流線座標による軸対称噴流の数値解析*

築地 徹浩**, 高橋 浩爾**

Numerical Analysis of an Axisymmetric Jet Using
a Streamline Coordinate System

Tetsuhiro TSUKIJI and Koji TAKAHASHI

The complete equations which describe a viscous axisymmetric flow are formulated using a streamline coordinate system (ϕ, ψ) , where ψ is the stream function. The independent variable ϕ is constant along the orthogonal trajectories of streamlines in a plane including a symmetric axis. The axisymmetric laminar jet leaving a Poiseuille tube into an inviscid outer fluid phase is solved numerically using parabolic differential equations which are simplified by a boundary-layer type analysis. The prediction of the velocity distributions and shape of the free surface profile, under the influence of both gravity and surface tension, is undertaken. The results obtained by the present method are found to agree very closely with experimental results. The behaviour of a laminar jet issuing from a convergent nozzle is also investigated by the same method.

Key Words: Fluid Mechanics, Numerical Analysis, Free Surface, Streamline Coordinate System, Axisymmetric Jet

1. 緒 言

流線座標による二次元流れの解析は古くから行われている⁽¹⁾。近年、非圧縮性二次元粘性流れの場合の定式化が行われ⁽²⁾⁽³⁾、二次元平行流路からの層流噴流⁽²⁾、およびスプール弁絞りからの二次元層流噴流⁽⁴⁾⁽⁵⁾が数値的に解かれた。その結果、自由表面を有する噴流解析に有効であることが示された。さらに、流れの可視化と画像処理技術への適用も試みられている⁽⁶⁾。一方、三次元軸対称流れの場合については、オリフィスからの噴流⁽⁷⁾、およびディフューザ内の流れ⁽⁸⁾が流線座標を用いて数値的に解かれているが、これらの解析ではポテンシャル流れが仮定されている。

本論文では、粘性流れを仮定し流線座標による非圧縮性三次元軸対称流れの基礎方程式を誘導することを試みる。得られた基礎方程式を放物形方程式に近似し⁽⁹⁾、円管から大気中への液噴流を数値的に解く。この結果を、従来の実験結果⁽¹⁰⁾と比較するとともに、本計算法の妥当性を示す。円管からの液噴流に関する理論的研究は、従来から数多く行われている。Tillett⁽¹¹⁾,

Goren-Wronski⁽¹²⁾は重力のない場合の流れを解析的に求めた。有限要素法⁽¹³⁾や差分法⁽¹⁴⁾による数値計算および境界層理論を適用した解析により噴出後の流れを求めた報告⁽¹⁵⁾もある。これらの解析では円柱座標が用いられている。Duda-Vrentas⁽¹⁶⁾は、Von Mises変換⁽¹⁷⁾と類似の考え方で、円柱座標の対称軸を含む一つの平面において、対称軸に直角な直線と流線とで構成される座標を用いて軸対称流れの解析を行っているが、直交座標ではないために流線曲率が大きくなると精度よく解が求まらないことが推察される。本計算では、粘性に比べて重力の影響が比較的大きい、すなわち噴出出口付近の流線曲率が大きく噴流が急速に収縮する範囲で計算を行っており、重力および表面張力の影響が考慮されている。自由表面形状および速度分布などが、従来の実験結果と比較される。

さらに、円管からの噴流計算と同様の方法により、ノズルからの液噴流が数値的に解かれる。自由表面形状および速度分布などの計算結果が円管からの噴流の計算結果と比較され、ノズルからの噴流の特徴が示される。

主 な 記 号

$$Fr: \text{フルード数} = U^2/(gL^*)$$

* 昭和61年10月25日 山梨地方講演会において講演、原稿受付 昭和61年4月18日。

** 正員、上智大学理工学部 (〒102 東京都千代田区紀尾井町7-1)。

g : 重力加速度

L^* : 代表長さ

p : 無次元化圧力 $= p^*/(\rho U^{*2})$

$\mathbf{q}$: 無次元化速度ベクトル $= \mathbf{q}^*/U^*$

q : 無次元化速度の大きさ $= q^*/U^*$

Re : レイノルズ数 $= L^* U^* / \nu$

r : 無次元化半径方向座標 $= r^*/L^*$

U^* : 代表速度

v_r : 無次元化半径方向速度 $= v_r^*/U^*$

v_z : 無次元化軸方向速度 $= v_z^*/U^*$

We : ウェーバ数 $= \rho U^{*2} L^* / \sigma^*$

z : 無次元化軸方向座標 $= z^*/L^*$

α : ノズルの開き角 (図2参照)

ν : 流体の動粘度

ρ : 流体の密度

σ^* : 表面張力

ϕ : 流れ方向の座標

ψ : 流れ関数 $= \psi^*/(U^* L^*)$

Ω : 無次元化渦度ベクトル $= \Omega^*/(U^*/L^*)$

Ω : 無次元化渦度 $= \Omega^*/(U^*/L^*)$

添字

*: 有次元量を表す。

2. 基礎方程式

2.1 zr 座標と $\phi\psi$ 座標 図1に示すように、円柱座標系の対称軸(z 軸)を含む一つの平面をとって考える。測度係数を導入して、流線とそれに直交する曲線を座標曲線とする流線座標(ϕ, ψ)を用いる。ここで、 ϕ は流れ方向の座標であり、 ψ は流れと直角方向の座標(流れ関数)である。

流れ関数 ψ は、次式で定義される。

$$v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (1)$$

ここで、 v_r, v_z はそれぞれ無次元化速度の r 方向および z 方向成分である。

次に流線方向の座標 ϕ を

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \beta v_r, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = \beta v_z \quad (2)$$

によって定義する。式(1)および(2)は $\phi\psi$ 座標の直交条件を満足している。すなわち、流線上では $\psi = \text{const.}$ 、それに直交する曲線上では $\phi = \text{const.}$ になる。ポテンシャル流れにおいては、流線と直交する曲線は等ポテンシャル線であるから、 ϕ は速度ポテンシャルであり、 $\beta=1$ になる。

一方、 $\phi = \phi(r, z)$ および $\psi = \psi(r, z)$ であるから、 ϕ および ψ に関する r および z の1階導関数は一般に

次式により与えられる⁽⁷⁾⁽¹⁸⁾。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial \phi} &= \frac{1}{J} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \frac{\partial r}{\partial \psi} = -\frac{1}{J} \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \phi} &= -\frac{1}{J} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad \frac{\partial z}{\partial \psi} = \frac{1}{J} \frac{\partial \phi}{\partial r} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここで、 J は次式で定義されるヤコビアンである。

$$J = \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (4)$$

式(1)および(2)から v_r, v_z を消去して、式(3)を用いると次式が得られる。

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \phi} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial z}{\partial \psi} \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial \phi} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial r}{\partial \psi} \quad (6)$$

無次元化速度の大きさ q は、 $q = \sqrt{v_r^2 + v_z^2}$ であるから、式(1)~(4)から

$$q = \frac{1}{r \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\right)^2}} \quad (7)$$

が得られる。

2.2 運動方程式および渦度輸送方程式 ナビエ・ストークスの運動方程式は、

$$(\mathbf{q} \cdot \nabla) \mathbf{q} = -\nabla p + \mathbf{K} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{q} \quad (8)$$

で表される。ここで、 $\mathbf{q}, \mathbf{K}$ および p は、それぞれ無次元の速度ベクトル($q\mathbf{e}_\phi$)、質量力および圧力であり、 ∇ は無次元のベクトル微分演算子で次式で定義される。

$$\nabla = \mathbf{e}_\phi \beta q \frac{\partial}{\partial \phi} + \mathbf{e}_\psi r q \frac{\partial}{\partial \psi} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (9)$$

ここで、 $\mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_\psi$ および $\mathbf{e}_\theta$ は、それぞれ ϕ, ψ および円周方向の無次元単位ベクトルであり、 θ は円周方向の座標である。

次に渦度 $\Omega (= \Omega \mathbf{e}_\theta)$ を次式で定義する。

$$\Omega = \nabla \times \mathbf{q} = \frac{r q^2}{\beta} \frac{\partial \beta}{\partial \phi} \mathbf{e}_\theta \quad (10)$$

図1 流線座標

非圧縮性流れの場合、 $\nabla^2 \mathbf{q} = -\nabla \times \Omega$ であるから、 $\mathbf{q} = q\mathbf{e}_\phi$ を考慮して式(9)および(10)を式(8)に代入し整理すると ϕ および ψ 方向の運動方程式がそれぞれ次のように得られる。

$$\beta q^2 \frac{\partial q}{\partial \phi} = -\beta q \frac{\partial p}{\partial \phi} + K_\phi - \frac{q}{R_e} \frac{\partial}{\partial \psi} (r\Omega) \quad \dots\dots(11)$$

$$\frac{rq^2}{\beta} \frac{\partial}{\partial \psi} (\beta q) = -rq \frac{\partial p}{\partial \psi} + K_\psi + \frac{\beta q}{R_e} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} (r\Omega) \quad \dots\dots\dots(12)$$

ここで、 K_ϕ, K_ψ はそれぞれ単位質量に働く無次元質量力の ϕ および ψ 方向成分である。

式(8)の両辺の回転をとると、

$$-\Omega \cdot \nabla \mathbf{q} + \mathbf{q} \cdot \nabla \Omega = \nabla \times \mathbf{K} + (1/R_e) \nabla^2 \Omega \quad \dots\dots\dots(13)$$

のように、渦度輸送方程式が得られ、式(13)の $\mathbf{e}_\phi$ 方向成分をとると、

$$\begin{aligned} \beta q^2 \frac{\partial \Omega}{\partial \phi} - \frac{\beta q^2 \Omega}{r} \frac{\partial r}{\partial \phi} &= \beta q \frac{\partial K_\phi}{\partial \phi} - rq \frac{\partial K_\psi}{\partial \phi} \\ &- \frac{\beta}{r} K_\psi \frac{\partial}{\partial \phi} (rq) + \frac{r}{\beta} K_\phi \frac{\partial}{\partial \psi} (\beta q) \\ &+ \frac{1}{R_e} \left[\beta q^2 \frac{\partial \beta}{\partial \phi} \frac{\partial \Omega}{\partial \phi} + \beta^2 q^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \phi^2} + \left(2rq^2 \frac{\partial r}{\partial \phi} \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{r^2 q^2}{\beta} \frac{\partial \beta}{\partial \phi} \right) \frac{\partial \Omega}{\partial \psi} + r^2 q^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \phi^2} - \frac{\Omega}{r^2} \right] \quad \dots\dots(14) \end{aligned}$$

となる。

質量力として重力のみを考慮すると式(1)～(4)から

$$K_\phi = \frac{rq}{F_r} \frac{\partial r}{\partial \psi}, \quad K_\psi = \frac{rq}{F_r} \frac{\partial z}{\partial \psi} \quad \dots\dots\dots(15)$$

が得られる。ここで F_r はフルード数であり、次式で定義される。

$$F_r = \frac{U^{*2}}{L^* g} \quad \dots\dots\dots(16)$$

したがって、式(10)を式(11)および(12)に代入し Ω を消去して、式(5)～(7)、(11)および(12)から、 z, r, q, β および p を ϕ, ψ の関数として解けばよい。あるいは、渦度を用いると、式(5)～(7)、(10)および(14)から、 z, r, q, β および Ω を未知数として解くこともできる。

3. 軸対称噴流への適用

2章で誘導した基礎方程式を図2に示すような軸対称噴流に適用する。

3.1 計算方法 式(5)～(7)、(10)および(14)から、 z, r, q, β および Ω を未知数として解くことにする。渦度輸送方程式〔式(14)〕を放物形方程式に近似し、流路出口から下流へ向って順次積分を行う方法をとる。

図2に示すように、任意の点Pにおける値を添字 (i, j) で表す。代表長さ L^* には距離 $\overline{AB}$ を取り、代表速度 U^* には $\overline{AB}$ における平均流速を選ぶ。さらに、図のように、各点に記号を付し、各点の諸量の値を対応する記号の添字で表す。

式(14)において、物理量 (Ω など) の ϕ 方向のこう配は ψ 方向のこう配に比べて小さいと仮定し、式(5)、(6)および(15)を用いて変形して差分近似を行うと

$$\Omega_P = A_E \Omega_E + A_S \Omega_S + A_T \Omega_T + A_C \quad \dots\dots\dots(17)$$

が得られる。ここで

$$\begin{aligned} A_E &= \frac{r_P}{r_E} - \frac{r_E \Delta \phi}{\beta_E^2 \Delta \psi^2 R_e} \left(2r_E \beta_E + \frac{\beta_E \Delta \psi^2}{r_E^2 q_E^2} \right) \\ A_S &= \frac{r_E \Delta \phi}{4 \beta_E^2 \Delta \psi^2 R_e} \left[4r_E \beta_E + 2\beta_E (r_S \right. \\ &\quad \left. - r_T) - r_E (\beta_S - \beta_T) \right] \\ A_T &= \frac{r_E \Delta \phi}{4 \beta_E^2 \Delta \psi^2 R_e} \left[4r_E \beta_E - 2\beta_E (r_S \right. \\ &\quad \left. - r_T) + r_E (\beta_S - \beta_T) \right] \\ A_C &= \frac{r_E \Delta \phi}{4 \beta_E q_E F_r \Delta \psi^2} \left[-(q_S r_S - q_T r_T) (r_S - r_T) \right. \\ &\quad \left. - 4q_E r_E (r_S - 2r_E + r_T) + \frac{r_E}{\beta_E} (r_S - r_T) \right. \\ &\quad \left. \times (\beta_S q_S - \beta_T q_T) \right] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(18)$$

であり、 $\Delta \phi, \Delta \psi$ は、それぞれ ϕ および ψ 方向のきざみ幅である。

式(5)および(6)より z を消去して同様の仮定の

図2 軸対称噴流

もとに差分近似を行うと,

$$r_p^2 = \frac{1}{2} \left[r_k^2 + r_l^2 - \frac{1}{4\beta_E} (\beta_s - \beta_T) (r_k^2 - r_l^2) \right] \dots (19)$$

が得られ, 式(5)および(7)より

$$r_{in}^2 = r_{i-1,n}^2 + 2\Delta\phi \sqrt{\frac{1}{q_{i-1,n}^2} - \beta_{i-1,n}^2 \left(\frac{r_{in} - r_{i-1,n}}{\Delta\phi} \right)^2} \dots (20)$$

が導かれる。

さらに, 式(6)から,

$$z_p = z_E + \frac{\Delta\phi}{4\beta_E \Delta\phi} (r_s^2 - r_T^2) \dots (21)$$

式(7)から

$$q_p = 1 / \sqrt{r_p^2 \left(\frac{z_R - z_L}{2\Delta\phi} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{r_R^2 - r_L^2}{2\Delta\phi} \right)^2} \dots (22)$$

式(10)から

$$\beta_p = \beta_L + 2\Delta\phi \frac{\beta_L (\Omega_p + \Omega_L)}{(r_p + r_L)(q_p^2 + q_L^2)} \dots (23)$$

がそれぞれ得られる。

境界条件は次のように定めた。

図2において, 円管からの噴流の場合($\alpha=0$)の流路出口($\overline{AB}$)では, 境界条件としてポアズイユ流れの解を与えた。一方, ノズルからの噴流の場合($\alpha>0$), 流線が上流から点O'に向かって放射線状となる粘性流れの解⁽¹⁹⁾を流路出口の境界条件として与えた。 $\alpha>0$ の場合の円すい管内の流れに関しては, Ackerberg⁽²⁰⁾により詳細な研究が行われており, 円すい角 α が大きくなると流線が直線ではなくなることが示されている。したがって, 本計算ではこのことを考慮して α の値を定めた。

自由表面上の法線応力 σ_n は

$$\sigma_n = -\frac{\lambda}{W_e} \dots (24)$$

で与えられる⁽¹³⁾。ここで, W_e, λ はそれぞれウェーバ数および自由表面の平均曲率⁽¹⁵⁾⁽²¹⁾であり, 次式で与えられる。

$$W_e = \rho U^2 L^* / \sigma^* \dots (25)$$

$$\lambda = \left[\frac{1}{r} - \frac{r}{\beta} \frac{\partial}{\partial \phi} (\beta q) \right]_{\phi=\phi_f} \dots (26)$$

ここで, ϕ_f は自由表面上の ϕ の値, σ^* は表面張力をそれぞれ表している。

一方, 法線応力 σ_n は,

$$\sigma_n = -p - \frac{2}{R_e} \frac{q\beta}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} (rq) \dots (27)$$

で表されるから, 上式で粘性項は小さいと仮定して, 式(15), (24)および(27)を式(11)に代入すると,

$$\frac{\partial q^2}{\partial \phi} = 2 \left[-\frac{1}{W_e} \frac{\partial \lambda}{\partial \phi} + \frac{1}{Fr} \frac{r}{\beta} \frac{\partial r}{\partial \phi} - \frac{1}{R_e} \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \phi} (r\Omega) \right] \dots (28)$$

が得られる。

次に, セン断応力 τ は

$$\tau = \frac{rq}{R_e} \left[\frac{\partial q}{\partial \phi} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \phi} (\beta q) \right] \dots (29)$$

で与えられるから, 自由表面上の境界条件 $\tau=0$ および式(10)を用いると,

$$\Omega = -r \frac{\partial q^2}{\partial \phi} \dots (30)$$

が得られる。

対称軸($\phi=0$)での境界条件は, $r_{i1}=0, z_{i1}=z_{i2}, \Omega_{i1}=0, \beta_{i1}=0.005$ と定め, q_{i1} は式(7)より求めた。

計算手順は, まず流路出口(1, j)において, q, r, z, β および Ω の境界値を与える。次に r_{2j} の値を式(19)および(20)を用いて繰返し計算により求める。 k 回目の計算値と($k-1$)回目の計算値との差を k 回目の計算値で割った値の最大値 $\max [(r_{2j}^{(k)} - r_{2j}^{(k-1)}) / r_{2j}^{(k)}]$ が 10^{-4} より小さくなったら計算を打ち切る。さらに, 式(21), (22), (17)および(23)より, $z_{2j}, q_{2j}, \Omega_{2j}$ および β_{2j} の値を求める。この手順を下流へ向かって $\Delta\phi$ ずつ順次に進めていく。ただし, 自由表面上における z, q および Ω の値は, それぞれ式(6), (28)および(30)を差分近似した式により求め, 対称軸におけるそれぞれの値も前述の境界条件により与える。本計算では, ϕ 方向の格子点数 $n=41, \Delta\phi=3.125 \times 10^{-3}$ および $\Delta\phi=2.5 \times 10^{-5}$ と定めた。

3.2 計算結果および考察 本計算により得られた自由表面の形状を従来の実験結果⁽¹⁰⁾とともに図3に示す。Case 4の流路出口付近では, 特に流線曲率が大きいために計算値と実験値との間に多少の差違は見られるが, 全体的に良好な一致を示している。

図3 自由表面形状の計算値と実験値との比較

Case 1~4 において、流路出口付近で、噴流幅の計算値は実験値に比べて小さくなっているが、この傾向は Duda-Vrentas⁽¹⁶⁾の結果においても同様に現れている。さらに、下流に進むにつれて計算値の噴流幅のほうが大きくなる傾向にあるが、これは積分誤差の累積によ

るものと思われる。

噴流断面での軸方向速度分布を図4および図5に示す。下流に進むにつれて、軸方向速度は全体的に加速されていき一様速度分布に近づいていくことがわかる。これは、従来の二次元層流噴流の解析結果⁽²²⁾と同様の傾向である。実験点はレーザドップラ流速計によって測定されたものであり⁽¹⁰⁾、計算結果と良好な一致を示している。

以上のように、自由表面形状および速度分布の計算結果を従来の実験結果と比較した結果、両者はよく一致しており、本計算法の有効性が示された。

次にノズルからの噴流の計算結果について述べる。円管からの噴流とノズルからの噴流との自由表面形状を図6に示す。 $Re=744$ および 2218 の両方の場合ともに、ノズルからの噴流幅のほうが小さくなっている。

自由表面上の速度分布を図7に示す。全体的に、ノズルからの噴流の速度のほうが、円管からの噴流の速度に比べて大きくなっていることがわかる。

$Re=2218$, $Fr=0.1205$ および $We=4.14$ の場合の

図4 円管からの噴流の軸方向速度分布 ($Re=2162$)

図5 円管からの噴流の軸方向速度分布 ($Re=1836$)

図6 円管およびノズルからの噴流の自由表面形状

図7 自由表面上の速度

図 8 円管およびノズルからの噴流の軸方向速度分布

各噴流断面での軸方向速度分布を図 8 に示す。ノズルからの噴流の速度のほうが大きく、特に自由表面付近で違いが顕著に現れている。

4. 結 論

非圧縮性三次元軸対称流れを仮定し、流れ方向の座標 ϕ と流れ関数 ψ とを用いた流線座標 (ϕ, ψ) による粘性流れの基礎方程式を導いた。この基礎方程式を放物形方程式に近似し、円管からの層流噴流を重力および表面張力の影響を考慮して数値的に解いた。本計算により得られた自由表面形状および速度分布を従来の実験結果と比較するとともに、本計算法の有効性を示した。さらに、ノズルからの噴流について同様な計算を行い、その結果を円管からの噴流の計算結果と比較して、ノズルからの噴流の特徴を示した。

結果として、次のような結論が得られた。

(1) 粘性を考慮し、非圧縮性三次元軸対称流れを仮定して導かれた流線座標による基礎方程式を放物形

方程式に近似して、自由表面を有する層流噴流を解く方法は有効である。

(2) ノズルの噴流幅は、円管の噴流幅に比べて、流路出口から下流へ向かって全体的に小さくなる。

(3) ノズルからの噴流の噴流断面上軸方向速度分布は、円管からの噴流の速度分布に比べて大きくなり、その違いは自由表面近くで特に顕著に現れる。

本研究は、University of Wisconsin-Madison の計算機設備を使用した。職員諸氏に厚く謝意を表する。

文 献

- (1) Milne-Thomson, L. M., *Theoretical Hydrodynamics*, (1960), 598, The Macmillan Company.
- (2) 高橋, 機論, 48-427, B (昭 57), 445.
- (3) Finnigan, J. J., *J. Fluid Mech.*, 130(1983), 241.
- (4) 築地・高橋, 機論, 49-445, B (昭 58), 1832.
- (5) Takahashi, K. and Tsukiji, T., *Trans. CSME*, 9-3 (1985), 165.
- (6) Takahashi, K., Tsukiji, T. and Sakagami, T., *Preprint Int. Symp. on Fluid Control and Measurement (Tokyo)*, Vol. 2, (1985), 711, Pergamon Press.
- (7) Jeppson, R. W., *J. Fluid Mech.*, 40, part 1(1970), 215.
- (8) Yang, T. and Nelson, C. D., *Trans. ASME, J. Fluid Eng.*, 101-4(1979), 473.
- (9) Patankar, S. V. and Spalding D. B., *Int. J. Heat Mass Transfer*, 15 (1972), 1787.
- (10) 山口・高橋, 機論, 46-403, B (昭 55), 422.
- (11) Tillett, J. P. K., *J. Fluid Mech.*, 32, part 2 (1968), 273.
- (12) Goren, S. L. and Wronski, S., *J. Fluid Mech.*, 25, part 1 (1966), 185.
- (13) Omodei, B. J., *Comput. and Fluids*, 8-3(1980), 275.
- (14) 山口・高橋, 機論, 46-403, B (昭 55), 432.
- (15) Lienhard, J. H., *Trans. ASME, Ser. D*, 90-2(1968), 262.
- (16) Duda, J. L. and Vrentas, J. S., *Chem. Eng. Sci.*, 22 (1967), 855.
- (17) Pai, S. I., *Viscous Flow Theory*, Vol. I, (1956), 152, D. Van Nostrand Company, Inc.
- (18) Jeffrey, A., *Mathematics for Engineers and Scientists*, (1969), 247, Barnes & Noble, Inc.
- (19) 今井, 流体力学 (前編), (昭 52), 354, 裳華房.
- (20) Ackerberg, R. C., *J. Fluid Mech.*, 21, part 1 (1965), 47.
- (21) Esser, P. D., and Abdel-Khalik, S. I., *Trans. ASME, J. Fluid Eng.*, 106-1(1984), 45.
- (22) 三宅・向・家元, 機論, 45-390, B (昭 54), 180.

討 論

〔質問〕 堀 越 長 次 (信州大学工学部)

粘性、重力、表面張力の影響を考慮して解析されたことに敬意を表す。以下の点についてご教示いただきたい。

(1) 式(28)の導出の際に、粘性項が小さいとして式(27)の右辺第 2 項を無視した根拠、またその影響についてご教示いただきたい。

(2) 噴流幅は噴出口における速度分布形に強く依存すると考えられる。したがって、結論(2)で述べておられる両噴流における噴流幅の差異は、貴論文で用いた噴出口速度分布形の場合に限定して得られたものと考えてよいのか。ご教示いただきたい。

〔回答〕 (1) 本解析では、845 ページ右欄 6 行めに述べられているように、物理量の ϕ 方向のこう配

は ϕ 方向のこう配に比べて小さいことが仮定されている。文献(2)によると、レイノルズ数が大きい流れでは、この仮定が妥当であることが示されている。式(27)の右辺第2項を省略しない場合、式(28)の右辺角括弧内には以下の項が加わる。

$$\frac{2}{Re} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\frac{q\beta}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} (rq) \right]$$

この項は、物理量の ϕ 方向のこう配とこう配との積および ϕ 方向の二階微分項を示しており、式(28)のほかの項に比べて十分小さいことになる。したがって、この項が起因する式(27)の右辺第2項を無視した。

レイノルズ数が大きいほど式(27)の右辺第2項の影響は小さくなる。本計算でのレイノルズ数の範囲 ($700 < Re < 2200$) では、計算結果と実験結果とは良く一致しており、式(27)の右辺第2項の影響は比較的小さいと考えられる。しかしながら、レイノルズ数が小さい

流れでは、式(27)の右辺第2項を考慮する必要があると思われる。

(2) ご指摘のとおり本論文で用いた噴出口速度分布形の場合に限定して得られたものと考えていただきたい。なお、以下のようにも解釈していただきたい。粘性は噴流幅を増加させ、重力は減少させ、表面張力は自由表面の平均曲率によって両方の可能性をもっている。本論文での計算パラメータの範囲内では、計算結果と実験結果との比較により、噴出口速度分布形も含めた境界条件の与え方および計算方法は適切であったと考えている。したがって、結論(2)は粘性、重力および表面張力が作用するもとで、ノズルの開き角が比較的小さいことを含めた本論文での計算パラメータの範囲内においての結論と解釈していただきたい。