad (22)$$

$$A_{a\beta\gamma 2}^R = \frac{h_y \sin \theta}{32} \xi_a \left(1 + \frac{\xi_a \xi_\gamma}{3} \right) \times \left(1 + \frac{\eta_a \eta_\beta + \eta_\beta \eta_\gamma + \eta_\gamma \eta_a}{3} \right) + \frac{h_x \cos \theta}{32} \eta_a \times \left(1 + \frac{\eta_a \eta_\gamma}{3} \right) \left(1 + \frac{\xi_a \xi_\beta + \xi_\beta \xi_\gamma + \xi_\gamma \xi_a}{3} \right) \quad (23)$$

$$B_{a\beta\gamma 1}^R = A_{a\gamma\beta 1}^R \quad (24)$$

$$B_{a\beta\gamma 2}^R = A_{a\gamma\beta 2}^R \quad (25)$$

$$C_{a1}^R = \frac{h_x h_y}{2} \left(\frac{\cos \theta}{h_x} \xi_a - \frac{\sin \theta}{h_y} \eta_a \right) \quad (26)$$

$$C_{a2}^R = \frac{h_x h_y}{2} \left(\frac{\sin \theta}{h_x} \xi_a + \frac{\cos \theta}{h_y} \eta_a \right) \quad (27)$$

$$D_{a\beta}^R = \frac{h_y \xi_a \xi_\beta}{4h_x} \left(1 + \frac{\eta_a \eta_\beta}{3} \right) + \frac{h_x \eta_a \eta_\beta}{4h_y} \left(1 + \frac{\xi_a \xi_\beta}{3} \right) \quad (28)$$

図2 図1の分割から生じる全体行列の構造

図3 規則分割から取り出した有限要素

$$F_{\alpha i}^R = h_x \hat{t}_i / 2, h_y \hat{t}_i / 2, 0 \dots\dots\dots (29)$$

$$S^R = h_x h_y \dots\dots\dots (30)$$

$$G_{\alpha \beta ij}^R = C_{\alpha i}^R (S^R)^{-1} C_{\beta j}^R \dots\dots\dots (31)$$

なお、式(22)から(31)において、肩文字 R は規則分割から生じた行列であることを示す。先に述べたように、これらの行列は全体化する必要はないが、本コードでは計算効率を上げるために、全体化しその極一部のみを記憶する。いま、規則分割群の個数を N^R 、不規則要素数を N^{IR} とすると、本コードで行列を記憶するために必要な記憶容量は次式で与えられる、

$$2704N^R + 64N^{IR} \text{ (語)} \dots\dots\dots (32)$$

4. 双共役こう配法と多重有限要素分割

行列方程式(9)は双共役こう配法によって解かれる。双共役こう配法のアルゴリズムを説明するために、式(9)を次のように表す。

$$M^n \delta U^n = b^n \dots\dots\dots (33)$$

ここに、 M^n および b^n は Uzawa アルゴリズムの第 n ステップにおける非対称行列および右辺ベクトルである。式(33)に対する双共役こう配法の手順は次のように書き下すことができる⁽³⁾。

Step 0: 初期推測値 δU^0 を与える。

Step 1: 初期残差などを次式で計算する。

$$r_0 = b^n - M^n \delta U^0 \dots\dots\dots (34)$$

$$q_0^* = r_0^* = q_0 = r_0 \dots\dots\dots (35)$$

Step 2: 収束または発散するまで逐次解を以下の手順に従って更新する ($k \geq 0$)。

$$\alpha_k = (r_k, r_k^*) / (M^n q_k, q_k^*) \dots\dots\dots (36)$$

$$\delta U_{k+1}^n = \delta U_k^n + \alpha_k M^n q_k \dots\dots\dots (37)$$

$$r_{k+1} = r_k - \alpha_k M^n q_k \dots\dots\dots (38)$$

$$r_{k+1}^* = r_k^* - \alpha_k (M^n)^T q_k^* \dots\dots\dots (39)$$

$$\beta_k = (r_{k+1}, r_{k+1}^*) / (r_k, r_k^*) \dots\dots\dots (40)$$

$$q_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k q_k \dots\dots\dots (41)$$

$$q_{k+1}^* = r_{k+1}^* + \beta_k q_k^* \dots\dots\dots (42)$$

双共役こう配法で必要な記憶容量は座標ベクトルや作業領域を含めて $16N^N$ 語 (N^N : 節点数) である。したがって全記憶所要量 M は式(32)および圧力を記憶する領域を加えて、次式で表される、

$$M = 16N^N + 2704N^R + 64N^{IR} + N^E \text{ (語)} \dots\dots\dots (43)$$

ここに、 N^E は要素数である。通常 N^R は 1 ないし 2 であるので、不規則要素数 N^{IR} が小さければ、記憶所要量はおおむね節点数に一次比例することになる。

共役こう配法系の解法では収束を加速するために、不完全 Choleski, または不完全 LU 分解による前処理を行うのが通常であるが、本論文では記憶所要量の最小化という観点からこの方法は採用しない。それに

代わる加速法として多重有限要素分割を用いる。この方法では、最初に最も荒い分割を用いて解を求める。この分割では自由度数が小さいため、双共役こう配法の収束は速く計算時間は無視できるほど小さい。次にこの解を次のレベルの細かい分割上に内挿することによって各節点上に速度の初期推測値を、各要素上に圧力の初期推測値を与える。この初期推測値が逐次解の収束値に近い場合、Uzawa アルゴリズムまたは双共役こう配法の収束が加速されることが期待される。このような手順を次々に繰返し、最終レベルの最も細かい分割上で解を求める。本コードでは、最も荒い分割のデータのみを入力し、各要素を 4 分割することによって次のレベルの分割を自動生成する。要素の分割は各要素の 4 辺の各中点および局所座標の原点に対応する点に新しい節点を配置し 4 分割する。荒い分割上の解を新しく生成された細かい分割上へ内挿する場合、速度は双一次の Lagrange 補間関数を用いて内挿し、圧力は旧要素における圧力をそのまま新要素上の圧力の初期推測値として与える。このような分割法では最も荒い分割の境界形状が最終レベルの分割まで保たれるので、非常に複雑な境界の近似には適さない。一方その長所は、最も荒い分割のデータのみを入力するだけで全レベルの分割が自動生成されるため、データ入力的大幅な省力化が実現されることである。

5. 数値解析例

まず、レイノルズ数 Re が 400 のキャビティ内強制対流問題を $4 \times 4, 8 \times 8, 16 \times 16, 32 \times 32$ 要素分割から成る 4 レベル多重分割によって計算した。各レベルの Uzawa アルゴリズムのペナルティ係数はそれぞれ 10, 2.5, 0.625, 0.156 25 としたが、これらの値は必ずしも最適値ではない。Uzawa アルゴリズムの収束判定は式(7)の δu^2 の一節点当たりの二乗ノルムが 10^{-7} 以下の場合収束とみなし、双共役こう配法の収束判定は式(38)の残差 r_{k+1} の一節点当たりの二乗ノルムが 10^{-9} 以下の場合収束と判定した。最終レベルにおける流れ関数の分布および圧力分布をそれぞれ図 4 (a) および (b) に示す。これらの解は定量的にも他の解析者の解⁽⁷⁾と良く一致している。各レベルにおける双共役こう配法の繰返し回数の総数はそれぞれ 29, 289, 652, 1 220 であった。比較のために、 32×32 要素分割の問題を直接解析したところ、繰返し回数の総数は 1 113 であった。この問題はレイノルズ数が比較的高く、 $4 \times 4, 8 \times 8, 16 \times 16$ 要素分割などの荒い分割では正しい解が得られないため、多重分割による収束の加速が実現されない。一方、低レイノルズ数 ($Re=10$)

(a) 流れ関数の分布 (b) 圧力分布

図4 キャビティ内強制対流 ($Re=400$)

(a) 第1レベル

(b) 第2レベル

図5 逆止め弁まわりの流れに対する混合分割

の問題に対しては、多重分割によって計算時間が1/2~1/3に短縮されることを確かめたが、それらの計算時間はペナルティ数や収束判定条件にかなり依存する。一方、この問題では規則分割を使用することにより記憶所要量の大幅な低減化を実現した。この問題を解析するのに必要な記憶容量は倍精度計算で0.2 MB以下である。

次に、本論文で提唱した混合分割の実用性を示すために逆止弁を含む流路内流れを解析した。この逆止弁は主に心臓の人工弁として用いられているものであり、実際の実験は全く不可能である。したがって、弁に負荷される力やモーメントおよび流体内に生じるせん断応力をあらかじめ知ることは非常に重要である。それらの具体的な解析結果は本論文の主題ではないので、ここでの解析では簡単のために $\nu=1.0 \text{ m}^2/\text{s}$, $\rho=1.0 \text{ kg/m}^3$ とする。図5(a)および(b)に第1レベルの分割および第2レベルの分割をそれぞれ示す。バルブ近傍の比較的複雑な部分は不規則分割によって、またその上流および下流の部分は規則分割によって近似される。この流路の寸法は長さ30 m、幅9 mとした。また境界条件は壁およびバルブ表面上で流速ゼロとし、入口および出口で、次の境界条件を与えた。

(a) 流れ関数の分布

(b) 圧力分布

図6 図5(b)における解析結果

$$\left. \begin{array}{l} t_1 = 50 \text{ Pa}, t_2 = 0 \text{ Pa} \quad (\text{入口}) \\ t_1 = t_2 = 0 \text{ Pa} \quad (\text{出口}) \end{array} \right\} \dots\dots\dots (44)$$

図6(a)および(b)に解析によって得られた流れ関数および圧力の分布をそれぞれ示す。これらの結果は物理的に合理的なものであり、混合分割の実用性を支持するものである。なお、この解析に必要な記憶容量は倍精度計算で約0.5 MBである。

6. 結 論

本論文では、混合分割と双共役こう配法による流れの有限要素法解析を提唱した。この方法では、差分法の効率的な記憶方式を取り入れ、従来の有限要素法の短所であったばく大な記憶所要量を解消した。これによりはん用大形機による大規模解析、ミニコンピュータによる詳細解析が可能となった。

一方、収束を加速する方法として用いた多重分割は高レイノルズ数の問題に対しては不向きであることが判明した。また Uzawa アルゴリズムのペナルティ数や収束条件は本論文の解析では必ずしも最適化されておらず、これらが今後の課題である。

最後に、本研究に対する支援を賜ったスウェーデン技術開発会議 (STU) に謝意を表する。

文 献

- (1) 戸川, マトリックスの数値解析, (昭46), 52, オーム社.
- (2) Brandt, A., *Math. Comput.* 31-138 (1977), 333.
- (3) 村田・ほか2名, スーパーコンピュータ, (昭60), 136, 丸善.
- (4) Fletcher, R., *Numer. Anal. Rep.* No. 11 (1975).
- (5) Fortin, M. and Fortin, A., *Commun. Appl. Numer. Methods*, 1-3 (1985), 205.
- (6) Engelman, M. S., ほか3名, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 2-1 (1982), 25.
- (7) Ghia, U., ほか2名, *J. Comput. Phys.*, 48-3 (1982), 387.

討 論

〔質問〕 吉 田 裕〔東京工業大学工学部〕

Fortin らの原論文によれば、式(6)、(8)のパラメータ r を十分大きくとらなければ Uzawa アルゴリズムの反復計算回数を多く必要とするだけでなく、非圧縮条件も精度よく満足されないようである(数値例として $r=10^7$ が示されている)。貴論文の計算例では r にはかなり小さな値が用いられているが、反復回数はどれくらいであったのか、また、得られた解が非圧縮性の条件をどの程度の精度で満足しているのか、お教えいただきたい。

〔回答〕 本論文のキャビティ内強制対流問題 ($R_\nu=400$) で要した Uzawa アルゴリズムの反復回数は 4×4 , 8×8 , 16×16 , 32×32 要素の名レベルで、それぞれ 3, 6, 6, 11 であった。また要素の中心で計算した $|\nabla \cdot \mathbf{u}|$ の一要素当たりの平均値は各レベルで 8.9×10^{-7} , 5.5×10^{-6} , 3.3×10^{-5} , 1.1×10^{-4} であった。各レベルでのペナルティ数の値が 10, 2.5, 0.625, 0.156 25 であったことを考えると、ご指摘のように非圧縮性の条件はペナルティ数が小さい場合は厳密に満足されないようである。ペナルティ数を大きくすると、Uzawa アルゴリズムの反復回数が少なくなり、また非圧縮性の条件も精度良く満足されるが、一方、双共役こう配法によって解かれる行列方程式の条件数が大きくなり、双共役こう配法の収束が悪化する。したがって、ペナルティ数は精度・繰返し回数に関して最適値を有すると考えられるが、この値をあらかじめ理論的に推測することは困難であり、数値実験によって求める必要があると思われる。

〔質問〕 畠 山 正 行

〔東京都立航空工業高等専門学校〕

数値例として、具体的にどの程度の記憶容量を必要としたか。

〔回答〕 このアルゴリズムに必要な記憶容量は本論文中の式(43)で算出されるが、典型的な二次元問題で必要となる記憶容量は倍精度計算で 1 MB 以内である。たとえば本論文中の図 5 (b) の分割(要素数 1 612)で必要な記憶容量は 0.5 MB である。従来より有限要素法の分野で用いられた直接解法による手法でこの問題を解くには 10 MB 程度の記憶容量が必要と思われる。

〔質問〕 坪 井 一 洋〔日本情報サービス(株)〕

結論の中で、「多重分割は低レイノルズ数の問題に対しては有効であるが、うんぬん」とあるが、中・高レイノルズ数に対して有効でないのはなぜか。

また、有限要素法では高レイノルズ数流れの計算は難しいといわれているが、今回の定式化においてその点はどうか。

〔回答〕 レイノルズ数が高い場合、その物理現象を解像するには十分細かな分割が必要であり、多重分割の粗い分割上で実際の流れの様子をとらえることは困難である。したがって、粗い分割で求めた解は物理的な意味はなく、次の細かい分割上での繰返し計算の良い初期推測値となり得ないため、中・高レイノルズ数の流れでは多重分割による収束の加速が困難となる。また定式化において風上差分的な人工粘性を導入していないため、十分細かな分割を用いなければ高レイノルズ数の流れの解析が困難になるということも原因の一つである。